1 - 6 - LINEÆRALGEBRA II

Stoffet i forrige uke er ikke så vanskelig, men det var kanskje mye på en gang. Her er en kort oppsummering. Lineæralgebra handler om løsning av likningssystemer på formen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Systemet har enten én, ingen eller uendelig mange løsninger, og finnes det løsning, er den entydig hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.

$\boxed{1}$ Løs

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

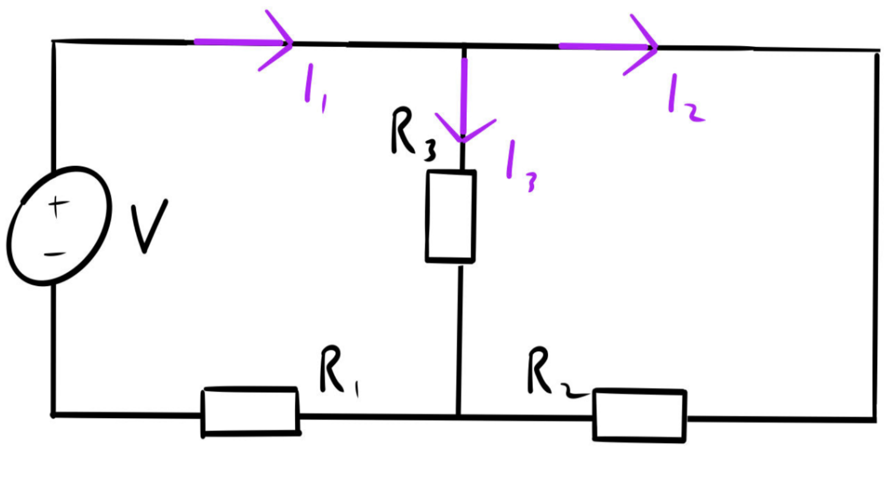
Avgjør om kolonnene i matrisen er lineært avhengige. Hva med radene?

I denne økten skal vi studere kvadratiske matriser, altså matriser der $m = n$. For slike matriser er det noen spesielle ting som gjelder - disse er sammenfattet i noe som kalles **the invertible matrix theorem**[1] Alt du noensinne kommer til å trenge å vite om kvadratiske matriser, finner du her: `https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix`

$\boxed{2}$ Finn ut hvordan man regner ut determinanten til en matrise, regn ut determinanten til matrisen i oppgave 1, og dobbeltsjekk svaret ditt med np.linalg.det. Er matrisen inverterbar?

I noen tilfeller er det lurt å vite foran og bak på ikke-kvadratiske matriser, men majoriteten av alle anvendelser produserer kvadratiske matriser. Kretsen under modellerer en høyttaler.

$\boxed{3}$ Kirchhoffs strømlov sier at strømmene inn i et forgreiningspunkt på summere til null - ladde partikler forsvinner ikke i løse luften. Sett opp et lineært likningssystem for i_1, i_2 og i_3. (Bruk Kirchoffs spenningslov på sløyfene og Kirchhoffs strømlov på den øverste forgreiningen.)

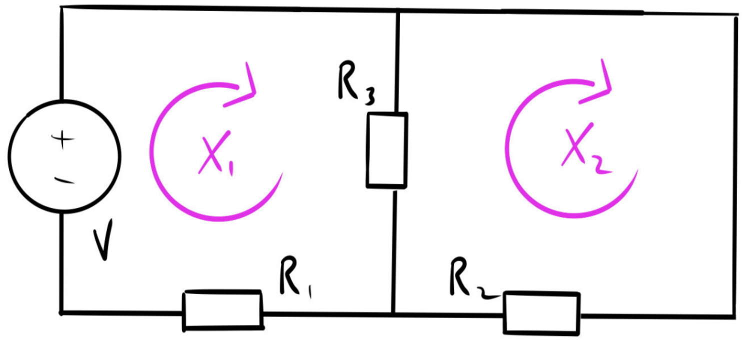


[1] `https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2023h/notater/15-inverterbarhet.pdf`

Det finnes systematiske teknikker for å sette opp lineære likningssystemer for en resistive kretser, altså kretser med kun motstander og spennings- eller strømkilder. Hvis du ser på forgreiningspunktet i kretsen over og har skjønt Kirchhoffs strømlov, vil du nok innse at

