2 - 0 - DIFFERENSIALLIKNINGER V

Alle barn i barnehagen vet at den homogene differensiallikningen

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

er en modell for et masse-demper-system eller en rcl-krets eller andre ting. Ingeniører kaller slikt for **LTI-systemer**, eller **lineære og tidsinvariante systemer**. "Lineær" betyr at venstresiden er en lineæroperator på den ukjente, og "tidsinvariant" betyr at ingen av koeffisientene avhenger av t. Dersom vi slenger på en gitt funksjon av t på høyre side slik:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

sier vi at likningen er **inhomogen**. En fysiker ville sagt at vi hadde et **drevet system**, for funksjonen f kjører på med sitt uavhengig av løsningen x. I kybernetikk eller prosessteknikk kalles f en **forstyrrelse**, mens andre kaller det **påtrykk**. I masse-demper-systemet tenker du på f som en ekstern kraft og i rcl-kretsen som en spenningskilde. Løsningen er alltid

$$x = x_h + x_p$$

der x_h er et element i nullrommet til problemets lineæroperator og x_p er en løsning som skyldes forstyrrelsen f. Vi kaller x_h den **den homogene løsningen** og x_p **den inhomogene løsningen** eller **partikulærløsningen**. Disse kan finnes på mange forskjellige måter. [1] La oss begynne med å repetere litt. Løs

$\boxed{1}$ $\dot{x}(t) + x(t) = \sin t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$\boxed{2}$ $\ddot{x} + \dot{x} + x = 1,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$\boxed{3}$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ og $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Løsningen kalles gjerne systemets **respons**; man tenker at det fysiske systemet responderer på forstyrrelsen f med oppførselen x. Det er fire responser som er spesielt viktige i anvendelser:

Naturlig respons: Systemets respons på $f(t) = 0$

Sprangrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$

Frekvensrespons: Systemets respons på $f(t) = e^{i\omega t}$

Impulsrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$

[1] Oppskrift finner du her:
`https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4106/2021v/notater/orke.pdf`
eller i kapittel 5.9 i Arnes bok.
Mer om fysikken finner du her:
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html`

Alle disse kan analyseres med verktøykassen du har, men la oss ta unna et viktig triks. Siden

$$\frac{d}{dt}\left(x\left(t-t_0\right)\right)=\dot{x}(t-t_0)$$

ser vi at dersom

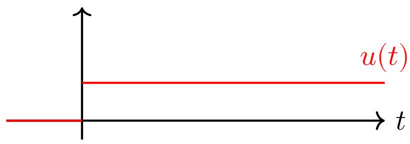
$$\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)=f(t) \qquad x(0)=x_0 \qquad \dot{x}(0)=v_0$$

er $z(t)=x(t-t_0)$ en løsning av

$$\ddot{z}(t)+b\dot{z}(t)+cz(t)=f(t-t_0) \qquad z(t_0)=x_0 \qquad \dot{z}(t_0)=v_0.$$

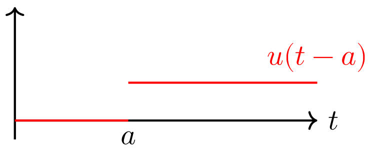
Det er derfor vi kaller systemet tidsinvariant. Samme påtrykk på et senere tidspunkt gir samme respons, altså samme kurve bare flytta litt på tidsaksen. Dette trikset er effektivt for å håndtere sprangresponsen. La oss begynne med å definere **enhetssprangfunksjonen**[2]:

$$u(t)=\begin{cases} 0 & \text{for } t<0 \\ 1 & \text{for } t\geq 0\end{cases}$$



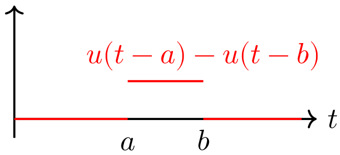
Denne kan du tenke på som en bryter som slår noe på ved tiden $t=0$. Vi kan slå på ved tiden $t=a$ istedet:

$$u(t-a)=\begin{cases} 0 & \text{for } t<a \\ 1 & \text{for } t\geq a,\end{cases}$$



eller slå på ved $t=a$ og av igjen ved $t=b$:

$$u(t-a)-u(t-b)=\begin{cases} 0 & \text{for } t<a \\ 1 & \text{for } a\leq t<b \\ 0 & \text{for } t\geq b.\end{cases}$$



