1 - 9 - INTEGRALET I

Denne uken leser vi kapittel 3 i Arnes bok, men noen delkapitler er litt viktigere enn andre. For eksempel antar jeg at du allerede kan

- 3.1
- 3.3
- 3.4
- 3.5
- 3.6
- 3.9
- 3.10
- 3.15

fra skolen. Noen av de andre kapitlene, slik som 3.7 og 3.8 er i samme ånden, men kanskje litt for hårete for R2, og handler om antiderivasjonsteknikker ingen av dere kommer til å bruke på jobb.

Kapittel 3.2 antar jeg derimot at de fleste ikke har brukt så mye tid på før, men dette kapitlet er mye viktigere enn alle antiderivasjonsreglene, for det du trenger for å forstå alle de fysiske modellene du skal lære de neste fem årene, er *hva integralet er*. Integralet er nemlig mye mye mer enn bare "arealet under grafen".

Derfor er det mange som synes integralet er litt knotete å lære seg. Vi skal bruke mest tid på tingene som står i kapittel 3.2 og 3.12-14, så du kan trygt lese disse kapitlene.

Integralet får en mer og mer fremtedende plass i livet etterhvert som man blir eldre. Antiderivasjon, derimot, blir mindre og mindre viktig. La oss allikevel repetere de viktigste antiderivasjonstrikse fra videregående skole - vi kommer til å bruke dem jevnt og trutt. Først noen arealklassikere som Arkimedes fant ut av allerede 250 BC. Finn arealet avgrenset av

$\boxed{-17}$ $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$.

$\boxed{-16}$ $y = x^2$, $y = 1$ og $x = 0$.

Andre klassikere er de der man bare må skrive om integranden litt. Regn ut

$\boxed{-15}$ $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4}\, dx$

$\boxed{-14}$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\, dx$

$\boxed{-13}$ Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse.

Et annet klassisk triks, er kjerneregelen. Den utledes ved å antiderivere kjerneregelen for derivasjon. Den deriverte av $-x^2$ er $-2x$, så vi gjør slik:

$$\int 3xe^{-x^2}\, dx = 3\int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}\int -2xe^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden er komplisert, kan det være lurt å utføre dette trikset som variabelsubstitusjon, men dette blir en meningsløs oppskrift om man ikke skjønner at det er kjerneregelen som ligger i bånn:

$$\int 3xe^{-x^2}\, dx = -\frac{3}{2}\int e^u\, du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Regn ut

$\boxed{-12}$ $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}\, dx$

$\boxed{-11}$ $\displaystyle\int e^x\sqrt{1 + e^x}\, dx$

$\boxed{-10}$ $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$

$\boxed{-9}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx$

$\boxed{-8}$ Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

Formelen for delvis integrasjon er bare den antideriverte av produktformelen for derivasjon:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

$\boxed{-7}$ Finn $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos x\, dx$ med delvis integrasjon. Hvis du husker Eulers formel blir den enda lettere.

Så har vi **uegentlige integraler**. Dette er integraler der den ene integrasjonsgrensen er ∞ eller integranden blåser opp et eller annet sted i integrasjonsområdet, for eksempel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = 1 \qquad \text{eller} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$$

Beregn

$\boxed{-6}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$

$\boxed{-5}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$

$\boxed{-4}$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$\boxed{-3}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