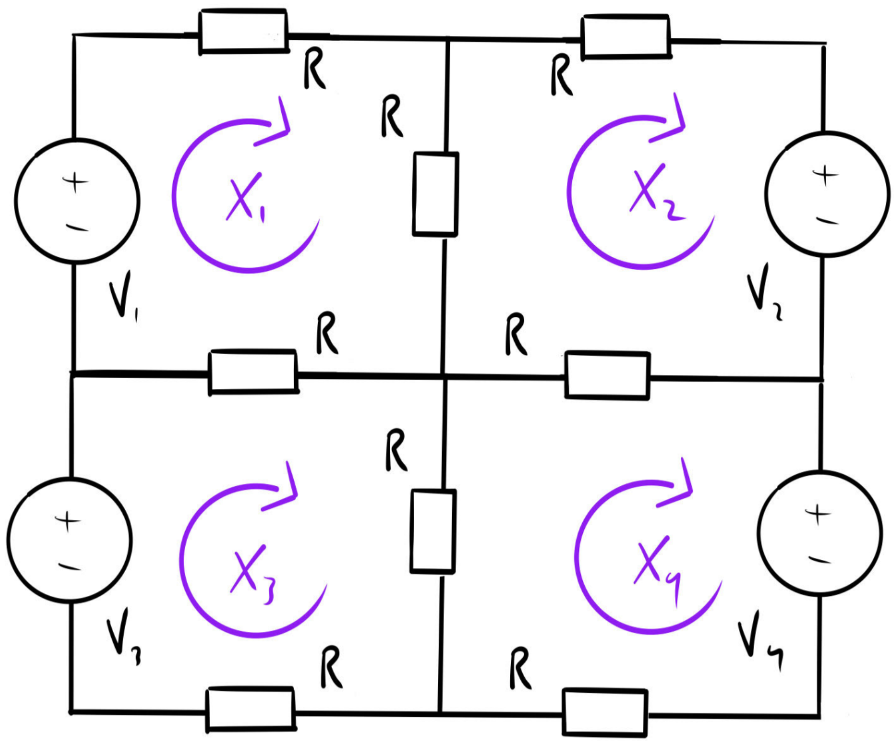
$$i_3 = i_1 - i_2.$$

Dette er utgangspunktet for noe som kalles **maskestrømsmetoden**. Den består i å tenke at de ukjente er sirkulære strømmer som går i bane i hver sløyfe slik:



Strømmen gjennom R_3 er $x_1 - x_2$, mens strømmen gjennom R_1 og R_2 er henholdsvis x_1 og x_2. Maskestrømsmetoden funker bare på planare kretsen,[2] men den er ryddig, for det blir like mange ukjente strømmer som sløyfer, og man får korrekt antall likninger ved å summere spenningsfallet rundt hver sløyfe. Prøv dette på kretsen under og løs når (alle motstander er like):

$\boxed{4}$ $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{5}$ $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{6}$ $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{7}$ $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix}$ $\boxed{8}$ $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$



[2]Noen synes for øvrig maskestrømsmetoden er litt shady, for du kan potensielt ha ukjente som ikke kan måles med et multimeter. Noen mennesker liker å måle alt, og tror ikke på noe før de har vært bortpå med multimeteret.

Python er praktisk når man skal løse kvadratiske systemer med entydig løsning. Her er et eksempel fra TMT4115. Kvikksølvklorid $\mathrm{HgCl_2}$ og oksalat $\mathrm{C_2O_4}^{2-}$ reagerer til noe andre greier:

$$2\mathrm{HgCl_2} + \mathrm{C_2O_4}^{2-} \to 2\mathrm{Cl}^- + 2\mathrm{CO_2} + \mathrm{Hg_2Cl_2}$$

Hvis vi starter med bare kvikksølvklorid og oksalat, er endring i konsentrasjoner gitt ved differensiallikningene

$$\frac{d\left[\mathrm{HgCl_2}\right]}{dt} = -2k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$$

og

$$\frac{d\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]}{dt} = -k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$$

der reaksjonshastigheten k og **reaksjonsordnene** m og n må bestemmes empirisk. Eksemplet er hentet fra læreboken i TMT4115, og der står det en tabell med (fiktive?) konsentrasjonsmålinger:[3]

$\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]$	$\left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]$	$k\left[\mathrm{HgCl_2}\right]^m \left[\mathrm{C_2O_4}^{2-}\right]^n$
0.105	0.15	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.105	0.30	$7.1 \cdot 10^{-5}$
0.052	0.30	$3.5 \cdot 10^{-5}$