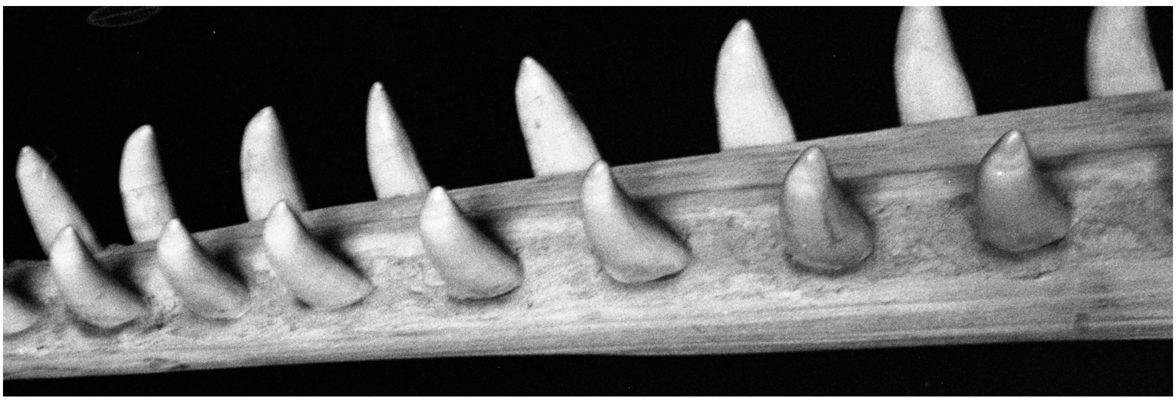
Løs initialverdiproblemene og plott. Bruk oppg. 2 og $x(t-t_0)$-trikset.

$\boxed{4}$ $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=u(t-1) \qquad x(0)=\dot{x}(0)=0$

$\boxed{5}$ $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=u(t-2) \qquad x(0)=\dot{x}(0)=0$

$\boxed{6}$ $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=u(t-1)-u(t-2) \qquad x(0)=\dot{x}(0)=0.$

$\boxed{7}$ $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=u(t-1) \qquad x(0)=1 \qquad \dot{x}(0)=0$



[2] Også kalt "heavisidefunksjonen" etter Oliver Heaviside som introduserte den i elektroteknikken `https://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside`.

Så frekvensresponsen. Du vet at eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren:

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

og dette bør gi deg et ganske bra hint om den inhomogene løsningen til

$\boxed{8}$ $\ddot{x} + \dot{x} + x = e^{i\omega t}$.

Partiklulærløsningen i oppgaven over skrives gjerne

$$x_p(t) = \frac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1}e^{i\omega t} = H(i\omega)e^{i\omega t}$$

der

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{\text{det karakteristiske polynomet}}.$$

Egenverdien $H(i\omega)$ til egenvektoren $e^{i\omega t}$ er det de fleste ingeniører mener når de sier "frekvensresponsen". Funksjonen H kalles **systemfunksjonen** i elektroteknikk og **transferfunksjonen** eller **overføringsfunksjonen** i reguleringsteknikk og prosessteknikk. Materialteknikere kaller den **impedansen**. [3] Frekvensresponsen forteller noe om hvordan systemet reagerer på forskjellige frekvenser. Nå lurer du sikkert på hvorfor vi ikke bruker sinus eller cosinus når vi har lyst til å påtrykke en bestemt frekvens, og svaret at det kan vi, men da blir regningen mer knotete. Sinusfunksjonen er egenvektor til noen spesielle lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer, men eksponensialfunksjonen er egenvektor til *alle* lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer, og derfor er den mer praktis i bruk. Hvis du på død og liv vil bruke cosinus istedet for eksponensialfunksjonen kan du det, men da er det best å utnytte systemfunksjonen.

$\boxed{9}$ Løs $\ddot{x} + \dot{x} + x = \cos \omega t$.

Man får mye informasjon om et system ved å se hvordan det reagerer når man sender gjennom sinusoidale påtrykk. I akustikk, elektro, impedansspektroskopi og en del andre anvendelser er det frekvensresponsen som råder grunnen. Moderne musikkteknologi er utenkelig uten frekvensrespons. På femtitallet da frekvensanalysen var rykende fersk, var frekvensresponsen også viktig i prosessteknikk; man analyserte prosessanlegg ved å påtrykke forskjellige frekvenser og studere responsen. [4]

$\boxed{10}$ Litt av greia med frekvenspåtrykk, er at for noen frekvenser kan systemet gå til helvete. Dette kalles **resonans**, og hvis du var en sånn rampegutt som spilte elgitar i rockeband eller likte å løpe frem og tilbake på fergedekket for å få fergen til å vagge bortover fjorden vet du hva det går i. Løs

$$\ddot{x} + x = \cos \omega t.$$

Hva skjer når $\omega = 1$?
(Hint: Frekvensresponsen bryter sammen når $\omega = 1$, og partikulærløsningen blir istedet $x_p(t) = Ct \sin t$. Plott denne, så ser du.)