$\boxed{-2}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

$\boxed{-1}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

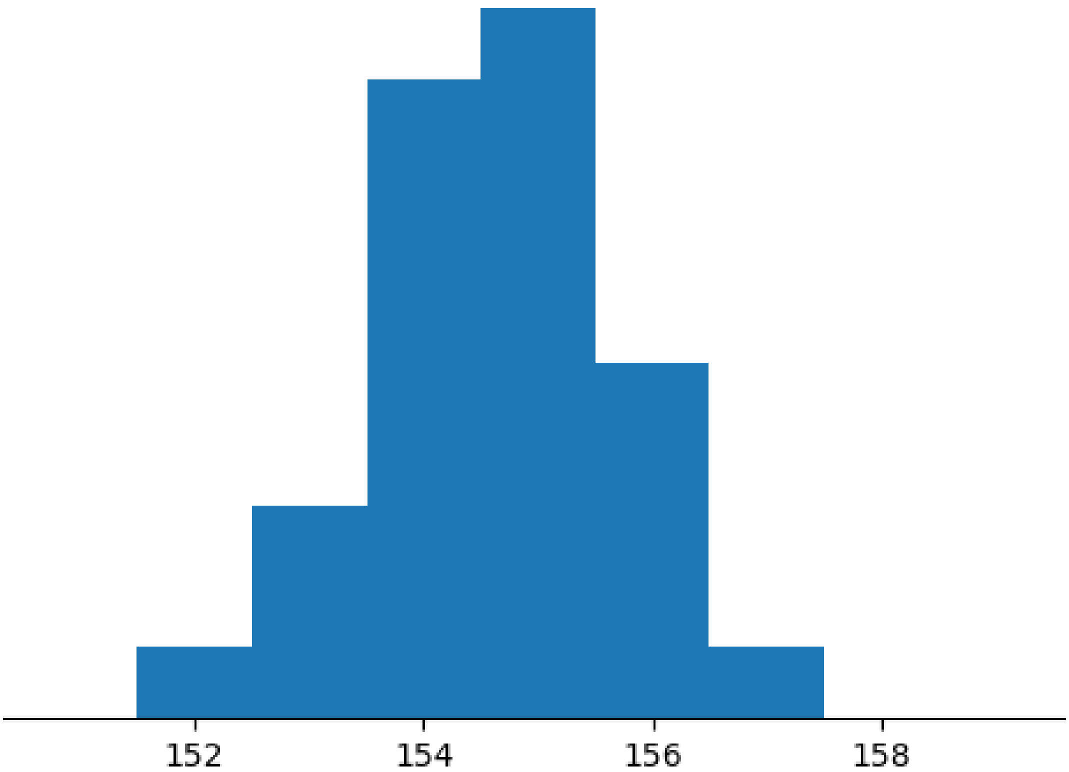
Nå skal vi videre med selve integralet. Målet med vitenskap er som sagt prediksjon - under gitte forutsetninger ønsker vi å være så sikker som mulig på hva som kommer til å skje. Men av og til plages vi, selv i verdens rikeste land, av *tings iboende uforutsigbarhet*. Dette kan skyldes forskjellige ting, for eksempel manglende kunnskap om grunnleggende mekanismer, slik som for mange kjemiske reaksjoner i kroppen din, eller Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, som sier at det ikke er mulig å kjenne en liten partikkels posisjon dersom du kjenner dens bevegelsesmengde. Eller det kan være mer mundant, slik som at hvis du skal bygge kai og har bestilt sekstoms bord, så er de nok ikke nøyaktig 152.4 mm, men kanskje alt mellom 152mm og 157mm. I slike tilfeller må vi til med **sannsynlighetsregning**.

1	154
2	154
3	153
4	156
5	155
6	153
7	154
8	155
9	153
10	154
11	155
12	155
13	154
14	156
15	155
16	154
17	155
18	154
19	154
20	156
21	155
22	154
23	155
24	157
25	152
26	155
27	156
28	155
29	156

$\boxed{0}$ Jeg fiksa kaien til svigers i sommer, og målte den faktiske bredden (til nærmeste millimeter) på alle de tjueni sekstomsbordene som var bestilt. Gjennomsnittsbredden var $\mu = 154.6$ mm, og det empiriske standardavviket på $\sigma = 1.1$ mm.[a] Plott funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

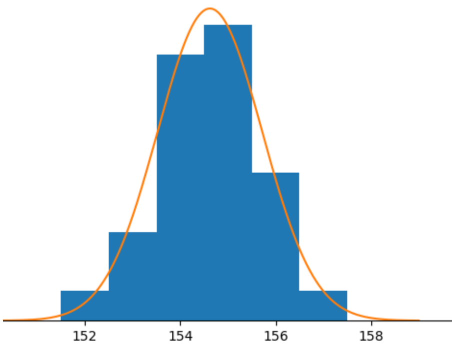
oppå histogrammet over relative frekvenser, altså antall bord av hver lengde delt på totalt antall bord.
(Du finner dataene som .csv-fil her: `https://folk.ntnu.no/mortano/python/kai`.)