Setter vi disse inn i difflikningene over, får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} k \cdot 0.105^m \cdot 0.15^n &= 1.8 \cdot 10^{-5} \\ k \cdot 0.105^m \cdot 0.30^n &= 7.1 \cdot 10^{-5} \\ k \cdot 0.052^m \cdot 0.30^n &= 3.5 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Ta log til alt og utled at følgende lineære likningssystem for m, n og $\log k$:

$$\begin{aligned} \log k + m \log 0.105 + n \log 0.15 &= \log\left(1.8 \cdot 10^{-5}\right) \\ \log k + m \log 0.105 + n \log 0.30 &= \log\left(7.1 \cdot 10^{-5}\right) \\ \log k + m \log 0.052 + n \log 0.30 &= \log\left(3.5 \cdot 10^{-5}\right) \end{aligned}$$

Det er ikke så gøy å gausse så stygge tall for hånd, så nå kan du finne ut av np.linalg.solve.

[3] I det virkelige liv ville man tatt mange flere målinger og brukt regresjon (dette skal vi lære til våren): `https://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis`

Matriser introduseres som regel i forbindelse med lineære likningssystemer. Men produktet $A\mathbf{x}$ er en viktig funksjon med mange anvendelser; datagrafikk er kanskje den mest kjente. Finn du hva matrisene under gjør geometrisk med vektorer som ganges inn fra høyre:

$\boxed{10}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{11}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{12}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{13}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{14}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{15}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{16}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{17}$ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\boxed{18}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\boxed{19}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{20}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{21}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{22}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{23}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{24}$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\boxed{25}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Hva som skjer med vektorer når de ganges inn i én og samme matrise er også interessant. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og gang inn følgende vektorer:

$\boxed{26}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{27}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{28}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{29}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{30}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{31}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Som du ser har noen vektorer har den egenskap at når man ganger dem inn i matrisen, kommer det ut en *skalarmultippel av den samme vektoren*. Dette kalles **egenvektorer**,[4] og den korresponderende skalarmultippelen λ kalles **egenverdien**. For å finne λ, gjør du som følger. Det første er å flytte alt på én side og bruke identitetsmatrisen og skrive egenvektorlikningen slik:

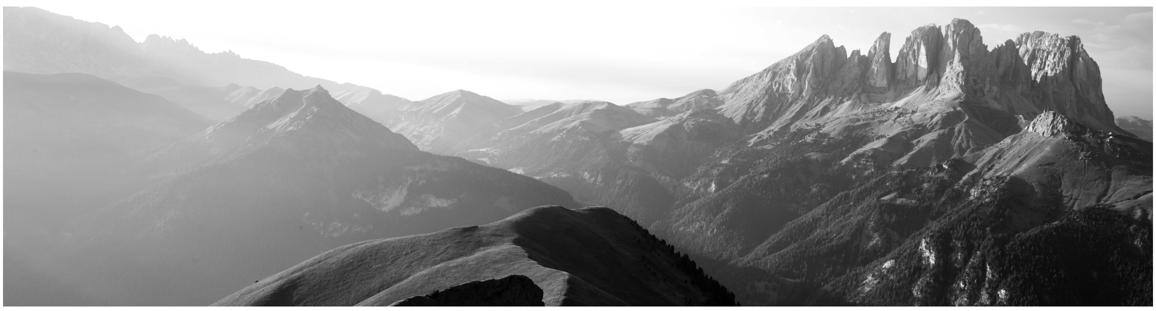
$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \iff \qquad (A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Nå vet du at dersom kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært uavhengige, har dette problemet entydig løsning, nemlig nullvektoren. Nullvektoren vil vi ikke skal klassifisere som egenvektor, for hvis den gjorde det, ville alle tall klassifisert som egenverdier, siden likningen

$$A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$$

er sann uansett hva λ er. Med andre ord må vi kreve at kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært avhengige.

$\boxed{32}$ Det er de hvis og bare hvis $\det(A - \lambda I) = 0$. Finn egenverdiene til A.



