TMA4101/4106/4111/4121

1 - 4 - FUNKSJONER

En **mengde** er en samling med ting, kalt **elementer**. I grunnleggende matematikk er elementene gjerne tall, mens i sannsynlighetsregning er elementene utfall. I studier av symmetri, kan elementene være forskjellige måter å orientere et legeme på i rommet. Vi kan også ha en punktmengde i planet eller i rommet, en sirkelskive eller et kuleskall, eller noe helt annet. For eksempel er

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en mengde med fem elementer, og

$$B = \{1, 3, 5, \pi\}$$

en mengde med fire elementer. Primtallene er en mengde med uendelig mange elementer. Dersom π er et element i B, skriver vi

$$\pi \in B$$

To vanlige operasjoner på mengder, er union og snitt:

$$\cup \qquad\qquad \cap$$

Unionen av A og B er inneholder alle elementer som er med i enten A eller i B eller i begge:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$$

mens snittet $A \cap B$ er en mengde som inneholder de elementene som er i både A og i B:

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Dersom alle elementer i en mengde A er inneholdt i en større mengde B, skriver vi

$$A \subset B,$$

som er er det samme som at

$$A \cap B = A.$$

Dersom det hersker litt usikkerhet om hvorvidt $A \subset B$ eller $A = B$ skriver vi

$$A \subseteq B.$$

Vi skriver

$$A - B$$

for mengden av alle elementer som er i A, men ikke i B, og

$$\overline{A}$$

(leses "ikke A") for alle elementer som ikke er i A. En mengde uten elementer kalles "den tomme mengden", og ser slik ut:

$$\emptyset$$

Denne er praktisk å ha, for nå kan vi skrive $A \cap B = \emptyset$ for å uttrykke at A og B ikke har noen felles elementer, og $A \neq \emptyset$ for å uttrykke at det finnes noen elementer i A.

En **funksjon**

$$f:\ \Omega \to B$$

er en regel som tilordner ett og bare ett element i B til hvert element i Ω. Mengdene Ω og B kalles henholdsvis **domenet** og **kodomenet** til f. Et synonym for funksjon er **avbildning**.

$\boxed{1}$ La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Skisser f. Hva er domenet og kodomenet til f?

I dette kurset kommer kodomenet stort sett til å være $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. De verdiene som kommer ut når man stapper Ω inn i f kalles **bildet** til f og skrives $f(\Omega)$. Det er ikke alltid så lett å vite nøyaktig hva bildet til en funksjon er, men det er praktisk å kunne fortelle omtrent hva som kommer ut av en funksjon uten å først ta jobben med å regne ut bildet; derfor har vi kodomene.[1]

$\boxed{2}$ Hva er bildet til f i oppgave 0?

Det som går inn i en funksjon kalles **den uavhengige variabelen**. mens det du får ut kalles **den avhengige variabelen**. Disse kan i prinsippet hete hva som helst, men det vanligste er å bruke bokstaver fra slutten av alfabetet; dette var det Rene Descartes som fant på. [2] I uttrykket $f(x) = x^2$ er det tre forskjellige ting vi må skille nøye fra hverandre:

- den uavhengige variabelen x, et reelt tall
- den avhengige variabelen $f(x)$, også et reelt tall
- funksjonen f, altså regelen som gir oss $f(x)$ gitt x

Så når vi sier $f(x)$ mener vi tallet $f(x)$, og når vi sier f mener vi operasjonen "kvadrér x". Mengden av punkter (x, y) som passer i likningen $y = f(x)$ kalles **grafen** til f. Det er hensiktsmessig å huske de vanligste grafene siden de dukker opp overalt i anvendelser. Det er et fritt land og man kan ofte velge domene selv, men man må holde seg unna punkter der regelen f ikke gir mening.

$\boxed{3}$ Skissér funksjonene gitt ved e^x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $x^{1/3}$, $1/x$, $\sqrt{1-x^2}$ og $|x|$, og gi forslag til fornuftige domener. Plot i python for fasit.

I avsnittet over oppgave 4 var jeg streng på at når vi sier $f(x)$ mener vi tallet $f(x)$, og når vi sier f mener vi operasjonen som produserer $f(x)$ gitt x. Forhåpentligvis la du merke til at jeg allerede i oppgave 4 begynte å slurve med dette. Det er slik med konvensjoner at de er der for at det skal bli lettere å kommunisere, men av og til går kommunikasjonen lettere om man bryter dem. Skulle jeg fulgt konvensjonen til punkt og prikke, skulle oppgave 4 vært formulert slik:

$\boxed{4}$ Skissér funksjonene f, g, h, i, j, k, l og m gitt ved henholdsvis $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $i(x) = \sqrt{x}$, $j(x) = x^{1/3}$, $k(x) = 1/x$, $l(x) = \sqrt{1-x^2}$ og $m(x) = |x|$, og gi forslag til fornuftige domener. Plot i python for fasit.

