1 - 7 - DIFFERENSIALLIKNINGER III

Laurinda Lie tror på homeopati, og hun har lest at mot migrene er det lurt å drikke vann som har vært varmet opp og nedkjølt av en klump med *spesiell homeopatisk masse*. Laurentius Lie tror på mye rart, men ikke på homeopati. Han er imidlertid en grei fyr, og går med på å regne ut når det homeopatiske vannet har en passelig drikketemperatur.

Den varme homeopatiske klumpen varmes opp og senkes så i et vannbad ute på verandaen, der det er null grader. I den homeopatiske tradisjon ristes alltid vannet på en nøye spesifisert måte, og dette sørger for perfekt blanding. Hvis vi antar Newtons avkjølingslov, får vi differensiallikningene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 (x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)\end{aligned}$$

der x_1 er temperaturen i klumpen, x_2 er temperaturen i vannet, α_1 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og den homeopatiske klumpen og α_2 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen.

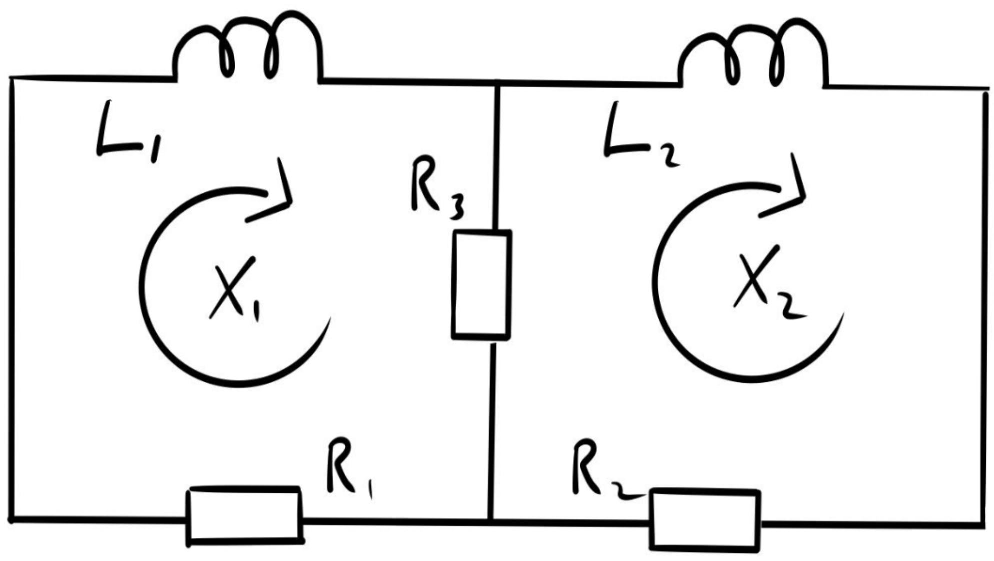
$\boxed{1}$ Høyresiden i dette likningssystemet er et matriseprodukt på formen $A\mathbf{x}$. Finn A.

Dersom du bruker Kirchhoffs spenningslov på sløyfene i kretsen under, får du

$$\dot{x}_1 = \Big(-(R_1 + R_3)\,x_1 + R_3 x_2\Big)/L_1$$

$$\dot{x}_2 = \Big(R_2 x_1 - (R_2 + R_3)\,x_2\Big)/L_2$$

$\boxed{2}$ Høyresiden i dette likningssystemet er et også matriseprodukt på formen $A\mathbf{x}$. Finn A.



Nå skal vi blande sammen lineæralgebra og differensiallikninger. Systemene på forrige side ser grisete ut, men det finnes en systematisk løsningsteknikk. La oss sette $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ eller $L_1 = L_2 = 1$, $R_2 = R_3 = 1$ og $R_1 = 0$, slik at vi får et litt håndterlig system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Dette kalles et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**. Det første vi må gjøre, er å sortere den ukjente i en søylevektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

slik at likningsystemet blir

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle differensiallikninger vi har løst til nå, har vi løst med eksponensialfunksjonen, så la oss prøve gjetningene $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ og $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{c} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og se hva som skjer. Setter vi $\mathbf{x}$ inn i systemet, får vi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den ene siden og

$$A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den andre. Setter vi disse lik hverandre og deler ut $e^{\lambda t}$ som vi pleier, får vi

$$\lambda\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\lambda\mathbf{c} = A\mathbf{c}$$

om du vil. Med andre ord må $\mathbf{c}$ være en av A sine egenvektorer og λ den korresponderende egenverdien om $\mathbf{x}$ som foreslått skal være en løsning.

$\boxed{3}$ Finn alle løsningene til systemet. Hvor mange forventer du?

Regna du riktig på oppgave 3, fikk du løsningene

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} + a_2 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nå går det an å vise at dette er alle løsninger du noensinne kommmer til å finne, men det er nok litt i tidligste laget for oss. Det var kanskje litt uheldig for din kognitive last at det første differensiallikningssystemet du løste hadde så grisete tall, så la oss prøve noen litt penere.

$\boxed{4}$ Finn alle løsninger til systemene

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_1 + 2z_2 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_2 &= 2z_1 + 6z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_3 &= 2z_1 + 2z_2 + 6z_3 \end{aligned}$$

Det siste systemet over er valgt med omhu - den ene egenverdiene er null, og da er det trivielt å beregne egenverdiene til matrisen. Generelt er det ikke er trivielt å faktorisere et tredjegradspolynom. Eller jo, det er "trivielt" i den forstand at det finnes en formel,[1] men det er ikke trivielt å huske formelen. Lars Onsager[2] greide visst å utlede den på egenhånd da han var tolv år gammel.