[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors

Slik gjøres det: Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((6-\lambda)^2-4\right) \\ &- 2\left(2(6-\lambda)-4\right) \\ &+ 2\left(4-2(6-\lambda)-4\right) = \lambda^3-13\lambda^2+36\lambda = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)\end{aligned}$$

slik at $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 9$ er de tre egenverdiene. Polynomet $p(\lambda) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ kalles matrisens **karakteristiske polynom**. Algebraens fundamentalteorem sier at et polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

alltid kan faktoriseres

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i),$$

der $\lambda_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

På folkemunne sier vi gjerne at en $n \times n$-matrise alltid har n egenverdier, for det karakteristiske polynomet har alltid orden n om matrisen er $n \times n$.[5] Når vi har funnet en egenverdi λ, kan vi finne de korresponderende egenvektorene ved å regne ut nullrommet til matrisen

$$A - \lambda I.$$

Kommende uke vil det blir klart hvorfor jeg plaget deg med dette.

$\boxed{33}$ Finn egenvektorene til A.

$\boxed{34}$ Finn egenverdier og egenvektorer til matrisene i oppgave 10-25.

[5] Du må telle antall lineære faktorer i det karakteristiske polynomet og ikke antall forskjellige egenverdier.

UKENS NØTTER

En **algebraisk struktur** er en mengde med elementer og en eller flere regneregler for å kombinere dem, for eksempel addisjon og multiplikasjon. Vi sier at en mengde er **lukket** under en regneregel dersom alle kombinasjoner av elementer også er med i mengden. For eksempel er mengden

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ikke lukket under addisjon, siden

$$3 + 4 = 7 \notin A.$$

Alle rasjonale tall er lukket under addisjon, siden summen av to rasjonale tall er et rasjonalt tall.

Hvis vanlig regning var alt en ingeniør trengte, hadde livet vært greit. Men grunnen til at det er lurt å vite hva en algebraisk struktur er, er at de brukes til å lage teoretiske modeller for tings oppfører seg.

For alle algebraiske strukturer setter vi alltid opp **aksiomer**. Et aksiom er et element i en smørbrødliste i en definisjon. Du kan tenke på det som en slags liten definisjon inni en annen definisjon. Når en matematiker sier at han eller hun forstår et eller annet, betyr det noe sånt som at vedkommende skjønner omtrent hvordan dette er utledet fra et sett med aksiomer.

En **kropp** er noe som modellerer helt vanlig regning. Dette er en algebraisk struktur med to operasjoner, addisjon $(+)$ og og mutliplikasjon $(\cdot)$. Det er vanlig å sløyfe gangetegnet, og skrive $x \cdot y = xy$. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for addisjon:

1 Addisjonen er assositativ: $(x + y) + z = x + (y + z)$

2 Addisjonen er kommutativ: $x + y = y + x$

3 Additiv identitet: Det finnes et element 0 slik at $x + 0 = x$

4 Additiv invers: For hver x finnes y slik at $x + y = 0$

Det additive inverselement til x skrives $-x$, og 0 er sin egen additive invers. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for multiplikasjon:

5 Mutliplikasjonen er assositativ: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

6 Multiplikasjonen er kommutativ: $x \cdot y = y \cdot x.$

7 Multiplikativ identitet: Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x.$

8 Multiplikativ invers: For hver $x \neq 0$ finnes y slik at $x \cdot y = 1.$

Det multiplikative inverselement til x skrives $1/x$ eller $\frac{1}{x}$. Til slutt er det et aksiom for rekkefølgen på regneoperasjonene:

9 Multiplikasjon er distributivt over addisjon:
$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$

Noen av regnereglene du lærte på skolen, slik som at $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, er listet i aksiomene. Andre kan utledes fra aksiomene.

$\boxed{1}$ Vis at $(-1) \cdot (-1) = 1.$

Vi sier at en kropp er **ordnet** dersom den er en **ordnet mengde**. Dette betyr at finnes en relasjon $<$ slik at

1 kun en av $x < y, \quad x = y, \quad y < x$ er sann for et gitt par x, y

2 dersom $x < y$ og $y < z$ er $x < z$ for alle x, y, z

Den siste egenskapen kalles **transitivitet**, og selv bavianer har litt peling på dette.[6]

$\boxed{2}$ Tallmengdene $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er alle kropper. Hvilke av dem er ordnede?

$\boxed{3}$ Er $\mathbb{R}^{n\times n}$ en kropp under matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon?

$\boxed{4}$ Hva med mengden av alle matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$?

[6]https://academic.oup.com/beheco/article/24/2/511/250731