1 - 8 - LINEÆRALGEBRA III

Velkommen til den tørreste uken i semesteret. Når vi balanserte reaksjonslikningen

$$x_1\mathrm{NO} + x_2\mathrm{O}_2 \to x_3\mathrm{NO}_2$$

endte vi opp med det lineære systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Løsningene kalles nullrommet til matrisen, og består av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

der s er en vilkårlig konstant. Når vi analyserte C-14-metoden, løste vi differensiallikningen

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = 0.$$

Løsningene til denne er nullrommet til differensialoperatoren

$$D(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) x = \dot{x} + \lambda x$$

og gitt ved alle funksjoner

$$x(t) = ce^{-\lambda t}$$

der c en vilkårlig konstant. Løsningene til

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

er nullrommet til differensialoperatoren

$$D(\mathbf{x}) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)\mathbf{x}$$

og gitt ved alle funksjoner på formen

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} + a_2 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Disse tre problemene er forskjellige, men har to viktige fellestrekk. Det ene likhetstrekket er at begge problemene er **lineære**,[1] og det andre er at mengden av alle løsninger danner et **vektorrom**.[2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_map
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space

Det finnes aksiomer for vektorrom. Disse er ikke så viktige for en ingeniør, men du finner dem i ukens nøtter om du er interessert. De fleste av dem handler om å formalisere reglene for vektorregning. Hvis du er en litt folkelig type, kan du tenke på et vektorrom som

Alle lineærkombinasjoner av en vektormengde.

Dersom vektorene i vektormengden er lineært uavhengige, kalles de en **basis**, og dersom basisen inneholder n vektorer sier vi at vektorrommet er n-**dimensjonalt**. For eksempel er det todimensjonale vektorrommet $\mathbb{R}^2$ mengden av alle lineærkombinasjoner på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektormengden

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

kalles **standardbasisen**, mens vektormengden

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^2$ som ikke har noe spesielt navn. Det finnes alltid mange basiser, og det går an å vise at to basiser for ett og samme vektorrom må ha like mange elementer.

$\boxed{1}$ Hvordan ser vi at vektormengdene over er basiser for $\mathbb{R}^2$? Er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

en basis for $\mathbb{R}^2$?

Det femdimensjonale $\mathbb{R}^5$ er mengden av alle lineærkombinasjoner på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Finn en annen basis for $\mathbb{R}^5$.

Det naturlig å lure på om en valgt vektormengde er en basis for et vektorrom.

$\boxed{3}$ Er kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en basis for noe? Hva med radene?

Kolonnnene i matrisen i oppgave 4 er lineært avhengige, og følgelig ikke en basis for noe som helst, men alle lineærkombinasjoner av dem er fremdeles et vektorrom. Vi sier at kolonnene **spenner ut et underrom** av $\mathbb{R}^4$. Et underrom av et vektorrom er en delmengde som i seg selv er et vektorrom, se ukens nøtter.

$\boxed{4}$ Kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

spenner også ut et underrom av $\mathbb{R}^4$. Hvor mange dimensjoner har dette underrommet?

Det er for øvrig slik at antallet lineært uavhenige rader og kolonner i en matrise alltid er det samme. Dette tallet kalles matrisens **rang**.[3]

$\boxed{5}$ Dobbeltsjekk at antall lineært uavhengige rader og kolonner er det samme for

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen? Finn rangen til alle matriser i økt 1-5 og 1-6.

Dersom en matrise A har dimensjon $m \times n$ og rang r, er **kolonnerommet** det r-dimensjonale underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene til A, altså alle vektorer på formen

$$A\mathbf{x}$$

der $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. **Nullrommet** er alle løsninger av

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og dette er et $n - r$-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{6}$ Finn basiser for kolonnerommet og nullrommet til matrisene i oppgave 4 og 5.

Alle egenvektorer til en egenverdi λ er ikke et vektorrom, for et vektorrom må alltid inneholde nullvektoren, og denne klassifiserer ikke som egenvektor. Men mengden av alle egenvektorene til λ og nullvektoren er et vektorrom som kalles **egenrommet** til λ.

$\boxed{7}$ Finn egenrommene til egenverdiene til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{8}$ Matrisen i oppgave 4 har en egenverdi som er null. Finn en basis for egenrommet til denne.

