1 - 3 - DIFFERENSIALLIKNINGER II

I forrige økt ba jeg deg om å lete etter løsninger til kloss-og-fjærlikningen

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

men jeg sa aldri hva de var - vi må nemlig ha komplekse tall for å håndtere løsningene på en fornuftig måte. Før vi lærer den generelle løsningsteknikken, skal vi introdusere en kraft til. **Friksjonskraft** er som regel avhengig av farten $\dot{x}$, og hele tiden rettet mot fartsretningen. Friksjon er komplisert,[1] men det er ikke uvanlig å anta at friksjonskraften er proporsjonal med $\dot{x}$:

$$F(\dot{x}) = -\mu\dot{x}$$

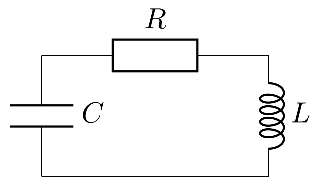
Dette er i mange systemer en rimelig antagelse dersom hastigheten er lav, og uansett det eneste som er banalt nok til at vi kan håndtere det her og nå. Newtons andre lov $F = m\ddot{x}$ blir

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu\dot{x}(t),$$

dersom klossen opplever en slik friksjon i tillegg til fjærkraften. Vi rydder og skriver

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

$\boxed{1}$ Hvis du nå tror at du kun studerer kloss og fjær ved å løse denne likningen, kan du prøve å bruke Kirchhoffs spenningslov på denne kretsen.



[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Friction

Det bør altså være klart at én og samme differensiallikning kan ha mange mange bruksområder.[2] Vidt forskjellige fysiske fenomener kan oppføre seg dønn likt matematisk sett. Nå skal vi se på hvordan vi finner løsningene på de foregående likningene. Det er litt mer kjelkete med andre ordens likninger, så la oss sette $m = L = 1$, $\mu = R = 3$ og $k = 1/C = 2$, slik at vi får likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Det første vi gjør er å observere at siden

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

kan vi "faktorisere" likningen slik:

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right)\left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = 0$$

La nå oss nå innføre en hjelpevariabel

$$y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = \dot{x}(t) + 2x(t).$$

Denne tilfredssstiller

$$0 = \left(\frac{d}{dt} + 1\right) y(t) = \dot{y}(t) + y(t),$$

som impliserer at

$$y(t) = c_1 e^{-t}.$$

Men i så fall må

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = c_1 e^{-t}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{2(s-t)} e^{-s} ds \\ &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{s-2t} ds = c_2 e^{-2t} - c_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

Siden c_1 bare er en integrasjonskonstant, kan vi bytte fortegn og skrive løsningen litt penere:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

Hvis du nå studerer dette litt nøye, vil du se at det er ingenting spesielt med likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Hadde vi prøvd å løse

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0$$

kunne vi gått frem på samme måte, og funnet at

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

[2] https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html

der λ_1 og λ_2 er røttene til likningens **karakteristiske polynom**

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = a_2\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right).$$

Denne strategien produserer korrekte løsninger så lenge $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dersom $\lambda_1 = \lambda_2$ blir det litt annerledes, men dette tilfellet er en matematisk abstraksjon som sjelden inntreffer i virkelige anvendelser. Det er av mange grunner mest praktisk å dele ut a_2 eller sette $a_2 = 1$, for hvis a_2 skulle slumpe til å bli null, blir det rot i systemet siden likningen ikke lenger er av andre orden. Derfor skriver vi

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

som er en **homogen andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter**. La

$$\delta = -\frac{a_1}{2} \qquad \text{og} \qquad \omega_0 = \left|\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}\right|.$$

Løsningen klassifiseres i tre forskjellige tilfeller alt etter fortegnet på $a_1^2 - 4a_0$:

1: Dersom $a_1^2 - 4a_0 > 0$ blir det enkelt, da finnes det to reelle røtter

$$\lambda = \delta \pm \omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) =&\ c_1e^{(\delta+\omega_0)t} + c_2e^{(\delta-\omega_0)t} \\ =&\ e^{\delta t}\left(c_1e^{\omega_0t} + c_2e^{-\omega_0t}\right). \end{aligned}$$

