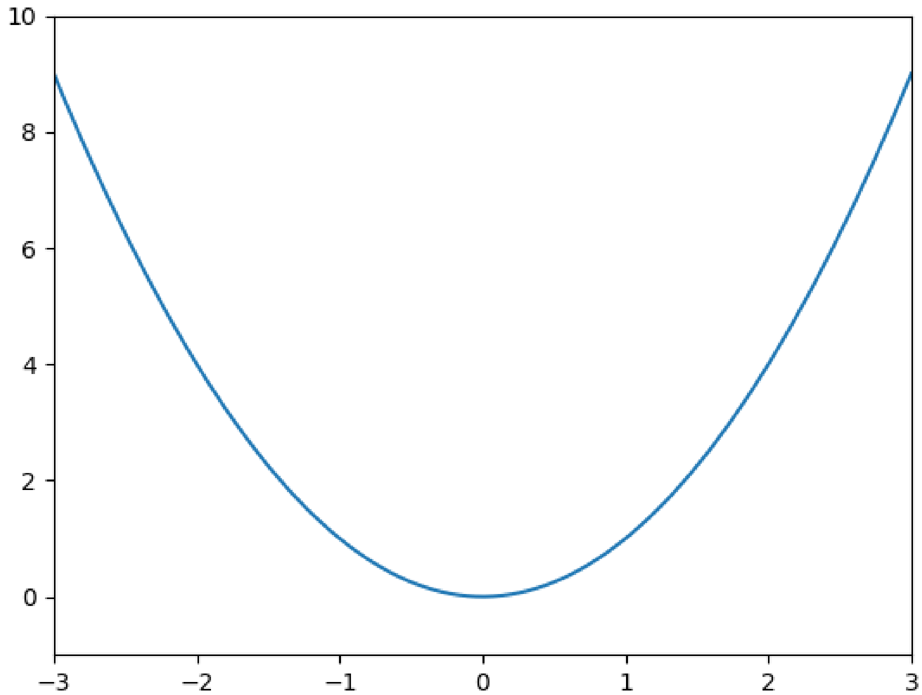
TMA4101/4106/4111/4121

1 - 2 - FUNKSJONER - LF

$\boxed{1}$ Både domenet og kodomenet er $\mathbb{R}^2$ - dette spørsmålet var bare for å sjekke om du hadde lest avsnittet over oppgaven. Her er grafen til f:



$\boxed{2}$ Putter du inn hele $\mathbb{R}$ i f, får du ut alle reelle tall større enn eller lik null, så dette er bildet.

$\boxed{3}$ Jeg har en liten kodesnutt i en mappe som heter python/plotte/generisk eller noe sånt og den ser omtrent slik ut:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-1,np.pi,1000)
y=x**2

plt.plot(x,y)
plt.xlim([-1, 2])
plt.ylim([-1, 10])
plt.savefig('plotte.png')
```

Kommandoer som kan være verdt å kjenne er i tillegg np. exp, np.sqrt og np.abs. Ikke mist gnisten av at du ikke husker syntaks. En god IDE (Integrated Development Environment) hjelper deg med slikt. Jeg skriver for eksempel dette her i VSCode som fullfører syntaks for meg og så bruker jeg en Vim-plugin slik at jeg har hurtigtastene jeg var vant til før jeg konverterte fra Vim til VSCode.

Hvis du bare kopierer koden over inn i ideen din kan det tenkes den ikke kjører, for det kan være du får med noen tegn som ikke er synlige på skjermen din. Jeg har skrevet koden inn i pdfen nettopp for at du skal bli obs på dette problemet. Se ellers her:
`https://missing.csail.mit.edu/`

$\boxed{6}$ Konsentrasjoner bør vel helst være større enn eller lik 0, men log-funksjonen er ikke definert for 0, så da er vel ikke pH definert for 0 heller. Jeg vet ikke en gang om det er mulig å ha absolutt ingen $\mathrm{H_3O^+}$-molekyler i en flaske vann. Dersom konsentrasjonen kan ta alle positive verdier, kan pH i prinsippet være alle reelle tall, men pH holder seg vel som regel mellom 0 og 14.

