2 - 1 - DIFFERENSALLIKNINGER V - LF

$\boxed{1}$ Vi antar kjekt at

$$\frac{d}{dt}At = A$$

og deriverer eksponensialfunksjonen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2} + \frac{A^4t^3}{3!} + \cdots \\
&= A\left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= Ae^{At}.
\end{aligned}$$

Dersom vi aksepterer at

$$e^{A\cdot 0} = e^0 = I,$$

er det lett å gå med på at

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

både passer i differensiallikningssystemet og tilfredsstiller $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

$\boxed{3}$ Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda)) \\
&= (2-\lambda)\left(3 - 4\lambda + \lambda^2\right) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\
&= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)
\end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at egenvektorene som korresponderte til forskjellige egenverdier automatisk kom ut ortogonale. Dette var ikke tilfeldig, vi kommer tilbake til det.

$\boxed{4}$ Nei. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og prøver vi å regne ut egenvektorene, får vi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir $x_2 = x_3 = 0$ og

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som eneste egenvektor.

$\boxed{7}$ La oss si at du har Λ og V slik at $A = V\Lambda V^{-1}$. Vi skriver systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = V\Lambda V^{-1}\mathbf{x}.$$

La oss først gange fra venstre med V^{-1}, og få

$$V^{-1}\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \Lambda V^{-1}\mathbf{x}.$$

Nå er et bare å sjekke at

$$\frac{d}{dt}(V\mathbf{y}) = V\dot{\mathbf{y}}$$

så lenge V er en konstant matrise, og så bytte til koordinatene $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$, og skrive

$$\dot{\mathbf{y}} = \Lambda\mathbf{y}.$$

$\boxed{8}$ For å avdekke hva som skjer, kan vi ta for oss et triks. For det første er det veldig kjapt å gange diagonalmatriser med seg selv:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & & \\ & \lambda_2^m & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Da skjønner alle barn i barnehagen at dersom Λ er diagonal, er

$$\begin{aligned}e^{\Lambda t} =& I + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \cdots \\ =& \begin{pmatrix} \sum_k = 0^\infty \lambda_1^k/k! & & & \\ & \sum_k = 0^\infty \lambda_2^k/k! & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_k = 0^\infty \lambda_n^k/k! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & \\ & e^{\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ kan nok en gang bruke trikset med diagonalmatrisene:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{V\Lambda V^{-1}t} \\ &= I + V\Lambda V^{-1} + \frac{(V\Lambda V^{-1})^2}{2} + \frac{(V\Lambda V^{-1})^3}{3!} + \cdots \\ &= I + V\Lambda V^{-1} + \frac{V\Lambda^2 V^{-1}}{2} + \frac{V\Lambda^3 V^{-1}}{3!} + \cdots \\ &= V\left(I + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \cdots\right)V^{-1} = Ve^{\Lambda t}V^{-1} \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Nope, ikke diagonaliserbar. Men vi kan løse systemet på samme måte som i If på eksamen i TMA4101:

$\boxed{13}$ Den peneste måten å definere eksponensialfunksjonen på, er i bunn og grunn

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

som er absolutt konvergent for alle z. La oss nå gange sammen to slike og herje litt:

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n!m!}$$

Denne herjingen er tillatt så lenge rekkene er absolutt konvergente, men det er de jo. Vi ser nå tydelig at koeffisienten til $z^n w^m$ er $1/(n!m!)$, så det vi trenger å gjøre, er å sjekke at dette også er koeffisienten til $z^n w^m$ i e^{z+w}: Binomialteoremet[1] gir

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} z^k w^{k-l}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} z^l w^{k-l}. \end{aligned}$$

Nå er det egentlig bare å observere at en bestemt potens $z^n w^m$ kun opptrer på ett sted i hver sum, og voila. (Litt subtil denne her. Ikke gå i kjelleren om du må tenke en stund.)

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem

Hvis du nå bytter ut z og w med matrisene A og B, er beregningen i bunn og grunn den samme, men det er en del jobb å vise ordentlig at alle stegene i beregningen er tillatte. Man må også bruke kommutativiten til A og B når man bruker binomialteoremet; dette tenker vi jo ikke på når vi ganger sammen reelle eller komplekse tall.

$\boxed{14}$ Jeg håper du husker at identitetsmatrisen kommuterer multiplikativt med absolutt alle matriser.

