TMA4101/4106/4111/4121

1 - 5 - LINEÆRALGEBRA I - LF

$\boxed{2}$ Vi ganger den første likningen med 4, trekker den andre likningen fra dette, og får

$$2b + 3c = 5.$$

Nå bytter vi likning nummer to ut med denne, og får likningssystemet

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2a + 3c &= 5 \\ 9a + 3b + \; c &= 1 \end{aligned}$$

Vi gjentar prosessen, ganger første likning med 9 og trekker den tredje likningen fra dette, bytter ut tredje likning med det vi fikk, og får

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ 6b + 8c &= 17 \end{aligned}$$

Nå kan vi gange den andre likningen med 3, trekke dette fra likning tre, og bytte ut denne, slik at vi får

$$\begin{aligned} a + \; b + \; c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Nå har vi fått **trappeform**, og det er bra, for vi kan regne ut

$$\begin{aligned} c &= -2 \\ b &= (5 + 3 \cdot 2)/2 = 11/2 \\ a &= 2 - 11/2 + 2 = -3/2 \end{aligned}$$

Polynomet som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$ er altså

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(-3x^2 + 11x - 4\right).$$

$\boxed{4}$ Du trenger ikke fasit på disse. Noen få linjer i python gir deg den:

```
A = np.array([[2, 3, 4], [3, 4, 5], [4, 5, 7]])
b = np.array([4, 5, 3])
x = np.linalg.solve(A, b)
```

Jeg skal allikevel ta den siste:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 4 & 2i & 10+2i & 20+16i \\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}$$

for det er mange som blir forvirret av gausseliminasjon når det er komplekse tall involvert. Begynn med å gange første likning med 2, trekke den fra likning nummer 2, og bytte ut:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 2i & -1 & 4+6i & 2+12i \end{array}$$

Så ganger vi første likning med i, trekker den fra den siste, og får

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & i & 5-3i \\ 0 & 0 & 8i \\ 0 & 0 & 1+i \end{array}\right| \begin{array}{c} 10 \\ 16i \\ 2+2i \end{array}$$

Hvis vi nå ganger likning nummer to med $(1+i)/8i$ og trekker dette fra den siste og bytter ut, får vi

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & i & 5-3i \\ 0 & 0 & 8i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 10 \\ 16i \\ 0 \end{array}$$

Hm. Det er visst bare to likninger dette her. Den ene forsvant helt under gausseliminasjon! Siden likningene var konsistente får vi uendelig mange løsninger, og de kan skrives opp som følger. Først gir den andre likningen at $x_3 = 2$, og da sitter vi igjen med likningen

$$2x_1 + ix_2 + 2(5-3i) = 10.$$

Nå kan vi velge $x_2 = s$, regne ut at

$$x_1 = 6i - si.$$

Det er vanlig å skrive opp løsningene på vektorform slik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i - si \\ s \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette kalles å **parametrisere løsningsrommet**.

$\boxed{5}$ Vi gausser

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 3 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

Huff da, $x_2 + 2x_3$ kan da ikke være både 2 og 5. Disse likningene var inkonsistente, og vi har ingen løsning. Neste:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{c} 8 \\ 10 \\ 12 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{c} 8 \\ 4 \\ 4 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 8 \\ 4 \\ 0 \end{array}$$

Disse likningene var konsistente, så nå kan du prøve å parametrisere løsningsrommet slik som i forrige oppgave. Den neste er lett:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Den siste likningen sier at $x_3 = 0$. Dersom $x_3 = 0$, sier den andre likningen at $x_2 = 0$, og dersom $x_2 = x_3 = 0$, sier den første likningen at $x_1 = 0$. Med andre ord impliserer likningssettet at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Den siste er lik på en av de forrige:

$$\left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \sim \left.\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

og vi får uendelig mange løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Likningssystemene i oppgaven over handler alle om å finne skjæringspunkter mellom tre plan. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

finnes det ikke noe punkt der alle planene skjærer hverandre, siden de tre normalvektorene ligger i det samme planet. Dette kan du finne ut av ved å ta trippelproduktet mellom de tre normalvektorene. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

peker normalvektorene i "hver sin retning", og det finnes et entydig skjæringspunkt mellom alle planene.

Dette kan være litt vanskelig å se for seg. Ta tre ark og eksperimenter litt med de forskjellige situasjonene. Hvis du synes det er håpløst, kan jeg trøste deg med at du får en bedre teknikk om noen få strakser.

