2 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER V

Det er litt slik med differensiallikninger at dersom de lar seg løse med penn og papir lar de seg gjerne løse med penn og papir på flere forskjellige måter. Vi skal innlede dette semesteret med å kombinere triksene vi lærte om eksponensialfunksjonen i TMA4101, og bruke dem til å hoste opp noen nye måter å angripe differensiallikninger på. Vi har nemlig det som trengs for å håndtere **matriseeksponensialfunksjonen**[1]

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Grunnen til at vi er interesserte i denne, er at $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ er løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

$\boxed{1}$ Du kan selv skjønne hvorfor ved å derivere

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

ledd for ledd og så "sjekke" at $\dfrac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. [2]

Det er stort sett slik med forksjellige metoder for LTI-systemer at det er finnes ikke én metode som alltid gir løsningen på den enkleste måten. Matriseeksponensialfunksjonen gir løsningen på den enkleste måten i noen tilfeller. Men den er et bra påskudd for å ta unna **diagonalisering**. Vi smakte så vidt på dette i TMA4101, nå kan vi gjøre det litt ordentligere. Alle barn i barnehagen vet at

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Sett egenvektorene opp som kolonner i en matrise V og beregn AV. Produktet AV kan faktoriseres på en annen måte der V står på venstre istedet for høyre side. Hvordan?

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_exponential

[2] Jeg sier "sjekke", for det er ganske mye jobb å vise på en stringent måte at dette er riktig. Hvis du vil vite hvordan det skal gjøres ordentlig, kan du lese kap. 2 i Schaeffer og Cain. Hvis ikke, kan du bare derivere ledd for ledd og se hva som skjer.

Dersom

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er

$$AV = V\Lambda.$$

Dette er bare alle egenvektorlikningene til A sammenstilt på matriseform, og du kan gjøre det uansett hvor mange egenvektorer det er for eksempel er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Men dersom A har n lineært uavhengige egenvektorer, eksisterer V^{-1}, og vi kan skrive

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

og siden Λ er diagonal, sier vi at A er **diagonalisert**. Den motsatte implikasjonen holder også; dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ må kolonnene i V være lineært uavhengige egenvektorer til A, og derfor sier vi en matrise er **diagonaliserbar** hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Er disse diagonaliserbare?

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{4}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{5}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{6}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dersom A er diagonaliserbar, danner egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^n$. Det er gunstig å bytte til denne basisen når man løser $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, for den **dekobler** likningene. Dersom vi skriver $\mathbf{x} = V\mathbf{z}$, får vi $\dot{\mathbf{x}} = V\dot{\mathbf{z}}$.

$\boxed{7}$ Vis at $\dot{\mathbf{z}} = \Lambda\mathbf{z}$ og skriv opp løsningen $\mathbf{z}$. Hva blir $\mathbf{x}$?

Jobben er å forstå hvordan vi beregner matriseeksponensialfunksjonen på en effektiv måte. Det er faktisk et åpent spørsmål hvordan man beregner denne optimalt.[3]

$\boxed{8}$ Steg én for å forstå dette er å skrive ut hva matriseeksponensialfunksjonen på komponentform dersom A er en diagonalmatrise.

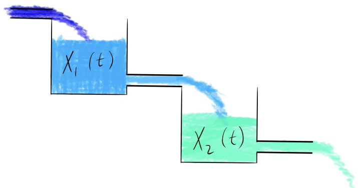
Dette er greit å vite, siden

$$A = V\Lambda V^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{A} = Ve^{\Lambda}V^{-1}.$$

$\boxed{9}$ "Sjekk" dette også.

Har du fulgt med til nå vil du kanskje innvende at vi ikke har vunnet noe særlig - å løse $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ innebærer fremdeles å finne egenverdiene og egenvektorene til A. Men styrken i matriseeksponensialfunksjonen kommer til syne når A er defekt. Du husker forhåpentligvis strømning i tank:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= \quad x_1 - x_2 \end{aligned}$$



Her kommer det rent vann inn i den øverste tanken, og vi antar det er perfekt blanding i begge tanker, og så har jeg satt farten til én liter per sekund slik at systemet skal bli pent og pyntelig.

$\boxed{10}$ Er matrisen diagonaliserbar? Hva er løsningen?

[3]https://www.cs.jhu.edu/~misha/ReadingSeminar/Papers/Moler03.pdf

Vi vet at matrisemultiplikasjon ikke er kommutativt. Men dersom A og B kommuterer, er

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

$\boxed{13}$ Denne er litt hårete, tipper de fleste må slå det opp. Det står i Schaeffer og Cain, men Perko[4] har en enda penere løsning.

Vi kan nå skrive

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

$\boxed{14}$ Sjekk at I og N kommuterer.

Det er viktig på grunn av følgende oppgave.

$\boxed{15}$ Sjekk at

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

O YES! Var ikke det pent så vet ikke jeg.

$\boxed{16}$ Systemet med tankene og konsentrasjonene har to lineært uavhengige løsninger. Nå har du alle. Løs med initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[4] https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0003-8

Matrisen $\lambda I + N$ er den grunnleggende byggesteinen i **jordandekomposisjonen**[5] til A:

$$A = VJV^{-1}$$

Dette er en dekomposisjon med en **blokkdiagonal**[6] matrise

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

der J_k er kvadratiske matriser på formen

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alle matriser kan jordandekomponeres, og jordandekomposisjonen degenerer til vanlig diagonalisering dersom A er diagonaliserbar, men beviset er altfor hardt for TMA4106. Har man jordandekomponeringen til A, kan man i prinsippet løse absolutt alle systemer på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, siden

$$e^{At} = Ve^{Jt}V^{-1}$$

og

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ Vis.

Matrisen N på forrige side kalles **nilpotent**, siden den forsvinner om du ganger den med seg selv. Dette trikset kan du bruke på følgende systemer. Løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dersom A er

$\boxed{18}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{19}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{20}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{21}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Hint: Du kan hacke oppgave 15.)

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form`
[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix`

Det som gjenstår er å vite hvordan man finner V dersom A ikke er diagonaliserbar. Kolonnene i V består av **generaliserte egenvektorer**[7] til A. En generalisert egenvektor $\mathbf{v}$ er en vektor som tilfredsstiller likningen

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

og det går an å vise at dersom multiplisiteten til λ er n, kan man alltid finne n lineært uavhengige generaliserte egenvektorer. Men det er ikke nødvendig å gjøre det så komplisert - du kan finne J basert på multiplisiteten til egenverdiene og så bruke likningene $AV = VJ$ til å regne ut de generaliserte egenvektorene.

$\boxed{22}$ Finn jordanformendekomposisjonen til

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

og løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ med initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_eigenvector

UKENS NØTTER

For LTI-systemer er det slik at noen numeriske metoder som egentlig er implisitte, blir eksplisitte allikevel.

$\boxed{1}$ Vis at Euler eksplisitt på $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I + hA)\,\mathbf{x}_k,$$

at euler implisitt blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1}\,\mathbf{x}_k$$

og at trapesmetoden blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k.$$

Kjør alle på

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og sammenlikne med oppgave den analytiske løsningen fra økt 1-7.

Hvis du skal opphøye en matrise A i en stor potens, er det veldig greit å ha diagonaliseringen, siden

$$A^n = \left(V\Lambda V^{-1}\right)^n = V\Lambda^n V^{-1}.$$

Det er nemlig veldig lett å opphøye en diagonalmatrise i n.

$\boxed{2}$ Prøv på kjøre euler eksplisitt med stor h. Kan du forklare?
Hint: Diagonaliser $I - hA$ i python og se på egenverdiene.