$\boxed{15}$ Siden I og N kommuterer, kan vi først beregne

$$e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda It}e^{Nt}$$

Nå er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

og følgelig at

$$e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda It}e^{Nt} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{16}$ Løsningen blir altså

$$e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{(\lambda I+N)t}\mathbf{x}_0 = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t}(1+t) \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ Du kan selv sjekke at at dersom N er $(n+1)\times(n+1)$, er N^{n+1} nullmatrisen, slik at eksponensialfunksjonen terminerer etter $n+1$ ledd:

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} + \cdots + \frac{(Nt)^n}{n} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{19}$ Siden I og N kommuterer, kan vi først beregne

$$e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda It}e^{\lambda Nt}$$

Nå er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og følgelig at

$$e^{(\lambda I+N)t} = e^{\lambda It}e^{\lambda Nt} = e^{\lambda It}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18 og 20-21 er like.

$\boxed{22}$ Steg en er å finne egenverdiene til A. Det karakteristiske polynomet er

$$|A - \lambda I| = -\lambda(-1 - \lambda)$$

slik at egenverdiene er null (enkel) og minus én (dobbel). Egenvektoren til null er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og om vi prøver å finne egenvektoren til minus én, får vi bare

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da vet vi formen på J:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

samt de to første kolonnene i V:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_{13} \\ 2 & 0 & v_{23} \\ 4 & 1 & v_{33} \end{pmatrix}$$

Likningssystemet $AV = VJ$ impliserer nå at $v_{11} = 0$, $v_{23} = 1/2$ og v_{33} kan være hva som helst unntatt den ene verdien som gjør V ikke inverterbar. Du kan regne ut det hvis du orker.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Dersom f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ og $\mathbf{x}$ en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$ og vi skal løse systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

blir eksplisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k)$$

implisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_{k+1})$$

og trapesmetoden

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\left(f(\mathbf{x}_k) + f(\mathbf{x}_{k+1})\right)$$

I vårt tilfelle er

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

For eksplisitt Euler får vi

$$\mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k) = (I + hA)\mathbf{x}.$$

Implisitt Euler blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hA\mathbf{x}_{k+1}$$

men om vi skriver alt med $\mathbf{x}_{k+1}$ på venstre side, får vi

$$(I + hA)x_{k+1} = \mathbf{x}_k$$

og så er det bare å invertere $I + hA$, og få

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1}\,\mathbf{x}_k$$

For trapesmetoden bruker vi bare det samme trikset; vi skriver

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}\left(A\mathbf{x}_k + A\mathbf{x}_{k+1}\right)$$

sorterer:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2}A\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}A\mathbf{x}_k$$

bruker identitetsmatrisen:

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

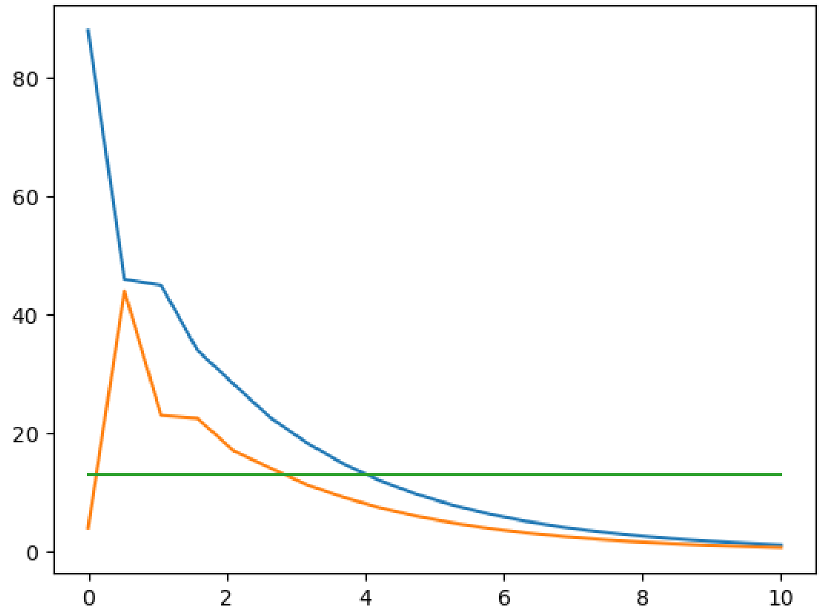
og inverterer:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

I pythonkoden i forrige oppgave kan du kjøre alle metodene.

