

2 - 11 - FOURIEROMVENDING - LF

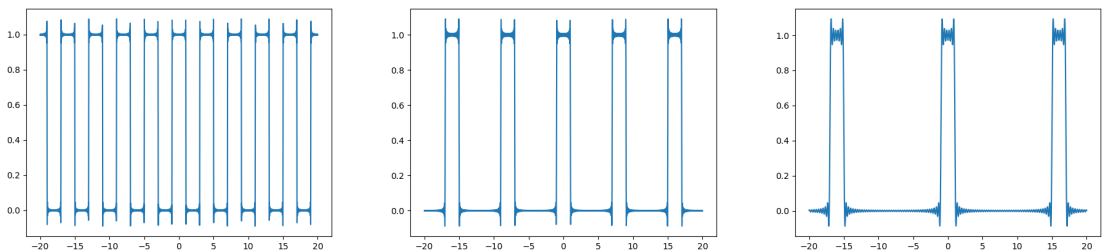
1 La $T > 2$. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{in\omega T} (e^{in\omega} - e^{-in\omega}) = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \end{aligned}$$

og $c_0 = 2/T$. Vi setter så sammen rekken, og får

$$\begin{aligned} y(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} + \frac{\sin(-n\omega)}{(-n\omega)} e^{-in\omega t} \right) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} + \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{-in\omega t} \right) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \cos(n\omega t) \right) \end{aligned}$$

Under er plot av en partialsum med de hundre første leddene for T lik 4, 8, og 16.



9 Vi beregner:

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}\end{aligned}$$

Denne kalles sinc-funksjonen og er veldig viktig i elektroteknikk. Merk likheten med fourierkoeffisientene fra forrige oppgave

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}$$

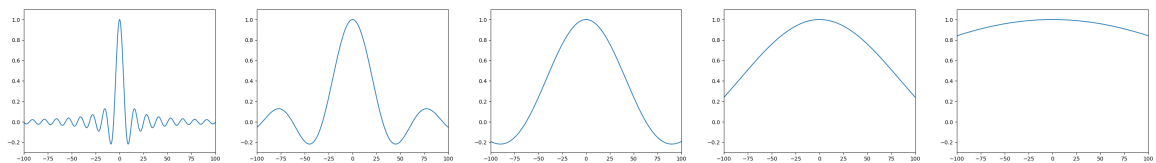
der jeg har bytta navn fra ω til ω_0 for å poengtere at det at periodisk signal har en grunnfrekvens ω_0 og så dekomponeres signalet i heltallsmultipler av denne. I fouriertransform gir ikke konseptet "grunnfrekvens" noen mening lenger, for når signalet ikke er periodisk, må man fort ha alle frekvenser på den reelle aksen for å rekonstruere signalet:

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} dt\end{aligned}$$

10 Denne blir ikke helt ulik den forrige:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1/2a}^{1/2a} ae^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-a}{i\omega} (e^{-i\omega/2a} - e^{i\omega/2a}) = \frac{\sin \omega/2a}{\omega/2a}\end{aligned}$$

Her er plot av denne for a lik 1, 5, 10, 20 og 50. Merk at når $a \rightarrow \infty$ går \hat{x} mot 1 overalt. Dette har sammenheng med oppgave 12 under.

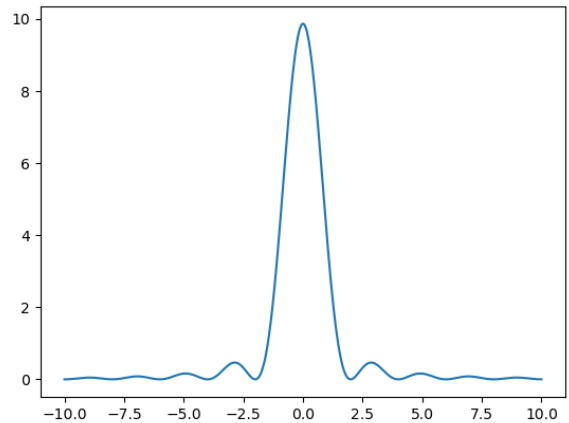


11 Trekantpulsen er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega\pi)) \end{aligned}$$



12 Lett!

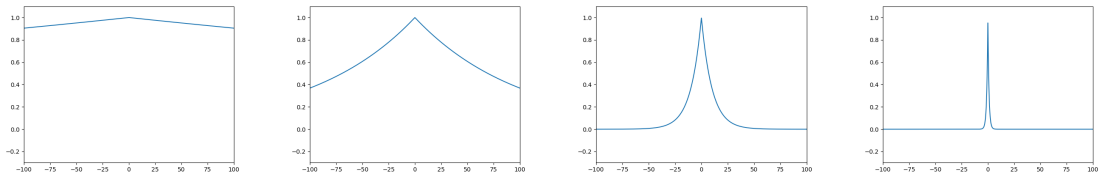
$$\hat{\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$$

Se på oppgave 12 over. Signalet

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$$

er en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på.