[3] Alle bruker den til mange forskjellige ting:

- `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8512860/`
- `https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/frequency-response-curve`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer_function`

[4] Nå om dagen er det visst sprangresponsen som gjelder; man en kran og ser hva som skjer.

Impulsresponsen kan du håndtere med de verktøyene du har dersom du er child prodigy i fysikk. Vi andre må ta til takke med noe som kalles **laplacetransform**. For å skjønne hvem Pierre-Simon Laplace var, må vi gjennom fysikkens historie på tretti sekunder.

Planetene går som kjent i bane rundt solen og ikke omvendt. Den første som foreslo denne sprø ideen var Aristarkhos av Samos. [5] Han ble selvfølgelig ikke tatt seriøst, og ideen lå død frem til Kopernikus. [6] Av en annen merkelig grunn la ikke den katolske kirke merke til dette blasfemiet før Galileo Galilei bygget det første refraksjonsteleskopet og oppdaget at Jupiter hadde måner. [7] Omtrent samtidig satt Tycho Brahe på en øy og festet og drakk og bygget presise måleinstrumenter og tabulerte planetenes gang nøye nok til at Johannes Kepler kunne formulere planetlovene. [8] Kepler trodde naturligvis også at planetene gikk rundt solen, men gudfryktig som han var [9] slapp han unna med det. Keplers planetlover følger av Newtons gravitasjonslov [10] og vips så kjente menneskeheten til en kvantitativ mekanisme for store legemers bevegelse i verdensrommet, ihvertfall i god avstand fra ting som er tunge nok til å merkbart bøye av lyset. [11]

Pierre-Simon Laplace [12] gikk noen knepp lengre enn Newton og fant ut av slike ting som hvorfor tidevannsbølgen på jordoverflaten har to bølgetopper og ikke bare én, og hvorfor Jupiters bane skrumper mens Saturns vokser. [13] Laplace regnes som en av de største vitenskapsmenn som har levd, og vi kan takke ham for mye forskjellig. De fire viktigste er:

- sannsynlighetsregning og statistikk
- partielle differensiallikninger
- **Den ensidige laplacetransformen**:

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

- uttrykket "vi ser lett at..." som man slenger opp foran et utsagn når man ikke helt husker hvorfor utsagnet er sant eller hvordan resonnementet gikk

Resten av denne økten skal handle om laplacetransform. Dette er et merkverdig men nyttig redskap. Jeg liker bedre det mer norske ordet "omvending" en "transform", men "laplacetransform" er så innarbeidet at man får kjeft om man sier noe annet. (Jeg har prøvd.)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Aristarchus_of_Samos
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
[9] Kepler var visst fæl til å blande vitenskapelige og teologiske resonnementer. Han hadde noen teorier om at det var engler som fór rundt og skjøv på planetene.
[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Vulcan_(hypothetical_planet)
[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
[13] Euler prøvde visst på dette problemet uten hell. Det skyldes resonans; Jupiter går fem ganger rundt solen omtrent like fort som Saturn går to, og dette fører til at banene skrumper og vokser med en periode på 929 år. Samme resonans forekommer andre steder i solsystemet, for eksempel blant Jupiters galileiske måner; Ganymedes går rundt en gang i uken, Europa dobbelt så fort, og Io fire ganger så fort. Om noen milliarder år kommer Callisto antagelig til å bruke to uker rundt.
https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_resonance

Laplacetransform er et av mange mange eksempler på noe som kalles **integraltransform**. Dette er redskaper som er nyttige for så mangt, men de fremstår som litt trukket ut av hatten om man ikke er vant til dem. Vi bruker laplacetransform til å løse initialverdiproblemer. Parameteren s er et komplekst tall, og laplacetransformen er en lineæroperator som tar inn en funksjon av t og gir ut en korresponderende funksjon av s; vi skriver derfor enten $\mathcal{L}(x)$ eller $X(s)$ alt etter kontekst. [14]

$\boxed{11}$ Finn laplacetransformen til $x(t) = e^{at}$, der a er en konstant.
(Hint: Du må anta at realdelen til s er større enn a, slik at integralet konvergerer.)