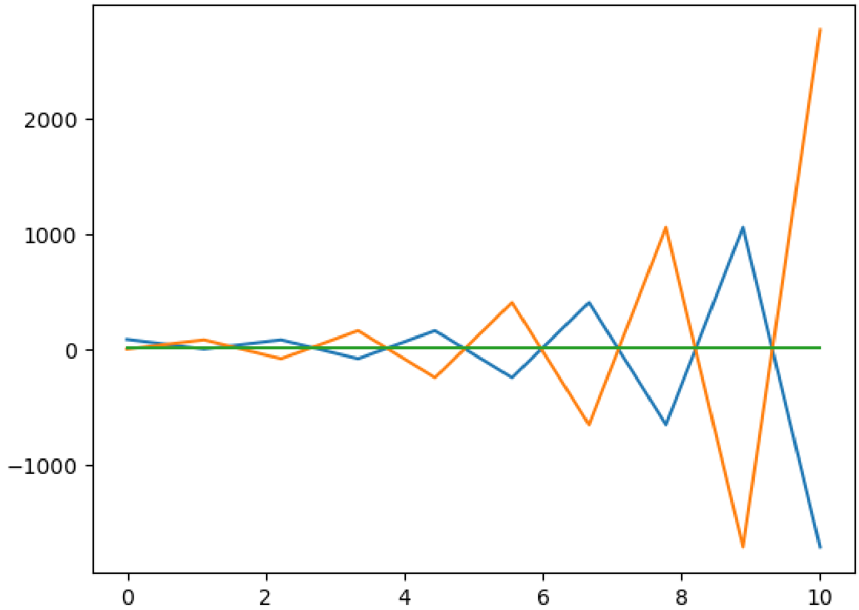
$\boxed{2}$ La oss begynne med å se på hva som skjer når vi kjører eksplisitt euler for store h. Dersom $h = 0.5$, begynner kurvene å se stygge ut:

HOMEOPATISKE FORVIKLINGER



og dersom $h = 1$ er det ingenting igjen som minner om korrekt fysikk:

HOMEOPATISKE FORVIKLINGER



Hva skjer? La oss først se på hvordan vi opphøyer en matrise i en stor potens. Det kan du gjøre du slik:

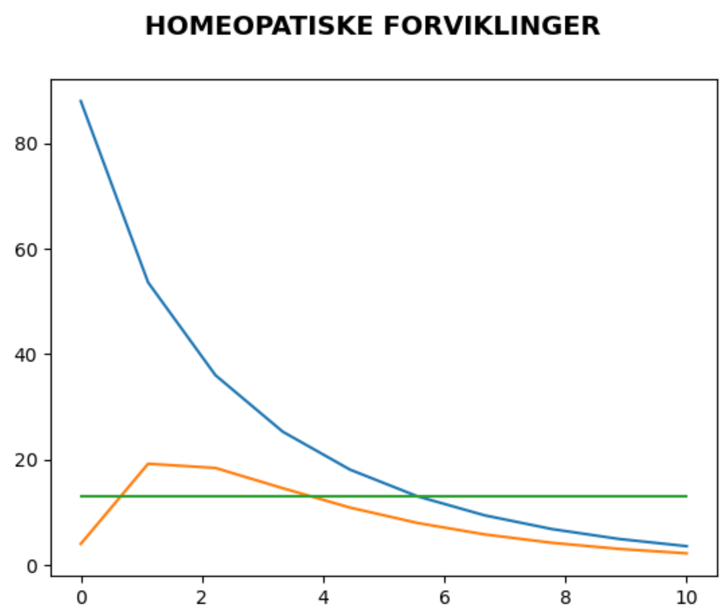
$$
\begin{aligned}
A^n &= \left(V\Lambda V^{-1}\right)^n \\
&= \left(V\Lambda V^{-1}\right)\left(V\Lambda V^{-1}\right)\cdots\left(V\Lambda V^{-1}\right) \\
&= V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1}\cdots V\Lambda V^{-1} \\
&= V\Lambda\Lambda\cdots\Lambda V^{-1} \\
&= V\Lambda^n V^{-1}.
\end{aligned}
$$

Det er altså hvorvidt egenverdiene er større eller mindre enn en som har noe å si for om vi får ukontrollert vekst. Hvis man legger inn kommandoen

```
print(np.linalg.eig(ekspl_mat))
```

i koden et eller annet sted, vil man se at i det h bikker sånn omtrent $5/7$, bikker den ene egenverdien til $(I - hA)$ over 1, og da begynner iterasjonene å stige ukontrollert.

Dersom man prøver samme eksperiment med implisitt, vil man oppdage at det går helt fint. Her er $h = 1$:



Unøyaktig som faen, men kvalitativt riktig. Forklaringen er den samme, print egenverdiene til $I - hA$, så ser du. Trapesmetoden oppfører seg likt, men legger seg tettere på den korrekte løsningen, siden den har høyere orden.[2]

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule_(differential_equations)