1 - 7 - DIFFERENSIALLIKNINGER III

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1\,(x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= \alpha_1\,(x_1 - x_2) + \alpha_2\,(0 - x_2)\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Hvis vi setter

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\,(x_2 - x_1) \\ \alpha_1\,(x_1 - x_2) + \ \alpha_2\,(0 - x_2) \end{pmatrix}$$

så det blir riktig.

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_3)/L_1 & R_3/L_1 \\ R_2/L_2 & -(R_2 + R_3)/L_2 \end{pmatrix}$

Dersom du bruker Kirchhoffs spenningslov på sløyfene i kretsen under, får du

$$\dot{x}_1 = \Big(-(R_1 + R_3)\,x_1 + R_3 x_2 \Big)/L_1$$

$$\dot{x}_2 = \Big(R_2 x_1 - (R_2 + R_3)\,x_2 \Big)/L_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \qquad \text{der} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ En to ganger to matrise har karakteristisk polynom av orden 2, så det kan være maksimalt to egenverdier, og i $\mathbb{R}^2$ er det ikke "plass til" mer enn to lineært uavhengige egenvektorer, så mennesker som ikke er på galehuset vil forvente to lineært uavhengige løsninger. Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 1\\ &= (1+\lambda)(2+\lambda) - 1\\ &= 1 - 3\lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

som har røtter

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Å finne nullrommet til $A - \lambda I$ er å løse likningsystemene

$$\left.\begin{matrix} -1-\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -2-\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix} \quad \text{og} \quad \left.\begin{matrix} -1-\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -2-\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$$

Dette synes du sikkert ser helt forferdelig ut, men det å finne nullrommet til en 2×2-matrise involverer heldigvis så og si ingen gausseliminering. Dersom matrisen ikke er inverterbar, er radene lineært avhengige, og da er den ene raden en skalarmultippel av den andre. Dersom vi nå har regnet ut korrekte egenverdier, vet vi jo at dette skal være tilfellet, så da koker alt ned til å finne alt som passer i likningen

$$-1-\left(-\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad 1 \,\big|\, 0 \qquad \text{og} \qquad -1-\left(-\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad 1 \,\big|\, 0$$

eller, etter litt rydding,

$$1-\sqrt{5} \quad 2 \,\big|\, 0 \qquad \text{og} \qquad 1+\sqrt{5} \quad 2 \,\big|\, 0$$

Løsningene til disse to likningene er alle skalarmultipler av henholdsvis

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nå har vi funnet to løsninger av differensiallikningssystemet vi startet med, nemlig

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

og akkurat som i økten om andre ordens differensiallikninger, vil alle lineærkombinasjoner av disse to også være løsninger av systemet:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} + c_2 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4 Først finner vi egenvektorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1, \tag{2}$$

som har røtter $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$. Vi beregner så

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

og

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Alle lineærkombinasjoner av disse to løser systemet:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Vi regnet ut i forrige uke at egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

er 0, 4 og 9, med korresponderende egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningen er derfor alle lineærkombinasjoner på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)\left(3 - 4\lambda + \lambda^2\right) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\ &= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1+x_2+x_3=0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\qquad\text{og}\qquad\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Dette kommer vi tilbake til. Løsningen er alle lineærkombinasjoner på formen

$$\mathbf{x}(t)=c_1e^{4t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+e^t\left(c_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

$\boxed{7}$ Krever vi $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, får vi likningssystemet

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tag{8}$$

som gir $c_1=c_2=1/2$, slik at

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{2}\left(e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\tag{9}$$

og så videre.

$\boxed{8}$ Det karakteristiske polynomet blir

$$p(\lambda)=(1-\lambda)^2,$$

så det finnes kun én dobbel egenverdi $\lambda=1$. Når vi prøver å gausse oss frem til egenvektoren, får vi

$$\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}$$

som gir egenvektorer på formen

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tag{10}$$

og ingen fler. Vi har nå kun funnet én løsning, og den er

$$\mathbf{x}(t)=e^t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tag{11}$$

og denne kommer aldri til å kunne tilfredsstille det oppgitte initialkravet. Dette eksemplet illustrerer en viktig ting. Det karakteristiske polynomet til en $n\times n$-matrise kan alltid spaltes i n lineære faktorer, men det finnes ikke alltid n lineært uavhengige egenvektorer. I dette tilfellet sier vi at matrisen er **defekt**. Differensiallikningessystemet i oppgaven har flere løsninger enn de du fant, og derfor klarer du ikke tilfredsstille initialkravene. Spenningen er til å ta og føle på og hvis du vil kan du regne ut alle løsningene ved å først løse $\dot{x}_2=x_2$ først og så sette x_2 inn i den første likningen og så finne x_1.