For at vi raskt skal skjønne hvordan laplacetransform kan brukes til å løse differensiallikninger, skal vi umiddelbart utlede en viktig regneregel.

$\boxed{12}$ Vis at

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$$

(Hint: Anta at realdelen til s er større enn null og ta en delvis integrasjon.)

Siden laplacetransform er en lineæroperator, kommer det kanskje ikke som et sjokk at den kan brukes på lineære differensiallikninger. La oss begynne med initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \qquad x(0) = 1$$

som har løsning $x(t) = e^{-at}$.

$\boxed{13}$ Ta laplacetransform på begge sider av differensiallikningen, løs for $X(s)$, og se på oppgave 1.

Nøkkelen til suksessen ligger i relasjonen fra oppgave 2. Det er denne og lineariteten som lar oss skrive differensiallikningen om til en algebraisk likning som er triviell å løse. Det vanligste er å bruke tabell for å invertere laplacetransform, og da må vi kjenne til en haug med laplacetransformer, slik at vi vet hva som korresponderer til hva. [15] Du finner en kjempetabell appendiks i B i Balchens regtekklassiker, som ligger gratis her:
`https://folk.ntnu.no/tronda`

Hvis du vil løse høyere ordens differensiallikninger, må du ha en derivasjonsregel til.

$\boxed{14}$ Vis at

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

(Hint: Bruk den forrige derivasjonsregelen to ganger.)

Denne derivasjonsformelen kan generaliseres til høyere ordens deriverte, men den trenger du antageligvis ikke. På høyere ordens systemer må man uansett til med numeriske metoder. [16]

La oss nå regne ut et par laplacetransformer og løse noen flere differensiallikninger. Finn X dersom (og husk å gjøre antagelser på s slik at livet smiler)

[14] Det er en dårlig vane å skrive $\mathcal{L}(x(t))$, for $x(t)$ er et tall, altså funksjonsverdien til funksjonen x i t.

[15] Det finnes en inversformel for laplacetransform:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} X(s)e^{st}\, ds$$

men denne er for det første for komplisert for oss inneværende semester, og for det andre først og fremst av teoretisk interesse.

[16] Eller Diana: `https://snl.no/DIANA_-_datamaskin`

$\boxed{15}$ $x(t) = \cos t$ $\boxed{16}$ $x(t) = \sin t$

og bruk laplacetransform til å løse initialverdiproblemene

$\boxed{18}$ $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ $x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{19}$ $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 1$

$\boxed{20}$ $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0$ $x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = 0$

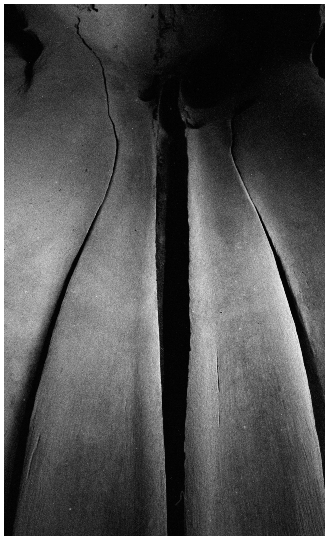
$\boxed{21}$ $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \cos t$ $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{22}$ $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin t$ $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{24}$ $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t}$ $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{25}$ $\ddot{x}(t) + x(t) = \cos t$ $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{26}$ $\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}$ $x(0) = 1$



I oppgave 26 trenger du et triks du ikke kommer til å få så veldig mye bruk for, men oppgavene illustrerer et interessant poeng om resonans. Dette er noe som skjer dersom man påtrykker et signal som også er en homogen løsning. På folkemunne sier man gjerne at man påtrykker med resonansfrekvensen til systemet. Det er omtrent dette som skjer når du får fergen til å krenge ved å løpe frem og tilbake på dekk, eller når det feeder i mikrofonen.

$\boxed{27}$ La $y(t) = tx(t)$. Vis at

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}X(s)$$

og løs systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \qquad\qquad - x_2(t)\end{aligned}$$

med initialkrav $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

$\boxed{28}$ Du kan også prøve oppgave 26 på nytt.