[a]`https://tma4245.math.ntnu.no/deskriptiv-statistikk/`

Hvis du gjorde oppgaven over riktig, fikk du et plot som så omtrent ut som det til høyre. Kurven f kalles **normalfordelingskurven**,[a] og er et eksempel på noe som kalles **sannsynlighetstetthetsfunksjon**.[b] Dette kommer for fullt rett etter jul i et fag som heter TMA4245. For oss er det nok å vite at man finner sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution
[b] https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function

Uttrykket $P(a < X < b)$ leses som "sannsynligheten for at du trekker noe mellom a og b", og du kan tenke på det som sannsynligheten for å trekke et bord med en lengde i intervallet $[a, b]$ dersom du trekker et tilfeldig bord av stabelen.

Dersom $\mu = 0$ og $\sigma = 1$, får vi **standardnormalfordelingen**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Dette er den man stort sett bruker. Vi er opptatt av den på grunn av følgende oppgave.

$\boxed{1}$ Prøv å finne arealet under standardnormalfordelingskurven mellom $x = 0$ og $x = 1$.

På videregående skole trener man på antiderivasjonstriks til man blir grønn i fjeset. Men du kan trene et helt liv på antiderivasjon og fremdeles komme til kort; i mange faktiske anvendelser er det umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Standardnormalfordelingen har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en enkel måte, og tilforlatelige funksjonsuttrykk kan ha så kompliserte antideriverte at kun wolframalpha får det til:

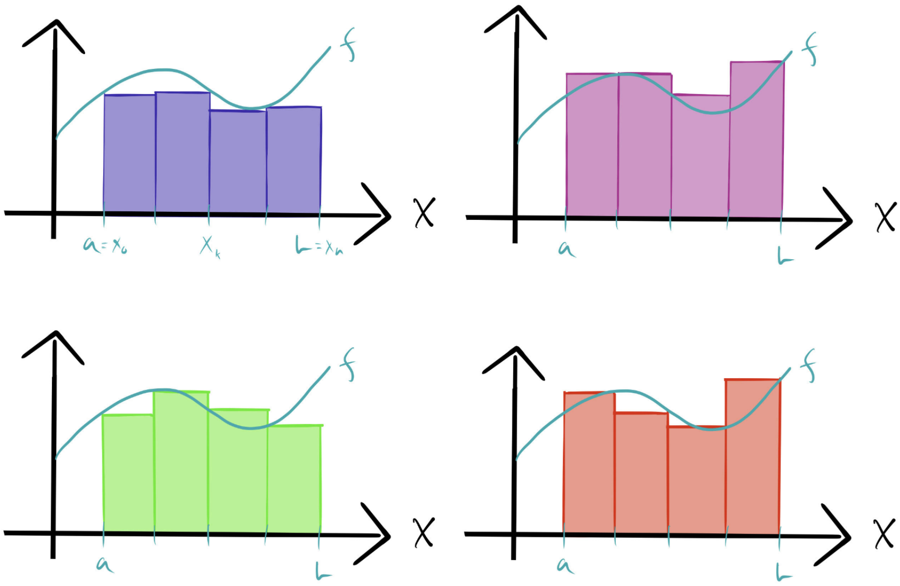
$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\,dx = \\
&-\Bigg(\Bigg(\log(\cos(x)) \Bigg(2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)+\log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\right)\Bigg) + \text{constant}
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ Finn ut hva en riemannsum er i Arnes bok (kapittel 3.2), og løs forrige oppgave med en slik.

En **partisjon** av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i, der $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Hvis avstanden mellom delingspunktene er den samme overalt, sier vi at partisjonen er **jevn**. Punktene er da gitt ved formelen

$$x_k = a + hk$$

der $h = \frac{b-a}{n}$ kalles **gitterfinheten**. En **riemannsum** er et histogram, der histogramhøyden er funksjonshøyden ett eller annet sted på intervallene i partisjonen. Det finnes flere typer riemannsummer, alt etter hvor på intervallene man setter histogramhøyden.[1]



Hvis man skal definere integralet presist, er man mest opptatt maksimums- og minimumsverdiene til f på hvert intervall. Er man bare ute etter arealet under grafen, er det mest praktisk med endepunktene på hvert intervall. Disse kalles henholdsvis, øvre, nedre, høyre og venstre riemannsum.