[3]text `https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra)`

En av grunnene til at vi må kunne lineær uavhengighet og ikke bare determinanter, er at det finnes andre eksempler på vektorrom enn $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$.

$\boxed{9}$ Hvor mange dimensjoner har løsningsrommet til differensiallikningen

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0?$$

Skriv opp to forskjellige basiser.

$\boxed{10}$ Hva med rommet av alle polynomer på formen

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \ ?$$

$\boxed{11}$ Hva med $\mathbb{C}$, er det et vektorrom?

$\boxed{12}$ Hvor mange dimensjoner har vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \quad ?$$

Hva med alt på formen $c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3$?

Dersom du har en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \mathbf{v}_n\}$ for et vektorrom og

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

kalles $c_1, c_2, \cdots, c_n$ **koordinatene** til $\mathbf{w}$. Koordinatskift er å bytte til en annen basis for det samme rommet. Du er vant til standardbasisen for $\mathbb{R}^n$, og i denne er vektene i lineærkomboen de tallene som står i søylevektoren.

$\boxed{13}$ Finn punktet $(3, 1)$ sine koordinater i basisen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hva er standardbasiskoordinatene til punktet $(1, 1)$ i denne basisen?

$\boxed{14}$ To basiser for løsningene til

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

er

$$\{e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\} \qquad \text{og} \qquad \{e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}\}.$$

Finn koordinatene til

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

i hver av dem.

Og så det andre vesentlige fellestrekket: *En lineæroperator T er en funksjon som tilfredsstiller*

$$T(a\mathbf{x} + a\mathbf{y}) = aT(\mathbf{x}) + bT(\mathbf{y})$$

for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ og alle skalarer a og b.

De enkleste modelleringsproblemene i anvendelser er som regel **lineære**. Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæroperator. Her er et par oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og beregn:

$\boxed{15}$ $A\mathbf{x}$ $\boxed{16}$ $A\mathbf{y}$ $\boxed{17}$ $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ $\boxed{18}$ $A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ $\boxed{19}$ $A(2\mathbf{x}+3\mathbf{y})$ $\boxed{20}$ $2A\mathbf{x}+3A\mathbf{y}$

Kjært barn har mange navn, og lineæroperator har et par synonymer, **lineærtransform**, **lineærtransformasjon** og **lineæravbildning**. Jeg har vendt meg til å si lineæroperator fordi det er det de fleste ikkematematikere sier. Du har brukt lineæroperatorer i mange år - derivasjonsoperatoren er for eksempel lineær. La

$$D(x) = \dot{x} \quad \text{og} \quad y(t) = t^2 \quad \text{og} \quad z(t) = t$$

og beregn

$\boxed{15}$ $\dot{y}$ $\boxed{16}$ $\dot{z}$ $\boxed{17}$ $\frac{d}{dt}(y+z)$ $\boxed{18}$ $\dot{y} + \dot{z}$ $\boxed{19}$ $\frac{d}{dt}(2y+3z)$ $\boxed{20}$ $2\dot{y} + 3\dot{z}$

$\boxed{21}$ Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

Det bestemte integralet er også en lineæroperator. La $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(t) = \sin t$$

og $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(t) = \cos(t/2)$$

og finn de bestemte integralene

$\boxed{15}$ $\int f$ $\boxed{16}$ $\int g$ $\boxed{17}$ $\int g + f$ $\boxed{18}$ $\int g + \int f$ $\boxed{19}$ $\int 2g + 3f$ $\boxed{20}$ $2\int g + 3\int f$

$\boxed{21}$ Fikk du deja vú nå? I så fall er du inne på noe.

Lineæroperatorer er **superposisjonsprinsippets**[4] mest vesentlige ingrediens. Linæeroperatorer er for superposisjonsprinsippet omtrent som kanel i en kanelbolle, humle i øl eller hele pepperkorn i fårikål. Kanelbolle er meningsløst uten kanel, men man merker kanelsmaken først når den uteblir. [5] Superposisjonsprinsippet kan formuleres omtrent som følger:

Dersom L er en lineæroperator og $Lx = f$ og $Ly = g$, er $L(x+y) = f + g$.