$\boxed{7}$ Anta at både

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

og

$$d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

Dersom du trekker disse to likningene fra hverandre og bruker vektorregnereglene du lærte på skolen, får du

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ... $\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige må nå

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$$

som betyr at

$$c_1 = d_1, c_2 = d_2 = \cdots c_n = d_n.$$

$\boxed{8}$ La oss ta for oss det første systemet i oppgave 3:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

Dette er altså en vektorlikning:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

For å undersøke om vektorene i lineærkombinasjonen på venstre side er lineært uavhengige, må vi løse systemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gausser du dette slik som i oppgave 5, får du at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, og dermed er vektorene lineært uavhengige. Følgelig ser vi at systemet

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

ikke kan ha mer enn én løsning. Det neste systemet i oppgave 3 har lineært uavhengige vektorer på venstre side, for jeg konstruerte det ved å tegne en krets og skrive ned likninger for alle strømmene i kretsen - du kan analysere det på samme måte som jeg nettopp viste. Det siste systemet med komplekse tall kan umulig ha linæert uavhengige kolonner, for når vi løste systemet, fikk vi uendelig mange løsninger. I oppgave 5 har du allerede sjekka lineær uavhengighet da du løste systemene med nullvektor på høyre side. Vektorene på venstre side i det siste systemet i oppgave 5 har lineært uavhengige kolonner. Siden det er tre likninger og to ukjente tenkte du kanskje at det ikke kunne være noen løsning, men det er det, og den er entydig siden de to vektorene er lineært uavhengige. At de er lineært uavhengige er lett å se siden to vektorer er lineært avhengige hvis og bare hvis de er parallelle.

9 Å gange sammen matriser er en formel. Du går på Norges hippeste ingeniørutdanning. Du klarer det. Her er fasiten:

$$\begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 26 & 62 & 98 \\ 35 & 83 & 131 \end{pmatrix}$$

10 Dersom to matriser skal kunne ganges sammen, må antall kolonner i den til venstre være det samme som antall rader i den til høyre, ellers går det ikke. Pythonrutinen for å gange sammen matriser kalles "matmul". Denne kalles ved å bruke @:
`https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.matmul.html`
se nederst på lenken i fotnoten. Du kan prøve alle produktene i oppgaven med denne.

11 Nei og nei:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Se så kjekt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette kan brukes til å løse likningssystemer. Hvis du ganger med den inverse fra venstre på likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

får du løsningen

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

bare se her:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dette er det du fikk som løsning på et av systemene i oppgave 3.

$\boxed{12}$ Vi ønsker å finne en matrise B slik at $AB = I$. Dette er egentlig bare å løse de tre likningssystemene

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \qquad \text{og} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \qquad \text{og} \qquad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

og dette kan gjøres simultant ved å gausseliminere matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gausseliminerer du helt til du får

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

har du fått tak i A^{-1} til høyre i systemet. Dette er kjedelig, men en fin test på om du kan gausseliminere feilfritt.

Hvis du ikke liker å gausse, kan du ta alle de ni 2×2-determinanter som er mulig å beregne ved å slette en kolonne og en rad i A, sette dem opp i et spesielt mønster, gange noen av dem med -1, og til slutt dele alt på $\det A$. Dette kalles **kofaktorekspansjon**:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix`

$\boxed{14}$

$$BA = \begin{pmatrix} 42 & 54 & 73 \\ 51 & 66 & 89 \\ 60 & 78 & 105 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 26 & 62 & 98 \\ 35 & 83 & 131 \end{pmatrix}$$

$\boxed{15}$ Atommatrisen blir

$$\begin{pmatrix} & C_6H_{14}O_4 & O_2 & CO_2 & H_2O \\ C & 6 & 0 & -1 & 0 \\ H & 14 & 0 & 0 & -2 \\ O & 4 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De tre siste kolonnene er lineært avhengige, siden

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

kun løses av nullvektoren. Fire vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan åpenbart ikke være lineært uavhengige, og nå kan jeg et lurt triks som du skal få lære i neste uke, og det er at da må løsningsrommet til

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

være endimensjonalt. Sett $d = s$. Den andre likningen gir $14a - 2s = 0$, slik at $a = s/7$. Videre gir likning nummer én at $6s/7 - c = 0$, eller $c = 6s/7$. Til slutt gir den nederste likningen $4s/7 + 2b - 12s/7 - s = 0$ eller $4s + 14b - 12s - 7s = 0$, slik at $b = 15s/14$. Alt i alt har vi nå

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1/7 \\ 15/14 \\ 6/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

slik at korrekt balansering blir

$$2\mathrm{C_6H_{14}O_4} + 15\mathrm{O_2} \to 12\mathrm{CO_2} + 14\mathrm{H_2O}.$$