1 - 1 - TALL - LF

$\boxed{0}$ Dersom $x(t) = e^{\lambda t}$, er $\ddot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, slik at likningen blir

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 1\right) = 0,$$

som impliserer at $\lambda^2 + 1 = 0$ siden eksponensialfunksjonen aldri blir null. Denne likningen har ingen reell løsning, derav resten av denne økten.

$\boxed{1}$ Det finnes ingen hele tall slik at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Dette kan vi bevise som følger. Anta at det finnes hele tall m og n slik at likningen over holder. Vi kan anta at m og n ikke har noen felles faktorer, for hvis de hadde hatt det, kunne vi bare forkortet brøken til de ikke lenger hadde det. Vi ganger nå hele likningen med n, og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, på da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n.

Eksemplet over illustrerer at dersom du har et kvadrat med sidekant 1, finnes det ikke noe rasjonalt tall som beskriver diagonalens lengde. Majoriteten av alle mennesker på jorden trenger matematikk først og fremst som et redskap for presis kvantifisering av verden rundt oss, så dette er rett og slett ikke bra nok. Eksemplet over har vært kjent for menneskeheten i flere tusen år. Det er lett å utvide argumentet til å vise at for eksempel $\sqrt[3]{2}$ også ikke kan skrives som en brøk. De aller fleste tall kan faktisk ikke skrives som en brøk.[1] For å sette dette i sammenheng med forrige oppgave, så kan vi like gjerne si at likningen

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

ikke har noen rasjonal løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Akkurat som $\lambda^2 - 2 = 0$ ikke har rasjonal løsning, har ikke

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

noen reell løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{C}$, og nå kan vi enkelt og grei si at løsningen er $2i$ siden $(2i)^2 = 2i \cdot 2i = 4 \cdot i^2 = -4$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set

$\boxed{3}$ Løser vi likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i,$$

slik at

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)\,(x + 1 - i)$$

(Gang ut og sjekk at det stemmer.)

$\boxed{4}$ Vi beregner

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i \\ &= -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} \\ &= \frac{22}{41} + \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Vi ganger sammen komplekse tall slik:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deler dem slik:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Utledning av formlene for addisjon og subtraksjon er trivielle.

$\boxed{7}$ Her er det bare å gange oppe og nede med $\overline{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$\boxed{8}$ La oss ta for eksempel $z = 1 - 2i$. Da blir

$$\begin{aligned} iz &= 2 - i \\ i^2 z &= -z = -1 + 2i \\ i^3 z &= -iz = -2 + i. \end{aligned}$$

Vi kan egentlig fortsette litt til. Siden $i^4 = 1$, får vi

$$\begin{aligned} i^4 z &= z = 1 - 2i \\ i^5 z &= iz = 2 - i \\ i^6 z &= i^2 z = -2 + i \\ &\vdots \end{aligned}$$

og slik går nu dagan. For å konkludere: potenser av i repeterer seg selv slik:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ &\vdots \end{aligned}$$

og vi ser tydelig at det å gange med i det samme som å rotere nitti grader mot klokken i det komplekse planet.

$\boxed{9}$ Vi beregner

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2,$$

slik at

$$z/|z| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Nå kunne jeg beregna alle disse på kartesisk form, men ideen med oppgaven er å være et frempek på at vi kan skrive

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pi i/3}$$

og så er det bare å se at

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k = e^{k\pi i/3},$$

og at denne repeterer seg på samme måte som i forrige oppgave, men med periode på seks istedet for fire, siden argumentet er seksti grader istedet for nitti.

$\boxed{10}$ På samme måte er det å gange med

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pi i/3}$$

det samme som å rotere seksti grader i det komplekse planet, så du får seks forskjellige verdier av $z^k w$.

$\boxed{11}$ La $z = a + bi$. Vi beregner

$$|z^2| = \sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Gjør du det samme med z^3 vil du se at $|z^3| = |z|^3$.

$\boxed{12}$ Denne er skikkelig artig. Hvis vi tenker at vi får lov til å derivere e^{it} slik som andre eksponensialfunksjoner, er

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it},$$

og vi ser at dette er en løsning av $\dot{x} = ix$. Men

$$\frac{d}{dt}\cos t + i\sin t = -\sin t + i\cos t = i\left(\cos t + i\sin t\right),$$

så denne passer visst også i likningen. Nå går det an å vise at dette problemet har entydig løsning dersom du spesifiserer initialkrav (her må du slå opp i en mer avansert bok, for eksempel Schaeffer og Cain), så da må det vel kanskje være slik at

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

(Her har jeg brukt initialkravet $x(0) = 1$.)

$\boxed{13}$ Vi antar vi kan derivere med brøkregelen som vanlig selv om det står en i her og der, og får

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{e^{i\theta}}\right) = \frac{\left(-\sin\theta + i\cos\theta\right)e^{i\theta} - i\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)e^{i\theta}}{e^{2i\theta}} = 0$$

slik at

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{e^{i\theta}} = C$$

eller

$$\cos\theta + i\sin\theta = Ce^{i\theta}.$$

Setter vi inn $t = 0$ på begge sider, får vi $C = 1$, slik at

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

$\boxed{13}$ Vi beregner

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}e^{i\theta} &= \Big(\cos\alpha + i\sin\alpha\Big)\Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big) \\ &= \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta + i\cos\alpha\sin\theta + i\cos\theta\sin\alpha \\ &= \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta) = e^{i(\alpha+\theta)} \end{aligned}$$