$\boxed{7}$ Dersom x er gitt i mol per milliliter og y den samme konsentrasjonen i mol per milliliter, er $x = 1000y$, slik at

$$pH = f(y) = -\log(1000y).$$

$\boxed{8}$ Vi definerer $\log x$ som det tallet slik at

$$10^{\log x} = x$$

og $\ln x$ som det tallet slik at

$$e^{\ln x} = x.$$

Dette er i bunn og grunn det eneste du trenger å huske, resten er lett å utlede fra regnereglene for eksponensialfunksjonen. For eksempel er

$$\log xy = \log x + \log y$$

siden

$$10^{\log xy} = xy$$

og

$$10^{\log x + \log y} = 10^{\log x} 10^{\log y} = xy.$$

$\boxed{9}$ Her er tabellen med en ekstra rad:

t	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$e^{\lambda t}$	1.00	1.105	1.22	1.35	1.49	1.65
λt	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50

Ser ut som om $\lambda = 1/2$.

$\boxed{10}$ Du skal gange 1.00 med denne faktoren for å få 1.105, så da må det vel være 1.105.

$\boxed{11}$ På en vanlig seksstrengs gitar er det fire kvarter og en stor ters. Tilsammen skal det bli to oktaver, som har multiplikasjonsfaktoren $2^2 = 4$, men fire rene kvarter og en stor ters gir

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \frac{5}{4} \approx 3.96.$$

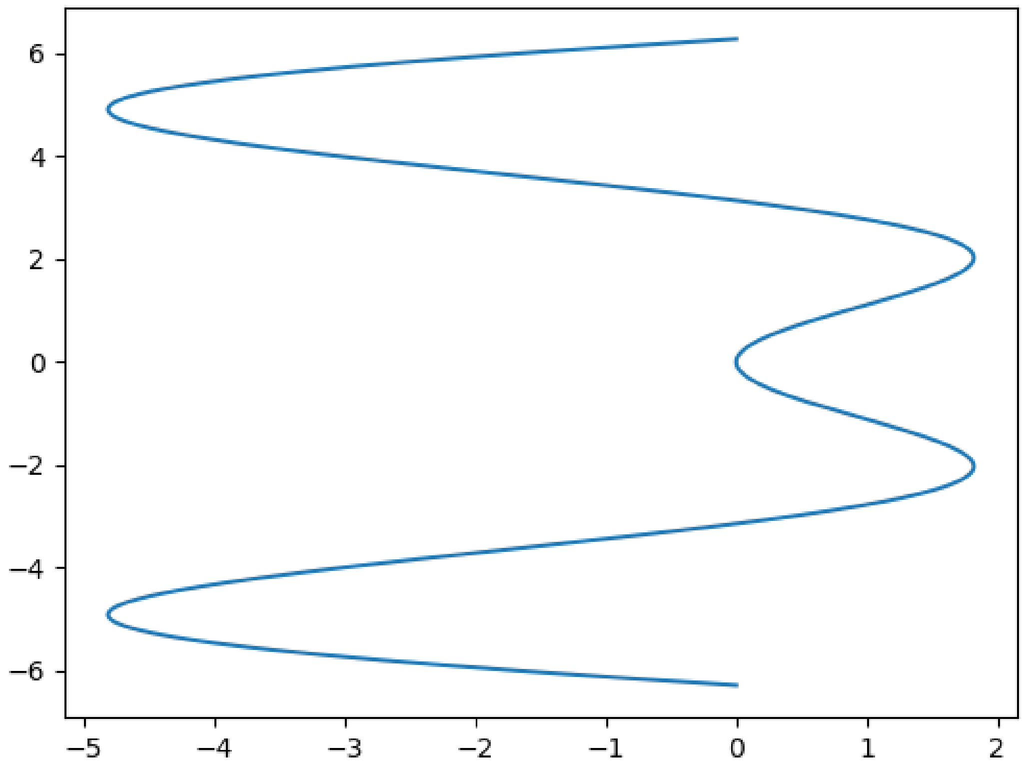
Med andre ord blir det forferdelig surt! Du får samme problem på piano, tolv kvinter skal helst bli syv oktaver, men

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129.7 \neq 128 = 2^7.$$

Derfor har man oppfunnet **likesvevende temperering**, som betyr et halvtonetrinn defineres til å ha multiplikasjonsfaktoren $\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$, og tonesystemet blir den endelige gruppen $\mathbb{Z}_{12}$. Dette løser nesten alle problemer, og et korrekt stemt piano klinger rimelig bra. (På et piano er det noen andre problemer i tillegg, men de har med bølgefysikk å gjøre, og er foreløbig for kompliserte for oss.)