$\boxed{3}$ Hva er hva i figuren over?

Skal du forstå integralet, må du nesten forstå riemannsummer. Dette virker litt corny i begynnelsen, men i fysikk er det mange konsepter som er definert ved integraler, og for å forstå disse er det mye mye viktigere å forstå hva integralet er enn å ha svart belte i antiderivasjon.

$\boxed{4}$ Les litt mer om normalfordelingen, for eksempel i kapittel 5 her (gratis på gløsnettet):
`https://link.springer.com/book/10.1007/1-84628-168-7`
og skriv en pythonkode som tar inn a og b og returnerer $P(a < Z < b)$ ved riemannsummer. (Z istedet for X betyr at vi snakker om standardnormalfordelingen.)

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum`

I denne økten har jeg ambisjon om at du skal få med deg én ting: *Arealet under kurven kan fint beregnes på andre måter enn ved antiderivasjon.* Det finnes mange viktige sannsynlighetsfordelinger som ikke kan antideriveres. Her er noen eksempler. Planckfordelingen

$$I(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

forteller noe som strålingsintensiteten for hver frekvens fra et svart legeme, og Maxwell-Boltzmann-fordelingen

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

forteller noe om fordelingen av hastighetene til partikler i en gasstank (noen partikler har høy fart, mens andre har lav fart).[2] Når du teller forskjeller i ACGT-sekvenser på kromosomenene dine trenger du noe som kalles betafordelingen.[3] Sannsynlighetsfordelinger dukker opp overalt i naturen.

$\boxed{5}$ Hva med $(1 + x^2)^{1/3}$ da, klarer du å antiderivere den?

Det finnes mer effektive måter å beregne arealet under kurven på enn høyre og venstre riemannsum. Det finnes en femte type riemannsum som ikke står i figuren over. Den kalles **midtpunktriemannsum**, og kjennetegnes som du sikkert skjønner av at man tar funksjonsverdien på midtpunktet i hvert delintervall i partisjonen.

$\boxed{6}$ Lag en ny versjon av koden fra oppgave 5 der du bruker midtpunktriemannsummen istedet for høyre eller venstre riemannsum. Test alt på

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx \approx 0.3413447460685429485852$$

og prøv forskjellige gitterfinheter. Ser du noe? Kan du forklare?

Tar du gjennomsnittet av høyre og venstre riemannsum får du noe som kalles **trapesmetoden**.[4]

$\boxed{7}$ Tegn opp og forklar hvorfor det heter “trapesmetoden”. Lag en ny versjon av koden fra oppgave 5 der du bruker trapesmetoden. Og test for forskjellige gitterfinheter. Hva ser du?

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule

En riemannsum er et histogram, og dersom f er integrerbar, går histogrammets totale areal mot integralet til f på $[a, b]$ når partisjonen blir finere. Integrerbarhet betyr bare at arealet under grafen er veldefinert; hvorvidt funksjonen er mulig å antiderivere, er irrelevant. Normalfordelingsfunksjonen e^{-x^2} er integrerbar selv om den ikke har noen pen antiderivert. En annen funksjon som ikke har noen pen antiderivert er sincfunksjonen. Denne er veldig veldig viktig i signalbehandling.[5]

$\boxed{8}$ Finn en tilnærming til

$$\int_0^{\pi} \text{sinc}(x)\, dx \approx 1.85193705196$$

ved å bruke både riemannsummer og trapesmetoden. [a] Sammenlikne nøyaktigheten mellom metodene når du bruker samme h.

[a] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function`

Hvis du sitter på en øde øy og trenger å finne arealet under en kurve til høy presisjon med penn og papir, kan du selvfølgelig bruke riemannsummer, men det finnes andre teknikker. [6] La oss se litt mer på **interpolasjon**. Hvis du har $n + 1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der $x_j \neq x_k$ for alle $j \neq k$, vil det alltid være mulig å finne et polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_k) = y_k$$

for $0 \leq k \leq n$. Disse likningene utgjør et $(n+1) \times (n+1)$-likningssystem for koeffisientene a_k:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}$$

kalt **vandermondesystemet**. La oss repetere litt fra forrige økt.