2: Dersom $a_1^2 - 4a_0 = 0$, finnes det en dobbel rot $\lambda = \delta$, og løsningen blir

$$x(t) = c_1e^{\delta t} + c_2te^{\delta t}.$$

3: Dersom $a_1^2 - 4a_0 < 0$, er løsningen til den karakteristiske likningen

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2} = \delta \pm i\omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{(\delta+i\omega_0)t} + c_2e^{(\delta-i\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t}\left(c_1e^{i\omega_0t} + c_2e^{-i\omega_0t}\right) \\ &= e^{\delta t}\left(d_1\cos\left(\omega_0t\right) + d_2\sin\left(\omega_0t\right)\right). \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_1 &= \quad c_1 + c_2 \\ d_2 &= i\left(c_1 - c_2\right) \end{aligned}$$

Skriv opp løsningen når

$\boxed{2}$ $a_1 = a_0 = 1.$ $\boxed{3}$ $a_1 = 2,\ a_0 = 1$ $\boxed{4}$ $a_1 = 0,\ a_0 = 1$ $\boxed{5}$ $a_1 = 3,\ a_0 = 1$

Løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

er

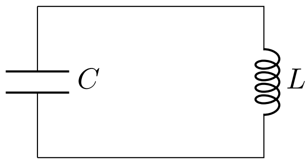
$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Dette systemet kalles en harmonisk oscillator, og løsningen er en bevegelse som aldri stopper opp. Hvis vi skal beregne en faktisk løsningstrajektorie, må vi vite noe om både startposisjon og startfart. Finn x dersom

$\boxed{6}$ $x(0) = 1$ og $\dot{x}(0) = 0$. $\boxed{7}$ $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 1$. $\boxed{8}$ $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$.

Kirchhoffs spenningslov sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null. I likhet med Newtons andre lov, er dette også en differensiallikning dersom du har spoler eller kondensatorer i kretsen. Det har man alltid, for alle kretser har bittelitt tilsiktet eller utilsiktet kapasitans og induktans. Kirchhoffs spenningslov på kretsen til høyre gir

$$L\dot{i}(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds = 0$$



og deriverer vi hele greia, får vi

$$L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0,$$

som har løsning

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss.

Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn på den:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(s)\,ds$$

Med andre ord ka vi lade den opp med et batteri først og så koble av batteriet og så koble kondensatoren i sløyfe med noe annet mens det er spenning på den. Da vil strømmen begynne å gå i kretsen, og denne vil oppføre seg etter differensiallikningen over. Finn $i(t)$ dersom

$\boxed{9}$ $i(0) = 1$ og $\dot{i}(0) = 0$. $\boxed{10}$ $i(0) = 0$ og $\dot{i}(0) = 1$. $\boxed{11}$ $i(0) = i_0$ og $\dot{i}(0) = v_0$.

Det går an å lage en formel for løsningen til likning med påtrykt kraft f:

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = f(t) \qquad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

men denne er temmelig hårete. Til våren skal vi lære noen pene triks for å løse denne likningen for de viktigste klassene av påtrykte krefter. I dette semesteret skal vi begrense oss til

$$f(t) = e^{i\omega t}$$

for man kommer langt med bare denne. Husk at løsningen til

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \qquad x(0) = x_0$$

er

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0e^{-\lambda t} + \int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)}\,ds \\ &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned}$$

der x_h står for **homogen løsning**, og x_p for **partikulær løsning**. Løsningen til den andre ordens likningen følger det samme systemet. Den homogene løsningen x_h er den vi fant på de foregående sidene, altså løsningen til

$$\ddot{x}_h(t) + a_1\dot{x}_h(t) + a_0x_h(t) = 0.$$

Dersom $f(t) = e^{i\omega t}$, er

$$x_p(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

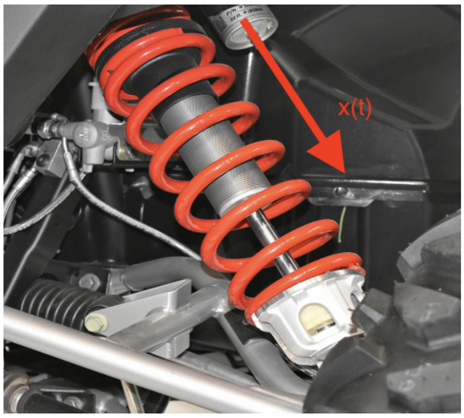
der H er en funksjon som kalles **frekvensresponsen** til differensiallikningen.

