1 - 13 - REKKER II

Jeg har en rønne på et nes helt nord i Nordland. Neset ligger på grensen mellom Øksnes og Bø[1] og heter Revneset. [2] Det er hverken vei, vann, strøm eller kai der. Alt ruster, og det best å ikke skade seg eller gjøre noe dumt. Tre dyre kameraer har endt sine dager i fjæra på Revneset.

En påske satt jeg på Revneset og var til nødt til å finne vinkelen på taket, og hadde ikke tilgang på kalkulator med de inverse trigonometriske funksjonene.

$\boxed{1}$ Jeg estimerte den ene kateten til 15 og den andre til 29. (Enhetene spiller ingen rolle.) Finn takvinkelen på en kalkulator uten arctanknapp.

[1] Også kjent som "Norges Monaco".

[2] Uttales "Rævneset". Jeg prøvde lenge å si "Revneset" men fikk så hatten passet av de lokale, og måtte til slutt krype til korset og justere uttalen.

Skal man finne en vinkel fra to kateter uten arctanknapp, er det nyttig å vite at

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Denne typen formel kalles en **potensrekkeutvikling**, og ble oppdaget av Isaac Newton. Newton måtte regne ut alt med blyant og papir, så det trengs ikke mye fantasi til for å skjønne at en slik formel kan være gull verdt på en øde øy. [3]

Hvor i all verden kommer denne formelen fra? Det finnes faktisk liknende formler for de fleste funksjoner du kjenner til; for eksempel er eksponensialfunksjonen gitt ved

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La oss se litt på denne. Du synes sikkert dette var rart. Rare formler trenger rare utledninger. Her er analysens fundamentalteorem på eksponensialfunksjonen, skrevet på en rar måte:

$$e^x = 1 + \int_0^x e^s \, ds$$

$\boxed{2}$ Nå tar du en delvis integrasjon på integralet på høyre side. Men ikke slik du er vant til. Du skal la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Ikke tenk, bare gjør som jeg sier. Om du gjør det riktig, skal du ende opp med likningen

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x - s) e^s \, ds.$$

[3] Etter å ha regnet ut arcustangens til $15/19$ på denne måten på telefonen og blitt veldig fornøyd med meg selv, oppdaget jeg at at man på Iphone 5 får tilgang på arctanknappen ved å legge telefonen over på siden.

3 Gjenta prosessen, men nå med $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$. Holder du tungen beint i munnen, skal du ende opp med

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^s \, ds.$$

4 Bruk induksjon til å fortsette prosessen, og utlede at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds.$$

Uttrykket

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

kalles det n-**te ordens taylorpolynomet** til eksponensialfunksjonen. Disse utgjør en familie av polynomer som approksimerer funksjonen.

5 Plott eksponensialfunksjonen og noen av taylorpolynomene i samme figur.

Jo høyere n desto bedre approksimasjon. Hvor god er den egentlig? La oss tenke at du sitter på en øde øy uten kalkulator og lurer på verdien til eulertallet $e \approx 2.71828182845904523536\cdots$.

6 Bruk taylorpolynomet til å approksimere e. Hvor mange ledd må du ha med for å få med alle desimalene over?
(Du får lov til å bruke python.)

Formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^s \, ds$$

kan generaliseres på to forskjellige måter. For det første kan f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon, og for det andre trenger ikke den nedre integrasjonsgrensen i integralet være null. **Taylors teorem** sier at dersom f er en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x, er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s) \, ds$$

Dette kan du tenke på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, og det kan utledes på samme måte vi gjorde for eksponensialfunksjonen, men jeg skal ikke plage deg med det. Symbolet $f^{(n)}$ betyr den n-te deriverte til f, mens x^n betyr den vanlige n-te potensen til x. Dette kan være litt forvirrende i starten.

$\boxed{7}$ Denne formelen tror jeg nesten jeg kan garantere at du får bruk for, også i andre fag. Du kan like gjerne skrive den ned et par ganger. Bruk blyant og papir.

Det siste integralleddet kalles gjerne **feilen**. Tar vi vekk denne, står vi igjen med

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Uttrykket på høyresiden kalles f sitt **taylorpolynom om av orden** n **om punktet** a. Dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinpolynom istedet**.

$\boxed{8}$ FInn maclaurinpolynomene til sinusfunksjonen og cosinusfunksjonen.
(Hint: Se Arnes bok kap. 6.3.)

På forrige side skrev jeg opp Taylors teorem med feilledd på integralform, fordi det er dette som detter ut når du tar utgangspunkt i analysens fundamentalteorem og delvisintegrerer igjen og igjen. Men det finnes en alternativ form. Under de samme forutsetningene på f finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Akkurat som den første varianten kan tenkes på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, kan denne varianten tenkes på som en generalisering av sekantsetningen.[4] De to variantene er nesten ekvivalente; forskjellen mellom dem er formen på feilleddet. Kravet om at f er $n+1$ ganger deriverbar kan slakkes i den første versjonen, men dette er litt for teknisk til at jeg vil plage deg med det. Nå begynner det å bli mulig å forklare hvorfor Newtons metode konvergerer kjappere enn fikspunktiterasjonen.