$\boxed{9}$ Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration`

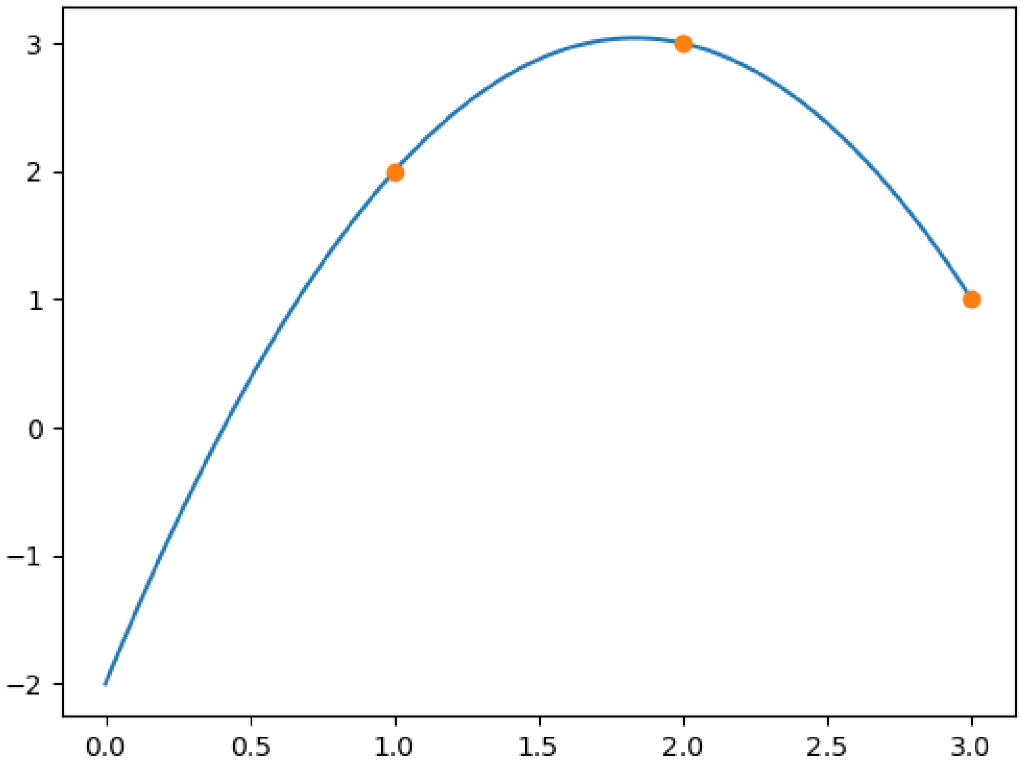
Dersom du skjønte hvordan oppgaven over skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp vandermondesystemet

$$\begin{aligned} a + \quad b + c &= 2 \\ 4a + 2a + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

hvis løsning gir oss polynomet

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 11x - 4\right).$$

som ser slik ut:



Men vi slipper faktisk å plages med all denne gaussingen av vandermondesystemet, for vi kan heller gjøre som følger. For hvert punkt x_k, definerer vi et polynom

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$\boxed{10}$ Sjekk at polynomet $l_k(x)$ har orden n, og at det tilfredsstiller

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = k \\ 0 & \text{for } m \neq k \end{cases}$$

Hvis du aksepterer oppgaven over, er det lett å se at

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

tilfredsstiller $p_n(x_k) = y_k$ for alle k. Polynomene l_k kalles **lagrangepolynomer**, og alt dette kalles **Lagranges interpolasjonsmetode**. Det er også ikke veldig vanskelig å se at det alltid finnes et entydig interpolasjonspolynom av maksimal grad n dersom $x_k \neq x_j$ for alle $k \neq j$. [7]

$\boxed{11}$ Finn et tredjegradspolyom som går gjennom punktene $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$ og $(3,2)$.