[1] Arne skriver definisjonsmengde og verdimengde istedet for domene og bilde, og ikkeno for kodomene. Jeg foretrekker domene, kodomene og bilde, for det heter "domain", "codomain" og "image" på engelsk. Avbildning er "map".

[2] Han fant også opp koordinatsystemet: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system`

Så da er det kanskje bedre at vi av og til sier vi $f(x)$ når vi mener f - tabellen under blir for eksempel mye lettere å skrive ned med dette konvensjonsbruddet. La a, b, c og d være konstanter. Det er noen grunnleggende knep som er verdt å huske:

- Grafen til $f(x-a)$ er grafen til $f(x)$ flyttet a knepp horisontalt.
- Grafen til $f(x)+b$ er flyttet b knepp vertikalt.
- Grafen til $f(cx)$ er strukket horisontalt.
- Grafen til $df(x)$ er strukket vertikalt.
- Dersom $c=-1$ blir grafen speilet om y-aksen, mens $d=-1$ speiler om x-aksen.

$\boxed{5}$ Skisser funksjonene e^{x-1}, $(x+2)^2$, x^3-1, $1+\sqrt{4x-1}$, $1-x^{1/3}$, $2-1/x$, $1-\sqrt{1-x^2}$ og $1+|x+1|$, ved å bruke disse knepene samt forrige oppgave.

Det er ellers viktig at du venner deg til at variablene kan hete alt mellom himmel og jord, for mange kvantitative modeller uttrykkes ved funksjoner mellom størrelser, og i fysikk er det altfor mye å holde styr på til at vi klarer oss med bare noen få bokstaver. For eksempel er pH definert ved

$$pH\left(\left[\mathrm{H_3O^+}\right]\right) = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right].$$

$\boxed{6}$ Et "naturlig" domene følger gjerne av fysikken.[3] Hva er domenet og bildet til pH-funksjonen?

I lengden blir det jo litt klønete å si "la $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ være gitt ved $f(x)=\log x$" hver eneste gang vi skal prate om logaritmefunksjonen, så derfor sier vi bare $\log x$ istedet, og så er det underforstått at definisjonsmengden er $(0,\infty)$. Dette er litt slurvete, men det går bra. Det er en annen type slurv som skaper mer problemer. I fysikk og kjemi skriver man

$$pH = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$$

som er analogt til å skrive $y=x^2$ istedet for $f(x)=x^2$. Dette er forsåvidt greit, men man tilordner ikke noen bokstav til selve funksjonsregelen (altså "kvadrér x"), og det innebærer en tradeoff. Man får færre bokstaver å forholde seg til, og det blir dessuten tungvint å alltid måtte si $pH\left(\left[\mathrm{H_3O^+}\right]\right)$ istedet for pH. Men noen deler av fysikken der det er mange koordinattransformasjoner, for eksempel elektromagnetisme eller termodynamikk, blir veldig knotete å forstå.

$\boxed{7}$ Konsentrasjon kan gis på mange måter.[4] Finn en funksjon som gir pH dersom konsentrasjonen x av $\mathrm{H_3O^+}$ er gitt i mol per milliliter istedet for mol per liter.
(Her er det viktig å forstå at selv om konsentrasjon er konsentrasjon og pH er pH, er den nye funksjonen for å beregne pH forskjellig fra den forrige.)

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/PH
[4] https://snl.no/konsentrasjon_-_kjemi

pH er et eksempel på noe som kalles **logaritmisk skala**. Dette er viktig å forstå siden det brukes mye i anvendelser. Funksjoner med eksponensiell vekst (for eksempel alle modellene vi lærte om i uke 34) blir rettlinjede om du tar log til den uavhengige variabelen. Andre klassiske eksempler er

- Richters skala:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Richter_scale`
- tangentene på et piano, knappene på et trekkspill og båndene på en gitar:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music)`
- desibelskalaen:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Decibel`
- entropi:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_(information_theory)`
- stjerners lysstyrke:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Apparent_magnitude`
- f-tallet på et kamera:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/F-number`

$\boxed{8}$ Apropos. Hva er forskjellen på $\ln$ og $\log$?