$\boxed{12}$ Denne kan du finne ved å sette $x_p(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$ inn i likningen og sammenlikne høyre og venstre side. Løs initialverdiproblemene

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

og

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \cos(\omega t) \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$



Kilde: howstuffworks.com

Dersom $\omega = 0$, blir blir $f(t) = 1$ og $x_p(t) = H(0)$, som er konstant. Dette er et viktig spesialtilfelle. Et fysisk eksempel som er lett å huske, er Newtons andre lov anvendt på støtdemperen på en bil. En masse m med vertikal posisjon x hviler på en fjær med fjærstivhet k. Massen blir trukket nedover av tyngdekraften mg, og inni fjæren sitter en støtdemper som for enkelhets skyld bidrar med en friksjonskraft som er proporsjonal med $\dot{x}$. Newtons andre lov sier at masse ganger akselerasjon skal være lik summen av disse tre kreftene, og setter vi positiv x-retning nedover, får vi

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + mg.$$

Hvis vi nå sorterer alt etter konvensjonen, med alle ledd som involverer den ukjente på den ene siden og alt annet på den andre siden, får vi

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = mg.$$

Nå deler vi på m, og får

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

slik at $a_1 = \mu/m$, $a_0 = k/m$ og $f(t) = g$. Den partikulære løsningen kalles i dette tilfellet **likevektsløsningen**, for det er den konsante x-verdien der systemet "helst vil være". Hvis du har en stor masse på en svak fjær, vil likevektsposisjonen ligge lavt, og omvendt.[3]

$\boxed{13}$ Finn den partikulære løsningen x_p.

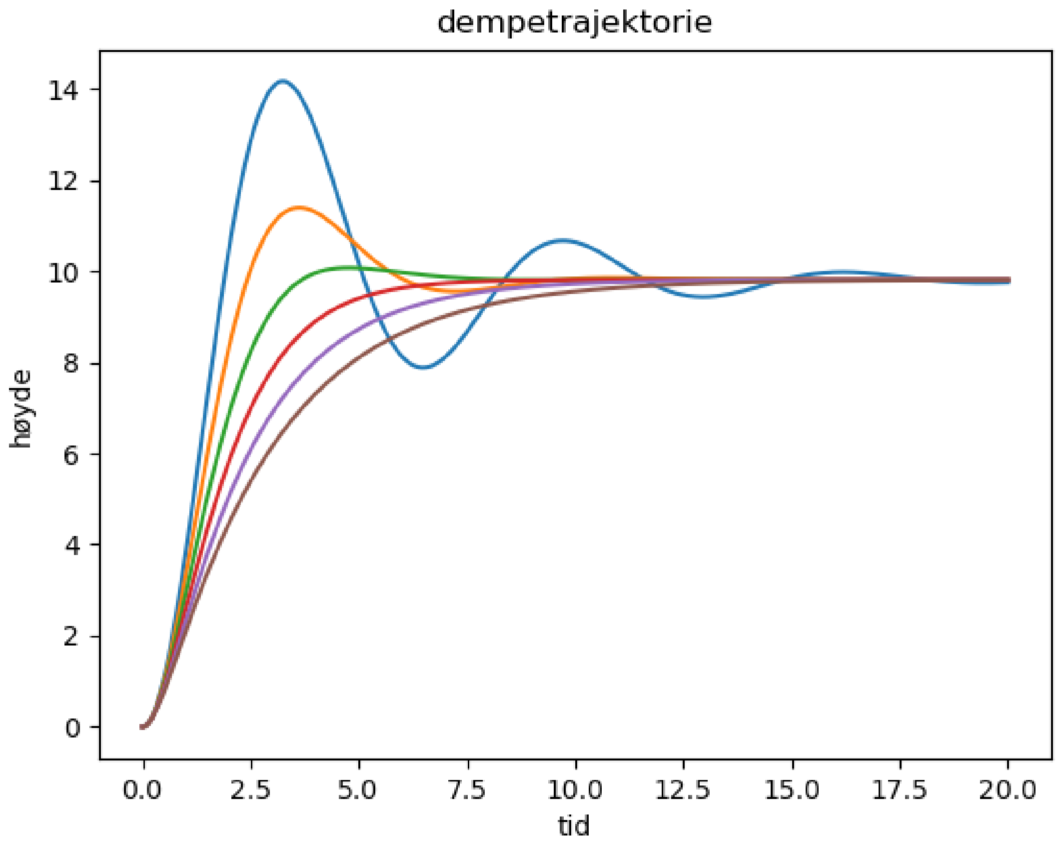
I en moderne bil er fjærstivheten k er tilpasset vekten m på akslingen, men dempingen μ endres etterhvert som demperen slites. La oss for enkelhets skyld si at $k = m = 1$, slik at