12 Dette gjorde jeg i forelesning.

13 Bytter du om x og y i kodesnutten over, får du denne figuren:



15 Eksponensialfunksjonen og logaritmefunksjonen er inverse funkjoner.

16 La oss sette

$$y = x^2 + 2x + 2$$

og løse for x med abs-formelen:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2-y)}}{2} = -1 \pm \sqrt{y-1)}.$$

To funksjonsuttrykk! Jøye meg. På attenhundretallet ville de kanskje sagt at den inverse funksjonen hadde to funksjonsverdier, men dette er ikke lov lenger.

17 Den korrekte oppførselen er nå å si at funksjonen vi vil invertere er $f : [-1, \infty]$ gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

som har invers $f^{-1} : [1, \infty]$ gitt ved

$$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x - 1}$$

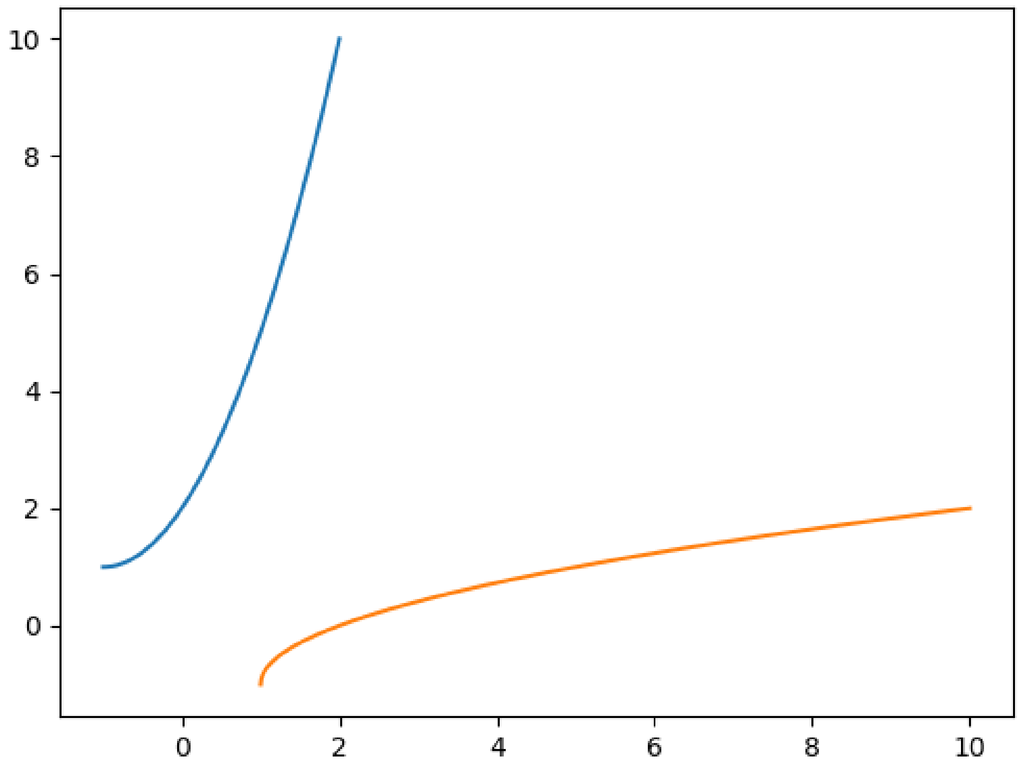
eller eventuelt invertere $g : [-\infty, -1]$ gitt ved

$$g(x) = x^2 + 2x + 2$$

som har invers $g^{-1} : [1, \infty]$ gitt ved

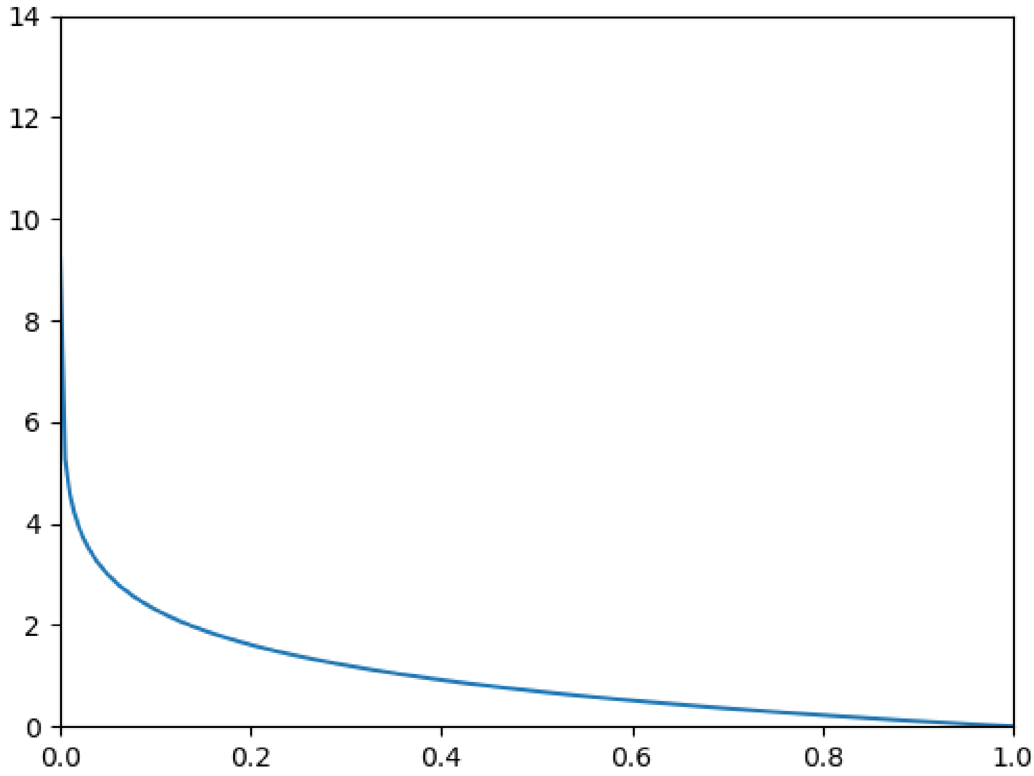
$$g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x - 1}$$

Her er et plot av f:



18 Det er kun f, h, j og m som har anleding til å ha hele $\mathbb{R}$ som domene, og kun de tre første som er injektive.

$\boxed{19}$ Her er $[\mathrm{H_3O^+}]$ mot pH. pH mot $[\mathrm{H_3O^+}]$ er samme figur speila om $pH = [\mathrm{H_3O^+}]$.



$\boxed{20}$ To eksempler er $f(x) = x$ og $f(x) = 1/x$.

$\boxed{21}$ Dette er et spesialtilfelle av neste oppgave.

$\boxed{22}$ Denne oppgaven er kanskje mest et påskudd for å lære dere å gange ut

$$(a+b)^n$$

for dette er et triks mange ikke kan, og du får bruk for kunnskapen i TMA4245 Statistikk og sannsynlighetsregning til våren. Så her kommer et løsningsforslag som er litt vel pedagogisk, du trenger ikke skrive fullt så mye greier på eksamen. Først må vi ha Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\color{red}{1} & & \color{red}{4} & & \color{red}{6} & & \color{red}{4} & & \color{red}{1} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

For eksempel er

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4 \\
&= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}b^4
\end{aligned}
$$

Symbolet $\binom{n}{r}$ leses "n over r" og det er ikke kjempevanskelig å vise ved induksjon at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Merk at for alle n er

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{og} \qquad \binom{n}{1} = n$$

slik at

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = nx^{n-1}
\end{aligned}
$$

23 Funksjonen $f : A \to f(A)$ sin inverse funksjon eksisterer dersom f er injektiv, og f^{-1} tilfredsstiller likningen

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

for alle $x \in f(A)$. Hvis vi deriverer denne likningen med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dersom vi setter $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \tan x$ og husker at

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

detter

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

rett ut. Arcus sinus er lik.