$\boxed{22}$ Dette prinsippet har vi allerede brukt ganske mye dette semesteret. Finn ut hvor.

[4]`https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle`

[5]Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

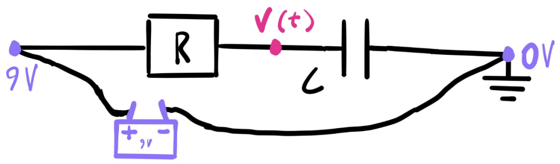
Vi sier at en differensiallikning er lineær dersom operatoren der du "putter inn løsningen" i likningen er lineær. For eksempel er $\dot{x} + \lambda x = 0$ en lineær likning siden

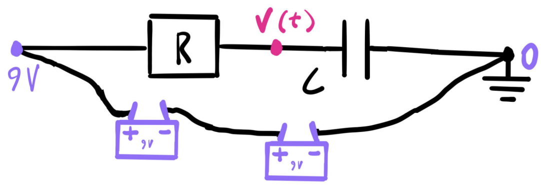
$$D(x) = \dot{x} + \lambda x = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) x$$

er en lineæroperator. Superposisjonsprinsippet sier at dersom

$$\dot{x} + \lambda x = f \qquad \text{og} \qquad \dot{y} + \lambda y = g \qquad \text{og} \qquad z = x + y \qquad \text{er} \qquad \dot{z} + \lambda z = f + g.$$

Så hva er den praktiske nytten? Her er to RC-kretser:





Differensiallikningen til den til venstre er

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{RC} v(t) = 9$$

med løsning

$$v(t) = 9\left(1 - e^{t/RC}\right)$$

gitt at $v(0) = 0$. I den til høyre er det koblet to batterier i serie, og ifølge Kirchhoff må vi løse

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9 + 9 = 18.$$

$\boxed{23}$ Anta $v(0) = 0$ og løs med superposisjonsprinsippet.

Har du skjønt at derivasjonsoperatoren er lineær, kan du også forstå hvorfor vi alltid gjetter på eksponensialfunksjonen når vi løser lineære differensiallikninger.

$\boxed{24}$ Finn egenvektorene til derivasjonsoperatoren $D(x) = \dot{x}$.

Systemet med å kombinere homogen og inhomogen løsning når vi løste differensiallikninger, går igjen i alle lineære problemer.

$\boxed{25}$ Løs

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right. \qquad \text{og} \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right.$$

Hva er homogen og hva er inhomogen løsning?

Trenger du flere oppgaver, er disse relevante:
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving05.pdf`
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving06.pdf`
Løsningsforslag finner du her:
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving05-lf.pdf`
`https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving06-lf.pdf`

Det finnes selvfølgelig aksiomer for vektorrom. De fleste av dem går med til å definere hvordan en lineærkombinasjon funker, og dette kan du i bunn og grunn allerede fra gymnaset. La $\mathbf{V}$ være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres og som er lukket under lineærkombinasjoner. Vi sier at mengden $\mathbf{V}$ er et vektorrom over $\mathbb{C}$ dersom følgende er tilfredsstilt for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{C}$. Du kan også ha vektorrom over $\mathbb{R}$, eller en hvilken som helst annen kropp.

Det skal finnes en vektor, kalt $\mathbf{0}$, slik at

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

Addisjonen skal være assosiativ

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

og kommutativ

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

og vektorer

$$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}.$$

Vi krever dessuten

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

og

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

En anonym mtelsys-student ble en gang i evalueringsskjema spurt om det var noe vedkommende skulle ønske vedkommende hadde lært mer om, og da uttrykte vedkommende:

"Vektor-rom. Trodde det var kjempe teit men det er faktisk ikke så dumt"

$\boxed{26}$ Vis at en delmengde av et vektorrom er et underrom hvis og bare hvis det er lukket under lineærkombinasjoner og inneholder nullvektoren.

$\boxed{27}$ Vis at to parallelle vektorer er en lineært avhengig vektormengde.

$\boxed{28}$ La $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ være et lineært likningssystem. Utgjør $\mathbf{x}$ et vektorrom?

$\boxed{29}$ Spis en teskje med kanel. Det er overraskende vanskelig.
(Og ikke så bra for leveren din: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cinnamon#Toxicity`)