$\boxed{5}$ Du kan prøve deg på

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 2z_1 + z_2 + z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_1 + 2z_2 + z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_1 + z_2 + 2z_3 \end{aligned}$$

Bruk np.linalg.eig om du ikke greier å faktorisere det karakteristiske polynomet.

$\boxed{6}$ Litt mengdetrening er sikkert bra. Løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ der A er matrisene i 10-25 i forrige økt.

Vi kan også minnes Jens Balchen.[3] Borte på ITK holder de balchenmesse hver fredag (de ofrer en hummer på et spesielt alter inne på lunsjrommet), og noen av de ansatte har relikvier etter ham på kontorene sine. Han høres grei ut i Aftenposten, men høsten 1982 gikk visst studentene i fakkeltog rundt huset hans i protest mot en legendarisk vanskelig regtekeksamen.

> « Ingen mennesker er tjent med å gjøre slavearbeid. Det er ikke interessant, det er slitsomt og betalingen er lav […] Det arbeide som vi kan si ikke er menneskeverdig, det bør automatiseres vekk. »
>
> Jens Balchen i et intervju i *Aftenposten*, 8. januar 1966

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation#General_cubic_formula
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lars_Onsager
[3] https://www.ntnu.no/itk/om/historie/balchen/minneord

På den siste siden skal vi ta med oss litt ymse. I alle løsningene du fant over (hvis du gjorde det riktig), satt det noen ubestemte konstanter. Disse kan bestemmes ved å spesifisere initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

der $\mathbf{x}_0$ er en konstant vektor.

$\boxed{7}$ Prøv noen forskjellige initialkrav på oppgave 4 og 5. Du kan løse 2×2-systemet med $\mathbf{x}(0)$ lik

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og 3×3-systemene med $\mathbf{x}(0)$ lik

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Av og til kan man støte på ymse problemer. Her er ett av dem:

$\boxed{8}$ Prøv å løse

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phantom{x_1 + {}} x_2 \end{aligned}$$

med initialkrav $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 1$.

Og her er et annet:

$\boxed{9}$ Den homeopatiske klumpen skal varmes opp til 88 grader celsius,[4] og så senkes i vann fra springen, som holder 4 grader. Når får vannet en passelig drikketemperatur på 13 grader?

Dersom en $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ har n lineært uavhengige egenvektorer sier vi at A er **diagonaliserbar**. Dette er fordi det i så fall er mulig å skrive

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

der V har egenvektorene som kolonner og Λ er diagonal.

$\boxed{10}$ Vis dette.

Det går ellers an å takle likningen $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ som et system. Vi lager noen nye variable:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x(t) \\ z_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Hvis du nå aksepterer at vi kan skrive

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix}$$

går det an å skrive $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ på formen

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}.$$

$\boxed{11}$ Hva blir A? Hva er A sitt karakteristiske polynom? Er A diagonaliserbar? Skriv om oppgave 2-5 i økt 1-3 til systemer og løs.

[4] Homeopatiens grunnlegger Samuel Hahnemann ble nemlig 88 år gammel:
https://en.wikipedia.org/wiki/Samuel_Hahnemann

UKENS NØTTER

Boolsk algebra er en algebraisk struktur som brukes til å modellere oppførselen til datamaskinen din. En boolsk algebra har minst to elementer, og to operasjoner, $+$ og $\cdot$, og følgende aksiomer:

1 $x + y = y + x$.

2 Det finnes et elelement 0 slik at $0 + x = x$.

3 For hver x finnes y slik at $x + y = 1$.

4 $x \cdot y = y \cdot x$.

5 Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x$.

6 For hver x finnes y slik at $x \cdot y = 0$.

7 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

8 $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Ved første øyekast kan aksiomene likne på aksiomene for kropp, men det er en noen ting som oppfører seg helt annerledes. Vi har **komplement** (aksiom 3 og 6) istedet for invers, og assosiatitivitet er ikke med fordi det kan utledes av de andre aksiomene. Distributivitet kommer i to varianter, ikke bare i én som vi er vant til fra kropp. Regnereglene blir nå helt annerledes, Utled

$\boxed{1}$ $x + x = x$ $\boxed{2}$ $xx = x$. $\boxed{3}$ $x + 1 = 1$. $\boxed{4}$ $x \cdot 0 = 0$. $\boxed{5}$ assosiativitet.

Alt dette blir selvfølgelig mindfuck i begynnelsen, men dette er en nyttig modell av digitallogikk, og alt blir lettere å forstå om man sier "og" for $\cdot$ og "eller" for $+$. Du kan tenke på x som et utsagn som er enten sant eller usant. Uttrykket

$$x + x = x$$

betyr at "x eller x har den samme sannhetsverdien som x".

$\boxed{6}$ Oversett regnereglene i aksiomene og i oppgave 1-5 til dette språket.

REPETISJONSOPPGAVER

Det har gått fort i svingene de siste tre ukene. Her er flere oppgaver.

$\boxed{1}$ Løs

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Vis at kolonnene i A er lineært uavhengige, finn A^{-1}, og løs likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$\boxed{3}$ La

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}.$$

Finn P slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal matrise. Løs initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Finn den inverse matrisen til

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

og bruk den til å løse systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

$\boxed{5}$ Beregn volumet til parallellepipedet utspent av kolonnene i matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

og bruk resultatet til å avgjøre om likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Finn en løsning til
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$
som tilfredsstiller
$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$