Grunnen til at vi bruker $\ln$ istedet for $\log$ i mange sammenhenger, er at funksjonen e^x er mer praktisk enn 10^x. Alt i uke 34 er for eksempel basert på førstnevnte. Fordelen med logskala, er at λ kan leses av som stigningstallet til kurven.

$\boxed{9}$ Her er en liten tabell jeg lagde på måfå:

t	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$e^{\lambda t}$	1.00	1.105	1.22	1.35	1.49	1.65

Finn λ ved å ta log til rad nummer to og plotte.

Hvis du ser nøye på den andre raden i tabellen over, vil du kanskje se at den er en geometrisk rekke; hvert ledd er det forrige ganget med den samme multiplikasjonsfaktoren.

$\boxed{10}$ Hva er multiplikasjonsfaktoren?

Frekvensene på båndene på gitaren din danner en ellers geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor sånn omtrent $\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$ dersom gitaren er korrekt stemt. Hvis du spiller gitar og synes det er vanskelig å stemme uten stemmemaskin, er det antagelig fordi du lytter etter renstemte intervaller, og da blir ikke tonene på gitaren en geometrisk rekke med korrekt multiplikasjonsfaktor.

$\boxed{11}$ En ren ters (intervallet fra g-strengen til h-strengen) er gitt ved multiplikasjonsfaktoren $5/4$ og en ren kvart (intervallet mellom de andre strengene) ved $4/3$. En oktav er å doble frekvensen. Det er disse pene multiplikasjonsfaktorene som gir velklingende inteferensmønstre når du spiller på to strenger samtidig, og det er derfor disse multiplikasjonsfaktorene de som er lettest å lytte seg frem til når du stemmer to strenger mot hverandre.
Men om du gjør det slik, kommer gitaren til å klinge helt forferdelig. Hvorfor?
(Om du ikke spiller et musikkinstrument kan du hoppe over denne oppgaven.)

Eksponensialfunksjonen og logaritmefunksjonen står ellers i et spesielt forhold til hverandre.

$\boxed{12}$ Skisser funksjonene $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(z) = e^z$$

og $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$g(y) = \ln y$$

for hånd. Hva er bildene til f og g?

Om du bytter plass på x og y og får likningen $x = f(y)$, speiles grafen til f om linjen $x = y$.

$\boxed{13}$ Skisser kurven gitt av likningen $x = y \sin y$ for hånd og dobbeltsjekk i python.

Dette leder til noe som kalles **den inverse funksjonen**.

$\boxed{14}$ Les kapittel 2.11 i Arnes bok for å finne ut hva dette er.

I grove trekk finner man det inverse funksjonsuttrykket ved å løse likningen $y = f(x)$ for x.

$\boxed{15}$ Finn f^{-1} dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = e^x$.

Men vi kan støte på noen problemer.

$\boxed{16}$ Finnes den inverse funksjonen til $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2?$$

Hva skjer når du prøver å finne den? Tegn opp.

Problemet med oppgaven over er at x^2+2x+2 ikke er injektiv. En funksjon f er **injektiv** dersom

$$f(x) = f(y) \qquad \Longrightarrow \qquad x = y.$$

Grafen til en injektiv funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ krysser en vannrett linje i planet maksimalt én gang.

$\boxed{17}$ Funksjonen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.
(Hint: sett $2x^2 + 2x + 2 = y$ og løs for x med abc-formelen.)

$\boxed{18}$ Hvilke av funksjonene i oppgave 4 er injektive dersom definisjonsmengden er $\mathbb{R}$?

$\boxed{19}$ Skisser pH mot $[\mathrm{H_3O^+}]$ og $[\mathrm{H_3O^+}]$ mot pH.

$\boxed{20}$ Om $f^{-1} = f$, kalles det “selv-invers”. Kan du finne noen slike? Hvordan ser det ut geometrisk?