13 Denne funksjonen er også en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på. Her er plot for a lik 0.001, 0.01, 0.1 og 1:



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} e^{(a-i\omega)t} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} - \frac{1}{(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dette gir OGSÅ en heuristisk finfin måte å sette opp diracpulsen på når $a \rightarrow 0$.

- 14 Her bruker vi et skittent triks som vi ikke egentlig kan bruke. Men vi er ingeniører og eier ikke skam, så det går bra. I forrige oppgave regnet vi ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

og hvis vi skal tro de som har peiling, er følgelig

$$e^{-a|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

Hvis vi bytter fortegn på t og deler på $2a$, får vi

$$\frac{1}{2a} e^{-a|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega$$

som er det vi er ute etter, bare med variabelnavnene bytter om. For ordens skyld kan vi bytte:

$$\frac{1}{2a} e^{-a|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega)$$

- 15 Her kan du bruke oppgave 10 og samme triks.

- 16 Vel, tosidig laplacetransform er

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

slik at

$$X(i\omega) = \hat{x}(\omega)$$

Litt forenklet kan man nok si at i fagfelt der man er opptatt av initialbetingelser (for eksempel regulerings- og prosesseteknikk), er det litt skummelt å si at fourier er spesialtilfelle av laplace (fordi regnereglene for derivasjon blir litt forskjellige), men i fagfelt der man ikke er det (kretsanalyse), er det samme greia.

- 17 I denne oppgaven må vi begynne å tenke litt på hva vi fourieromvender. Siden $e^{-i\omega t}$ alltid ligger på enhets sirkelen i det komplekse planet, ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt.$$

Med andre ord kan vi være sikker på integralet konvergerer dersom $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ er et tall og ikke uendelig. Vi sier i dette tilfellet at x er **absolutt integrerbar**, og du kan i bunn og grunn tenke på x som en skalarmultipel av en sannsynlighetsfordeling. Vi kan nå delvisintegre slik

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{x} \end{aligned}$$

siden

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0.$$

18] La $y(t) = x(t - \theta)$ Vi tar et trivielt variabelskifte, og beregner

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega(p+\theta)} dp \\ &= e^{i\omega\theta} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p} dp = e^{i\omega\theta} \hat{x}(\omega).\end{aligned}$$

19] La $y(t) = e^{i\theta t} x(t)$. Her er det ikke nødvendig med variabelskifte en gang:

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - \theta)t} dt = \hat{x}(\omega - \theta).\end{aligned}$$

20] La $y(t) = x(at)$ og la $a > 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = \frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

La så $y(t) = x(at)$ og la $a < 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = -\frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

Alt i alt kan vi skrive dette som

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{x}(\omega/a).$$

21] La oss studere funksjonen

$$x(t) = e^{-t^2/2}$$

Hele utledningen bygger på to pene faktum. Det første er at

$$\dot{x}(t) = -te^{-t^2/2}$$

og det andre er at

$$\frac{d}{d\omega} x(t) e^{-i\omega t} = -ite^{-t^2/2} e^{-i\omega t}$$

som tilsammen gir

$$i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = -i \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega)$$

eller

$$\omega \hat{x}(\omega) + \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = 0.$$

Som alle barn i barnehagen vet, kan en differensiallikning ofte løses ved å herje litt og integrere. I dette tilfellet er herjingen å gange med $e^{\omega^2/2}$:

$$e^{\omega^2/2} \omega \hat{x}(\omega) + e^{\omega^2/2} \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = 0,$$

for da ser vi at dette er bare likningen

$$\frac{d}{d\omega} (e^{\omega^2/2} \hat{x}(\omega)) = 0,$$

som integrerer til

$$e^{\omega^2/2} \hat{x}(\omega) = c,$$

eller

$$\hat{x}(\omega) = c e^{-\omega^2/2}.$$

Konstanten c kan vi bestemme ved å evaluere likningen i $\omega = 0$:

$$c = \hat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

Det siste integralet skal vi som sagt komme tilbake til neste semester. Konklusjonen er at

$$\hat{x}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2},$$

og siden fourieromvending er en lineæroperator, er fourieromvendingen til standardnormalfordelingen $e^{-\omega^2/2}$, enkelt og greit.

Standardnormalfordelingens karakteristiske funksjon er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{i\omega t} dt$$

Men dette kjenner vi igjen som inversomvendingen til det vi nettopp regna ut. Vi vet jo at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega$$

eller

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega$$

og høyresiden er nettopp det vi er ute etter, bare med feil variabelnavn. Konklusjonen er at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{i\omega t} dt = e^{-\omega^2/2}.$$

Hvis du ikke liker at jeg bruker inversomvendingen så fritt, kan du prøve kopiere resonnetet vi brukte for å regne ut fourieromvendingen til standardnormalfordelingen; det er bare en minus her og der som blir forskjellig.