1 - 5 - DIFFERENSIALLIKNINGER II - LF

$\boxed{1}$ Spenningen over alle kretselementene må summere til null, så om $x(t)$ er strømmen i kretsen, må

$$L\dot{x} + Rx + \frac{1}{C}\int x = 0.$$

Integrallikninger skal vi ikke lære å løse, så la oss derivere hele greia, og få

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = 0.$$

Sammenlikner du med kloss-og-fjær, ser du at det er samme likning, så strømmmen kommer til å oppføre seg som klossen. Induktansen L sitter på samme plass som massen m, så en stor spole med høy induktans vil gjøre samme nytten som en stor og tung kloss. Motstanden R sitter på samme plass som dempingen μ, og $1/C$ på samme plass som fjærstivheten k. Lav kapasitans gir mye spenning per ladning, så en kondensator med lav kapasitans vil oppføre seg som en stiv fjær.

$\boxed{2}$ Likningen blir

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0,$$

så den karaktistiske likningen blir

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

og

$$x(t) = e^{-t/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

$\boxed{3}$ Likningen blir

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0,$$

så den karaktistiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -1$$

og

$$x(t) = e^{-t}\left(c_1 t + c_2\right).$$

Det kom en ivrig person og spurte om hvordan man utleda denne løsningen, og går som følger. Gang differensiallikningen med e^t på begge sider

$$e^t(\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)) = 0$$

og observer at

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)e^t) = e^t(\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t))$$

slik at

$$x(t)e^t = c_1 t + c_2$$

og

$$x(t) = e^{-t}(c_1 t + c_2).$$

Trikset funker generelt - det er bare å gange med $e^{-a_1 t/2}$ og integrere to ganger.

$\boxed{4}$ Likningen blir

$$\ddot{x} + x = 0,$$

slik at

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

og

$$\lambda = \pm i$$

og

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

$\boxed{5}$ Likningen blir

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0,$$

så den karaktistiske likningen blir

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

og

$$x(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{5})t/2} + c_2 e^{(-1-\sqrt{5})t/2}$$

$\boxed{6}$ Løsningen til likningen er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$1 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$0 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir $c_2 = 0$. Løsningen blir

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{7}$ Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$1 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{8}$ Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$x_0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$v_0 = \dot{x}(t) = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

$\boxed{\text{9-11}}$ Disse blir identiske med 6-8.

$\boxed{12}$ Den homogene løsningen har vi allerede regna ut:

$$x_h(t) = e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

Den partikulære finner vi ved å gjette på at

$$x_p(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

og så sette denne inn i likningen for å finne $H(\omega)$. Vi gjør som foreslått, og får

$$\begin{aligned}
e^{i\omega t} &= \ddot{x}_p(t) + \dot{x}_p(t) + x_p(t) \\
&= H(\omega)(i\omega)^2 e^{i\omega t} + H(\omega)(i\omega)e^{i\omega t} + H(\omega)e^{i\omega t} \\
&= H(\omega)e^{i\omega t}\Big(-\omega^2 + i\omega + 1\Big)
\end{aligned}$$

slik at

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

og

$$x_p(t) = \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

den fulle løsningen er nå

$$\begin{aligned}
x(t) =& x_h(t) + x_p(t) \\
=& e^{-t/2}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1}.
\end{aligned}$$

Dette fremstår som litt corny på de fleste første gang de ser det, men det er bare å venne seg til. Vi bruker først $x(0) = 0$, og får

$$x(0) = c_1 + \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1} = 0,$$

slik at

$$c_1 = -\frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}.$$

Likeledes finner du c_2 ved å derivere og bruke $\dot{x}(0) = 0$. Det som er verdt å merke seg til nå, er to ting:

- Siden realdelen til γ er negativ og gir opphav til faktoren $e^{-t/2}$ i den homogene løsningen, dør den homogene løsningen ut ganske fort. Løsningen på tidsintervallet der den homogene løsningen fremdeles har noe å si, kalles **transienten**, og denne kan fortelle noe om hvordan systemet oppfører seg mellom to forskjellige påtrykte tilstander, for eksempel mellom bytte av to likespenningsnivåer dersom $x(t)$ er strømmen i en rcl-krets. Hvis du ikke er interessert i transienten, trenger du heller ikke den homogene løsningen.

- Hvis vi skal tilpasse initialkravene, ser du at dette ikke går uten den homogene løsningen. Dette blir omtrent som å si at dersom du er interessert i transienten, må du ha den homogene løsningen. Det er litt forskjellig fra fagfelt til fagfelt om transienten er interessant eller ikke. Jeg har en kamerat som er elektriker på skip, og han fortalte en gang at de hadde et problem med uønsket oscillerende transient mellom to spenningsnivåer på et klokkesignal, antagelig på grunn av en uønsket induktans eller kapasitans.

$\boxed{13}$ Lett! Den partikulære løsningen må være konstanten $x_p(t) = mg/k$, for om du setter denne inn i likningen får du $g = g$.

$\boxed{14}$ De homogene løsningene er regna ut i oppgave 2-5 over, alt som mangler å flytte løsningene opp til korrekt høyde med $x_p(t) = g$.

$\boxed{15}$ Jeg har ikke jobba på bilverksted, men setter pengene mine på $\mu \approx 2$, altså kritisk dempet. For lite demping gir oscillasjoner, og da vil bilen hoppe og sprette etter hver dump. For mye demping vil gi bilen langvarig slagside etter hver dump.

$\boxed{16}$ Jeg skal prøve dette en gang, men har ikke kommet så langt ennå.