$\boxed{9}$ Vannet skal ha en passelig drikketemperatur på 13 grader, så vi må løse likningen

$$13 = x_1(t),$$

der x_1 er den første komponenten i

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} + c_2 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Dette går ikke med penn og papir, siden x_1 er en lineærkombinasjon av to forskjellige eksponensialfunksjoner. Hvordan vi håndterer slikt skrømt kommer vi tilbake til.

Dersom en $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ har n lineært uavhengige egenvektorer sier vi at A er **diagonaliserbar**. Dette er fordi det i så fall er mulig å skrive

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

der P har egenvektorene som kolonner og Λ er diagonal.

$\boxed{10}$ Dersom du er trent nok i matrisemultiplikasjon vil du se at dersom du har n likninger på formen

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

kan disse sammenfattes som

$$AV = V\Lambda$$

der

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{array} \right) \qquad \text{og} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dersom de n vektorene er lineært uavhengige er V inverterbar, og da kan vi gange med V^{-1} fra venstre og få

$$A = V\Lambda V^{-1}.$$

$\boxed{11}$ Vi får

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}$$

som har karakteristisk polynom

$$|A - \lambda I| = -\lambda(-b-\lambda) + c = \lambda^2 + b\lambda + c,$$

altså det samme karakteristiske polynomet som likningen $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$. Tilfelig at begge heter "karakteristisk polynom"? Selvfølgelig ikke. Det finnes tilfeller der A ikke er diagonaliserbar, for eksempel hvis $b^2 = 4c$ slik at det finnes en dobbel egenverdi $\lambda = -b/2$.

REPETISJONSOPPGAVER

$\boxed{1}$ Vi gausser litt:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right. \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Det sto vel at vi skulle løse likningssystemene, men det er ikke så farlig nøyaktig hva løsningen på dette siste systemet er. Vi på det nåværende tidspunktet at det er entydig løsning, til tross for at vi har fire likninger og tre ukjente. Dette er fordi de tre kolonnene i matrisen er lineært uavhengige og vektoren på høyre side ligger i rommet utspent av disse. Se neste oppgave.

$\boxed{2}$ Vi ønsker som alle vet å løse systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og dersom $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, er kolonnene lineært uavhengige. Vi gausser i vei

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 0 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Et trent øye ser nå at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, og følgelig er kolonnene lineært uavhengige. Så er det bare å brette opp ermene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

og se at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi beregner til slutt

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Vi finner egenverdiene og egenvektorene til A. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 13-\lambda & 20 \\ -10 & -17-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 7)$$

og de tilhørende egenvektorene blir

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Løsningene til differensiallikningssystemet er

$$\mathbf{x} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$ Vi gausseliminerer (her kan det finnes flere veier til Rom)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Av dette ser vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Likningssystemet

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

kan også skrives

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og ganger vi på hver side med den inverse matrisen, får vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Volumet er

$$\det A = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 1$$

Siden $\det A \neq 0$, er kolonnene i A lineært uavhengige, og derfor vil likningssytemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning uansett hva $\mathbf{b}$ er.

$\boxed{6}$ Vi begynner med å finne det karakteristiske polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og registrerer at det finnes en repetert egenverdi $\lambda = 1$ med multiplisitet 3. Vi finner egenverdiene ved å løse systemet

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som altså blir

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

De to første likningene i dette systemet impliserer at $v_2 = v_3 = 0$, mens v_1 kan være hva som helst, siden den ikke inngår i likningssystemet en gang. Egenvektorene til $\lambda = 1$ blir følgelig

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siden matrisen kun har en lineært uavhengig egenvektor, er den ikke diagonaliserbar, og vi kan ikke finne en diagonalmatrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Og så til difflikningssystemet. Dette er et likningssystem på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

der matrisen A er identisk med den i forrige oppgave. Vi vet at derfor at

$$\mathbf{x}(t) = ce^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der c er en vilkårlig konstant, er en løsning. Det finnes to lineært uavhengige løsninger til, men de er litt mer kompliserte å regne ut, så det er ikke pensum i høst. Initialverdikravet

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

er tilfredsstilt dersom $c = 1$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$