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = g.$$

$\boxed{14}$ Regn ut løsningen og plott den for $\mu = 3$, $\mu = 2$ og $\mu = 1$. Bruk initialkrav $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Etterpå kan du slå opp i kapittel 2.4 i Kreyszig.

[3]Det er viktig at fjæren er tilpasset massen som skal hvile på den, men det er litt slingrinsmonn; lastebiler har luftfjæring, slik at man kompensere for den store vektforskjellen mellom med og uten last, og en moderene SUV har gjerne luftfjæring for å kunne regulere bakkeklaringen.

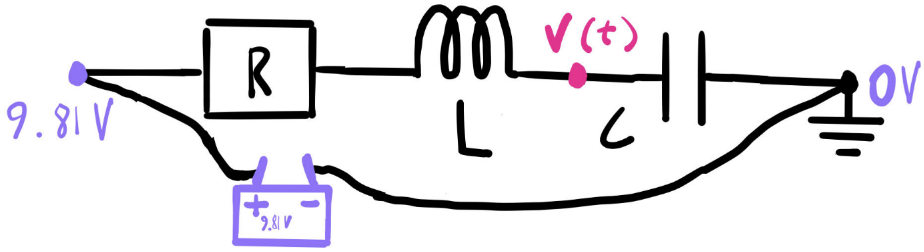
Initialkravene $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ betyr at vi setter i gang systemet fra den posisjonen der fjæren hverken er komprimert eller strukket. Du kan tenke at vi jekker opp bilen til det punktet det ikke er noen vekt på fjæren, og så sjekker vi hvordan systemet reagerer ved å slippe den raskt ned igjen, for eksempel ved å ta jekken brått vekk. Her er plot av løsninger for $\mu = 1/2$ (blå), $\mu = 1$ (oransje), $\mu = 3/2$ (grønn), $\mu = 4$ (rød), $\mu = 5/2$ (lilla) og $\mu = 3$ (brun):



Det er vanlig å kalle de tre tilfellene $\mu < 2$, $\mu = 2$ og $\mu > 2$ for **underkritisk dempet**, **kritisk dempet** og **overkritisk dempet**, henholdsvis. Dette korresponderer til de tre løsningsvariantene.

$\boxed{15}$ Omtrent hvilken verdi for μ tror du EU-kontrolløren vil ha for å godkjenne demperen?

Fordelen med å kjenne til et slikt fysisk eksempel som demperen over, er at historien kan gjenbrukes. Har du skjønt spole, kondensator og motstand og Kirchhoffs spenningslov, skjønner du at dersom du plukker ut en hver fra skuffen din og kobler dem i serie med et batteri slik:

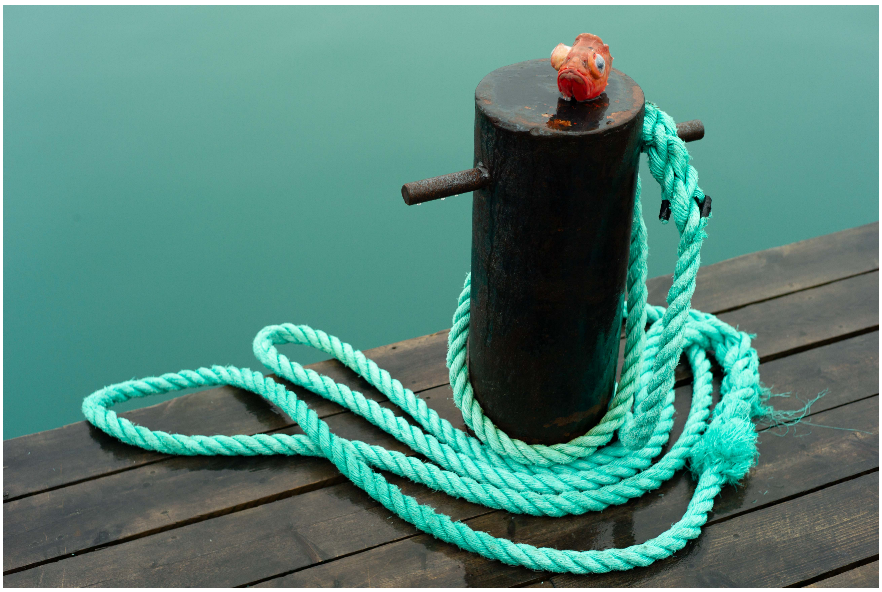


så er dette det samme som å løse initivalverdiproblemet

$$L\ddot{v}(t) + R\dot{v}(t) + \frac{1}{C}v(t) = 9.81.$$

Hele analysen kan altså gjenbrukes uten modifikasjon, man må bare skjønne at induktansen L korresponderer til massen m, den omvendte kapasitansen $1/C$ til fjærstivheten, og motstandsverdien R til dempingen. Alt dette forklarer forresten ideen bak en *analog datamaskin*.[4] Istedet for å bygge mange dyre fjærer og dempere og sette dem sammen for å teste, kan du sette sammen en ekvivalent RCL-krets og gjøre empirisk testing på den. Hvis du vil teste noen endringer i et eller annet, finner du bare ut hvordan RCL-kretsen må endres og så tester du den istedet. I gamle dager var dette et viktig ledd i arbeid med prototyper, spesielt innen luftfart, der alle komponenter er dyre å produsere.

$\boxed{16}$ Sett sammen RCL-kretsen over, og se om du greier å reprodusere plottet på forrige side med et oscilloskop. Spoler er ikke så lett å få tak i, men let på OV. Jeg har et par på kontoret. Har også en analog datamaskin tilgjengelig.



[4]`https://en.wikipedia.org/wiki/Analog_computer`

UKENS NØTTER

Vanligvis i reguleringsteknikk er man interessert i å styre et system mot en bestemt verdi. En av de grunnleggende måtene å gjøre dette på, kalles PID-regulator, se kap. 6 i Gravdahls kompendium. En PID-regulator funker slik at man måler avstanden r mellom en måling y av den ukjente x og en ønsket referanseverdi r, og så legger man på tre forskjellige pådrag basert på dette. Nå skal vi studere dette litt med penn og papir, så da setter vi $y = x$ for enkelhets skyld.

De tre heter P-regulator (P for "proporsjonal"):

$$u_P(t) = K_P(r - x)$$

I-regulator (I for "integral"):

$$u_I(t) = K_I \int_0^t r - x$$

og D-regulator (D for "derivert"):

$$u_D(t) = K_D(\dot{r} - \dot{x})$$

Alle regulatorene har hver sin unike respons på avviket, og systemets totale pådrag er summen av regulatorene:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t)$$

Denne skal inn på høyresiden i differensiallikningen:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u$$

Man styrer systemet ved å sette K_P, K_I og K_D slik at x styres mot r raskest mulig, men uten å sette regulatoren under for høyt press:
`https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller`

Når likningen er lineær og r er konstant, går det helt fint med penn og papir å regne ut hva x blir om man bestemmer seg for r. Skriv opp løsningen til

$\boxed{1}$ $\dot{x} + bx = u_P$

$\boxed{2}$ $\dot{x} + bx = u_P + u_D$

$\boxed{3}$ $\dot{x} + bx = u_P + u_D + u_I$

$\boxed{4}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$

$\boxed{5}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_D$

$\boxed{6}$ $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_I + u_D$ (denne klarer du nok ikke, men du kan jo alltids prøve)

Ziegler-Nichols' metode er en sjalabaismetode for å tune PID-regulatorer.[5] Den består i å først sette $K_I = K_D = 0$ og så sette K_P slik at man får stabile oscillasjoner. Så skrur man opp K_I og K_D til det ser bra ut.

$\boxed{7}$ Sett $K_I = K_D = 0$ og finn K_P slik at $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$ har stabile oscillasjoner.

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Ziegler-Nichols_method`