La oss samle opp noen flere triks. Det finnes mange triks, men jeg har prøvd å plukke ut ting dere kan få bruk for, basert på de klassiske responsene. Her er en regel, t-skift:

$\boxed{29}$ Finn laplacetransformen til $u(t-a)$, og vis at dersom $y(t) = x(t-a)u(t-a)$ er

$$Y(s) = e^{-as}X(s)$$

og skisser x og y. Prøv oppgave 4-7 igjen og sjekk at du får samme svar.

Den neste regelen kalles s-skift.

$\boxed{31}$ La $y(t) = e^{at}x(t)$, og vis at $Y(s) = X(s-a)$.

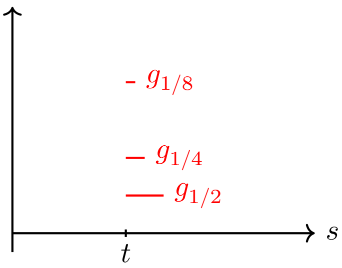
$\boxed{32}$ Regn ut laplacetransformene til $e^{\alpha t}\cos\omega t$ og $e^{\alpha t}\sin\omega t$ og prøv oppgave 20 på nytt.

Nå kan vi prøve oss på impulsresponsen. La

$$g_k(s) = \begin{cases} 1/k & \text{for } 0 < s < k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \to 0} g_k(t)$$



33 Man tenker på diracpulsen som noe som plukker ut funksjonsverdier fra integraler. Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(x-s)\, ds = f(x).$$

Diracpulsen brukes til å modellere impuls, altså energitilførsler der den påtrykte kraften er ekstremt høy og ekstremt kortvarig, som for eksempel ved hammerslag eller høye smell. [17] For unge mennesker pleier diracpulsen å bli introdusert slik:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

men dette er både meningsløst og forvirrende, for definisjonen forteller deg ingenting om hvordan du skal oppføre deg når du ser diracpulsen i en differensiallikning. Det er mye bedre å tenke slik: Dersom f er massetettheten til et endimensjonalt objekt, er

$$\int_a^b f(s)\, ds = \text{massen til objektet mellom } a \text{ og } b$$

og diracpulsen er bare en snedig måte å matematisk plassere et enkilos fiskelodd i punktet t:

$$\int_a^b \delta(t-s)\, ds = \begin{cases} 1 & a \le t \le b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

34 Finn laplacetransformen til diracpulsen.

Diracpulsen gir kun mening når den opptrer under integraltegn og er et eksempel på noe som kalles en distribusjon. Dette er litt for komplisert for oss, men jeg kan trøste deg med at diracpulsen ble oppfunnet av en fysiker, Paul Dirac. [18] Det var ingen som tok diracpulsen seriøst til å begynne med, men Dirac fikk til slutt fikk nobelprisen i 1933 for sitt arbeid med kvantemekanikk, sammen med med Erwin Schrödinger. [19] Løs initialverdiproblemene

35 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0$

36 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-2) \quad x(0) = 0$

37 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2) \quad x(0) = 0$

38 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0.$

39 $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t) \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$

40 $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0 + 1/m$

[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

[19] Dirac var ganske fåmælt. Etter ham har vi en måleenhet for talestrøm: en dirac = ett ord per time

LITT REPETISJON AV DELBRØKSOPPSPALTNING

Hvis du ikke husker delbrøksoppspalting, kommer det en repetisjon her. Dette er en litt kjedelig teknikk for å splitte rasjonale funksjoner, altså funskjoner på formen

$$f = \frac{q}{p}$$

der q og p er polynomer. Det er vanlig å anta at q har lavere grad enn p. Hvis det ikke er tilfelle, er det bare å bruke polynomdivisjon og skrive

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{p(x)}$$

der s har lavere grad enn p. Polynomet r er trivielt å integrere, så vi kan konsentrere oss om brøken. La oss begynne med noe enkelt. For eksempel husker alle barn i barnehagen at

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

Hvordan finner vi ut dette om vi ikke vet det? Vel, først kan vi skrive $x^2 - x = x(x-1)$, og så kan man huske at det går an å skrive

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x}.$$

Dersom dette er korrekt måte å spalte på, vil det nå være mulig å beregne A og B. Har du bommet på formen, vil du få et likningssystem som ikke har løsning. Vi ganger opp med $x(x-1)$ og får

$$1 = Ax + B(x-1).$$

Siden to polynomer kun er like om de har samme koeffisienter på hver orden av x, er denne likningen kun sann dersom

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= \quad -B \end{aligned}$$

som gir $B = -1$ og $A = 1$ og

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

som forventet. Den generelle prosedyren er ikke vanskelig, men litt langdryg å forklare, så jeg tror jeg setter ut dette til Arnes bok, kapittel 3.10. I korte trekk kan du spalte repeterte røtter slik:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

for eksempel:

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Prøv å spalte

17 $\quad \dfrac{1}{x^2 - 4}$

18 $\quad \dfrac{1}{x^2(x-1)}$

19 $\quad \dfrac{1}{x^4 - 4x^2}$

UKENS NØTTER

Det er vanlig å kjøre laplacetransform rett på krets. Nå skal vi se på det.