$\boxed{15}$ Argumentet til $z = 1 + i$ er $\pi/4$ modulus er 2, så vi kan skrive

$$z = 2e^{\pi i/4}.$$

Argumentet til $w = 1 + \sqrt{3}i$ er $\pi/3$ og radien 2, så vi får

$$x = 2e^{\pi i/3}.$$

$\boxed{16}$ La $z = re^{i\theta}$ og $w = se^{i\alpha}$. Dersom man multipliserer komplekse tall, er det bare å gange radiene og legge sammen argumentene, siden

$$z \cdot w = re^{i\theta} \cdot se^{i\alpha} = rse^{i(\theta+\alpha)}.$$

For divisjon er det likeledes bare å dele radiene på hverandre og subtrahere argumentene:

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}e^{i(\theta-\alpha)}$$

$\boxed{17}$ Dette er bare fancy måter å skrive opp ting på:

$$\begin{aligned} e^{\pi i/2} &= i \\ e^{\pi i} &= -1 \\ e^{3\pi i/2} &= -i \\ e^{2\pi i} &= 1 \end{aligned}$$

$\boxed{18}$ Siden $\cos(-\theta) = \cos\theta$ og $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ er det bare å substituere $-\theta$ for θ og få

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

$\boxed{19}$ Legg sammen $e^{i\theta}$ og $e^{-i\theta}$.

$\boxed{20}$ Trekk dem fra hverandre.

$\boxed{21}$ Fra nå av når du har et vanskelig integral med sinus- og cosinusfunksjoner, kan du bare skrive om og integrere eksponensialfunksjoner istedet. Dette er som regel mye enklere.

$\boxed{22}$ Lett:

$$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = \overline{r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = re^{-i\theta}$$

$\boxed{23}$ Her er det bare bare å substituere $i\theta$ for θ og så får du sinus og cosinus ut på direkten:

$$\begin{aligned} \cosh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \\ \sinh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i\sin\theta \end{aligned}$$

Det går forresten andre veien og:

$$\begin{aligned} \cos(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh\theta \\ \sin(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = -i\sinh\theta \end{aligned}$$

For å vise at

$$\begin{aligned} \cos\left(a + bi\right) &= \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b \\ \sin\left(a + bi\right) &= \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b \end{aligned}$$

er det bare å bruke formlene

$$\begin{aligned} \cos\left(a + b\right) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin\left(a + b\right) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{aligned}$$

som du lærte på skolen, og substituere ib for b, og bruke likningene over.

$\boxed{24}$ Siden

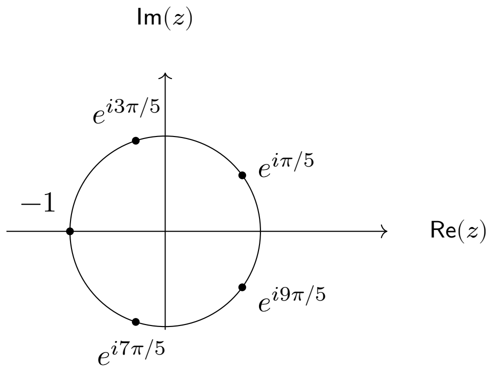
$$-1 = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5+2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for $0 \leq m \leq 4$. Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp.

$$\begin{aligned}
m = 0 : &\quad e^{i\pi/5} (= \sqrt[5]{-1}) \\
m = 1 : &\quad e^{i3\pi/5} \\
m = 2 : &\quad e^{i5\pi/5} (= -1) \\
m = 3 : &\quad e^{i7\pi/5} \\
m = 4 : &\quad e^{i9\pi/5}
\end{aligned}$$



Femterøttene til -1

$\boxed{25}$ Et polynom er gitt ved

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

og dersom alle a-koeffisientene er reelle, kan vi beregne

$$\begin{aligned}
\overline{p(z)} =& \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
=& \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
=& \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\
=& a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = p(\overline{z})
\end{aligned}$$

Dersom vi har $p(z) = 0$, må vi også ha $p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = 0$, så dersom imaginærdelen til en rot er forskjellig fra null, må det finnes en annen rot med samme realdel og motsatt fortegn på imaginærdelen.

$\boxed{26}$ Det er ikke så lett å faktorisere et tilfeldig tredjeordens polynom med mindre man husker $abcd$-formelen.[2] Det gjør ikke vi, men vi ser jo at $p(1) = 0$, så vi kan dele ut $x - 1$ og få

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

Polynomdivisjonen vi alle lærte på barneskolen synes jeg er knotete. Det er mye bedre å sammenlikne ordner av x på hver side av likningen, og se at

$$\begin{aligned}
x^3 : &\quad a &= 1 \\
x^2 : &\quad -a + b &= 1 \\
x : &\quad -b + c &= 1 \\
1 : &\quad c &= 3
\end{aligned}$$

som gir $b = 2$, slik at

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)\left(x^2 + 2x + 1\right) = (x-1)(x+1)^2.$$

Dette kalles et lineært likningssystem, og vi skal studere slikt skrømt grundig om et par uker.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation

$\boxed{27}$ Samme her, vi ser jo at $p(1) = 0$, så vi kan dele ut $x - 1$ og få

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

Sammenlikner vi ordner av x på hver side av likningen, får vi

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad a \quad &= 1 \\ x^2 &: \quad -a + b \quad &= 1 \\ x &: \quad -b + c &= 0 \\ 1 &: \quad c &= 2 \end{aligned}$$

som gir $b = 2$, slik at

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right) = (x-1)(x+1+i)(x+1-i).$$

Det sies at Lars Onsager fikk til å utlede formelen for løsning av tredjegradslikninger på egenhånd da han var tolv år gammel. Det sies også at da de ringte ham for å fortelle ham at han hadde fått nobelpris, spurte bare “I hva?”. Han visste nemlig at han hadde gjort store nok bidrag til å få nobelprisen i både fysikk og kjemi.