Lagrangepolynomene kan brukes til å finne en approksimasjon til

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Vi deler $[a,b]$ i et eller annet gitter med $a = x_0$ og $b = x_n$, og skriver

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\, dx$$

Integralene

$$w_k = \int_a^b l_k(x)\, dx$$

kalles **vektene** og er trivielle å beregne siden l_k er polynomer. Formelen

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

kalles en **kvadraturregel**.

$\boxed{12}$ Hvis du tar $n = 1$ i formelen over, får du en metode du allerede kan. Hvilken?

[7] Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer p_n og q_n av grad n som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen $p_n - q_n$ i punktene x_k, ser vi at

$$p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0 \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Polynomet $p - q$ har maksimal grad n, og kan maksimalt ha n nullpunkter, så derfor må $p = q$.

For $n = 1$ får man trapesregelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b))$$

Det finnes mange mange kvadraturregler, og vi har i bunn og grunn bare en ting å variere på, nemlig gitteret. For høyere presisjon kan vi skru opp n og variere på hvordan gitterpunktene er fordelt på $[a, b]$. Når partisjonen er jevn kalles det **Newton-Cotes-kvadratur**,[8] er gitteret er nullpunktene til chebyshevpolynomene, får du **clenshawcurtiskvadratur**,[9] og dersom det er nullpunktene til legendrepolynomene, får du **gausskvadratur**.[10] Newton-Cotes for $n = 2$ er for eksempel en klassiker og kalles Simpsons metode:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{b+a}{2}\right)+f(b)\right)$$

Dette er en veldig populær metode, spesielt på eksamen i et typisk førstesemesteremne i ingeniørmatematikk på universitet. (Jeg bryr meg ikke så mye om den; det finnes bedre metoder.)

$\boxed{13}$ Utled Simpsons metode ved å finne lagrangepolynomene til gitteret

$$\left\{a, \frac{a+b}{2}, b\right\}$$

og integrere dem.

$\boxed{14}$ Finn en integrasjonsrutine og beregn

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$$

til maskinpresisjon fortest mulig. Fordelen med å gjøre det i et ordentlig språk som C++, FORTRAN eller RUST, er at for-løkker går kjapt. RUST har også innebygget funksjonalitet for parallellisering.

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Cotes_formulas`

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Clenshaw-Curtis_quadrature`

[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature`

UKENS NØTTER

1 Den tekniske definisjonen på riemannintegralet er det tallet som er størrre enn eller lik alle nedre riemannsummer og mindre enn eller lik alle øvre riemannsummer. Dette tallet eksisterer ikke alltid. Et eksempel på en funksjon som faktisk ikke er integrerbar, er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Forklar hvorfor.

2 I mekanisk fysikk er de veldig opptatt av **skrått kast**. Hvis du skyter et prosjektil fra $(0, 0)$ med utgangshastighet

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

er spørsmålet hvor på x-aksen det kommer til å lande. Newtons andre lov ved fravær av luftmotstand gir likningene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 &= -g \end{aligned}$$

dersom massen settes til 1. Vis at prosjektilet lander i $x_1 = 2v_1v_2/g$.

3 Dersom du antar lineær lufmotstand, får du likningene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -r\dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 &= -g - r\dot{x}_2 \end{aligned}$$

Vis at prosjektilet lander i løsningen til likningen

$$0 = \left(\frac{g}{rv_1} + \frac{v_2}{v_2}\right)x - \frac{g}{r^2}\ln\left(\frac{v_1}{v_1 - rx}\right).$$

Hva vi gjør med slike håpløse likninger skal vi se i økt 1-11.

4 Dersom du antar prosjektilet går høyt og at lufmotstanden er proporsjonal med lufttettheten og at lufttettheten går som spådd fra modellen i oppgave 1-11, får du et likningssystem du ikke greier å løse analytisk. Utled dette. Hva vi gjør med slike håpløse difflikningssett skal vi se på i kommende uke.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Avgjør om integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\, dx$$

konvergerer eller divergerer.

$\boxed{2}$ Finn et tredjeordens polynom som går gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$. Skisser polynomet og punktene.

$\boxed{3}$ Siv har en kuleformet vanntank med radius R. På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.