$\boxed{1}$ Utled regnereglene

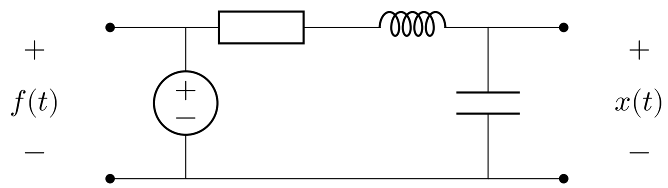
$$V = RI \qquad \text{og} \qquad V = \frac{I}{sC} \qquad \text{og} \qquad V = sLI$$

for motstand, spole og kondensator ved å laplacetransformere regnereglene deres.

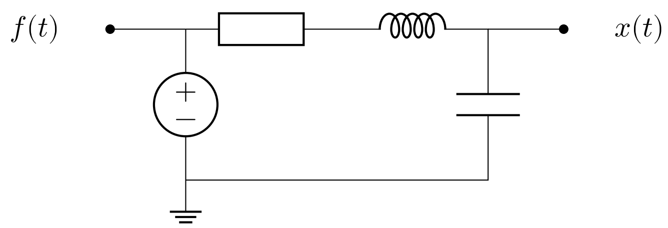
Siden Kirchhoffs spenningslov på RCL-krets gir en integro-differensiallikning, kan det være greit å ha en integrasjonsregel:

$\boxed{2}$ Vis at dersom $y(t) = \int_0^t x(u)\, du$, er $Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$.

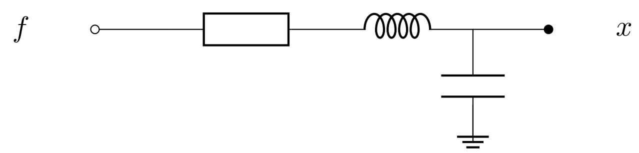
Man kan tegne RCL-filtre litt forskjellig. Du kan tegne sånn:



eller sånn:



eller sånn:



Vi kaller f **inngangen** og x **utgangen**. Du tenker at du kjører signalet f gjennom kretsen og så får du ut x. Borte på elektro er det vanligere å kalle inngangen for x og utgangen for y.

$\boxed{3}$ Vis at strømmen i kretsen over tilfredsstiller

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau)\, \mathrm{d}\tau = f(t)$$

og få likningen over i s-domenet ved å laplacetransformere den, og finn systemfunksjonen.

Dersom du setter spenningen over kondensatoren som ukjent, får du likningen

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = f.$$

Her er noen varianter av kretsen over med realistiske verdier på komponentene. Koble opp kretsene på brødbrettet, send inn forskjellige frekvenser ved å sette $f(t) = e^{i\omega t}$, bruk en oscillator til å måle, og sammenlikne med analytisk løsning.

$\boxed{4}$ $0.1\ddot{x} + 3000\dot{x} + 200000x = f$ $\boxed{5}$ $0.1\ddot{x} + 2000\dot{x} + 200000x = f$ $\boxed{6}$ $0.1\ddot{x} + 100000x = f$

$\boxed{7}$ Finn systemfunksjonene til filtrene her:
`https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit#Filters`

$\boxed{8}$ La oss avslutte med litt skråttkast. La oss si at du kaster en ball fra origo med startfarten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og at ballen kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Dersom luftmotstanden antas å avhenge lineært med farten (dette er greit dersom farten er lav), blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -a\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -a\dot{x}_2 - mg \end{aligned}$$

der m er massen til ballen, a er proporsjonalitetskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen. Løs med laplace og og plot ballens trajektorie. Løs også systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t) - mg \end{aligned}$$

UKENS LIFE HACK

Hvis du synes det er vanskelig å huske regnereglene for laplacetransform, kan det være det er bedre å gå seg en tur enn å binge netflix:
`https://www.scientificamerican.com/article/humans-evolved-to-exercise/`