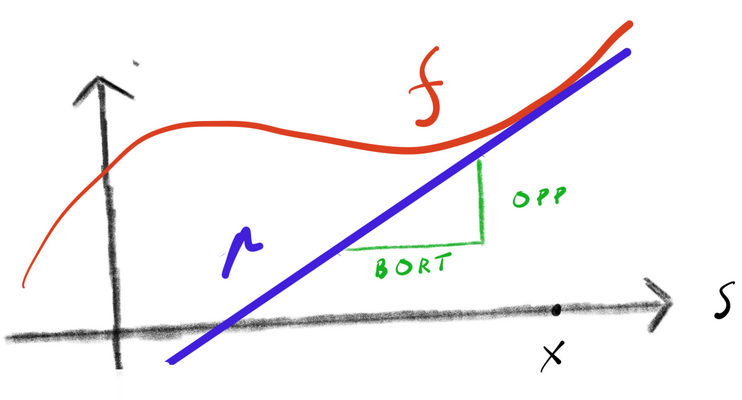
For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ defineres **stigningstallet** som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer; i så fall er f **deriverbar** i x. Å definere grenseverdi ordentlig er ganske teknisk, så det venter vi med. **Tangentlinjen** til f i x er $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

og tallet $f'(x)$ er *opp delt på bort*:



$\boxed{21}$ Bruk definisjonen over til å vise at x^2 har derivert $2x$.

$\boxed{22}$ Bruk definisjonen over til å vise at x^n har derivert nx^{n-1} dersom n er et naturlig tall.

$\boxed{23}$ Det finnes en snedig formel for den deriverte til f^{-1}. Utled at

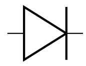
$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f^{-1} eksisterer, f er deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Vis at

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

UKENS NØTTER

Shockleys diodelov[5] gir strømmen i gjennom en diode som funksjon av spenningen v over den.

DIODE $$i(v) = i_0 \left(e^{v/v_0} - 1\right)$$ 

Parameteren i_0 kalles **reversstrømmen**. Dette er den maksimale strømmen som kan gå i sperreretningen før dioden ryker. **Den termiske spenningen** er parameteren

$$v_0 = \frac{kT}{nq}$$

der

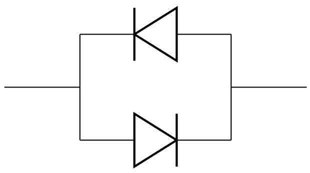
k er Boltzmanns konstant:
https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant

T er temperaturen i Kelvin:
https://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin

q er elektronladningen:
https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_charge

n er en diodespesifikk idealitetsfaktor:
https://en.wikipedia.org/wiki/Diode

$\boxed{1}$ Vis at dersom du kobler to identiske dioder i parallell slik:



blir forholdet mellom strøm og spenning gitt ved

$$i(v) = I_0 \left(e^{\frac{v}{v_0}} - e^{-\frac{v}{v_0}}\right) = 2I_0 \sinh\left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Denne parallellkoblingen av dioder kan dukke opp på anoden i noen elektrokjemiske celler.[6]

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Shockley_diode_equation
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Butler-Volmer_equation

Laurentius Lie er blitt pensjonist, og han får tiden til å gå ved å sette sammen esker med røde juledioder der noen er defekte og noen ikke er defekte. Vi lar n være antall dioder i boksen, og k være antall defekte dioder. Hvorvidt en diode er defekt eller ikke, kalles en **mikrotilstand**. Vi kaller k den **makroskopiske tilstanden**, og en bestemt boks en **konfigurasjon**. Laurentius Lie har et skarpt blikk for dioder; han klarer å holde styr på forskjellige konfigurasjoner. Han ser med letthet forskjell på to bokser der diode nummer fem og tretten er defekte og en annen boks der diode nummer to og syv er defekte. Det gjør ikke vi. Det eneste vi ser er antall defekte dioder i boksen.

$\boxed{2}$ Hvor mange konfigurasjoner gir k defekte dioder dersom det er n dioder i boksen?

Vi lar $W(k)$ være svaret på forrige oppgave. Dette tallet kalles den **statistiske vekten** til k.

$\boxed{3}$ Han har nettopp laget to bokser etter hverandre, den ene med k_1 defekte dioder og den andre med k_2 defekte dioder. Hvor mange konfigurasjoner gir denne makroskopiske tilstanden? (Hint: Han er nøye på å sette sammen boksene tilfeldig helt uavhengig av hverandre.)

Laurentius Lie driver med dette fordi det eneste han føler ugjort i karrieren sin, er å forklare entropi. Entropifunksjonen $S = f(W)$ er en funksjon som tilfredsstiller postulatetet at du kan legge sammen entropiene for isolerte systemer:

$$f(W) = f(W_1) + f(W_2)$$

Her er W_1 og W_2 de statistiske vektene til boksene hver for seg og W den statistiske vekten til de to boksene som helhet.

$\boxed{4}$ Hva slags funksjon er f?
(Hint: Bruk forrige oppgave.)