$\boxed{9}$ Bruk Taylors teorem $n = 0$ til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

$\boxed{10}$ Studer konsekvensene av likningen i forrige oppgave. Ta stilling til om du synes det er en fornuftig påstand at fikspunktiterasjonen kan tenkes å konvergere dersom $|g'| < 1$. Kan det tenkes at fikspunktiterasjonen konvergerer raskt om $|g'|$ veldig liten?

Ok, nå blir det sikkert litt forvirrende. Newtons metode er faktisk en fikspunktiterasjon;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

Vanlig fikspunkt har **lineær konvergens**, mens Newton har **kvadratisk konvergens**.

$\boxed{11}$ Bruk Taylors teorem med $n = 1$ til å vise at det (dersom $f'(r) \neq 0$) finnes en s slik at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2.$$

[4]Merk at for $n = 0$ er dette bare sekantsetningen: `https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem`

Nå skal vi se på hva som skjer dersom $n \to \infty$ i Taylors formler.

$\boxed{12}$ Finn maclaurinpolynomene til

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Vi må selvfølgelig kreve $x \in (-1, 1)$. Ser dette kjent ut?

En generalisering av den geometriske rekken kalles **potensrekke**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

I de fleste tilfeller du kommer til å støte på, er

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

for en eller annen kjent funksjon f. Potensrekken kalles i så fall **taylorrekke**, og dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinrekke**. Etter alt du har fiklet med denne økten, kommer det kanskje ikke som noe sjokk at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{og} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{og} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

I motsetning til den geometriske rekken, er disse uttrykkene faktisk gydlige for alle x. Potensrekker kan konvergere for noen verdier av x og divergere for andre, eller konvergere for alle x eller divergere for alle x. Det kommer an på koeffisientene c_n. Mengden av x slik at potensrekken konvergerer kalles **konvergensområdet**. Som regel er forholdstesten en hit her. Finn konvergensområdet til

$\boxed{13}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\boxed{14}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\boxed{15}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{16}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$ $\boxed{17}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(Hint: Se Arnes bok kap. 6.4 for eksempler.)

Hvis du er dreven i potensrekker, blir det banalt å regne ut en del grenseverdier. Finn

$\boxed{18}$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ $\boxed{19}$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos \theta}{\theta}$ $\boxed{20}$ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x - \sin x}$

Du kan også stort sett integrere og derivere ledd for ledd og herje fra deg. (Arnes bok kap. 6.5.)

$\boxed{21}$ Uttrykk standardnormalfordelingsintegralet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2}\, dx$$

som en taylorrekke om 0, og skriv en kode som regner ut partialsummer. Sammenlikne kjøretid med trapesmetodekoden din fra i høst. Hva går kjappest for et gitt presisjonsnivå? (Hint: Søk opp "python cpu time" på nett om du ikke har gjort dette før.)

Det er for øvrig lett å finne ut hvor god approksimasjon en partialsum er når rekken er alternerende: `https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_series`

$\boxed{22}$ Hvor mange ledd må du ta med over for å approksimere integralet med en feil på under 10^{-2}?

Ofte kan man finne ut hva en rekke konvergerer til ved å gjenkjenne at det er en taylorrekke evaluert i et eller annet punkt. (Se Arnes bok kap. 6.6.) Finn

$\boxed{23}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\boxed{24}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ $\boxed{25}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!}$ $\boxed{26}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\boxed{27}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Det er faktisk slik at dersom A er en kvadratisk matrise, er

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + A^2/2 + A^3/6 + \cdots$$

en naturlig definisjon på e^A.

$\boxed{28}$ Nå vet du hvordan du skal te deg om du skriver opp løsningen til $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ som $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$.

Når du sitter og koser deg foran peisen eller er en tur hos Snåsamannen, kjenner du varmestrålingen. Dette er lavfrekvent elektromagnetisk stråling, altså elektromagnetiske bølger med bølgelengder som er for lange til å se med det blotte øye. Du kan se flammen i peisen fordi flammen stråler ut elektromagnetiske bølger i det synlige spekteret,[5] men selve peisen ser du fordi peisens overflate reflekterer elektromagnetisk stråling som kommer fra et annet sted - strålingen fra peisen en blanding av stråling peisen genererer selv og reflektert stråling fra overflaten. Et svart legeme[6] er en gjenstand som absorberer all elektromagnetisk stråling som treffer den, slik at legemets elektromagnetiske utstråling ikke er tilgriset av elektromagnetiske bølger som reflekteres av overflaten. Et svart legeme stråler ut litt av alle bølgelengder, og energien er fordelt på bølgelengdene ved noe som kalles planckfordelingen. Denne er temperaturavhengig og er gitt ved

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \qquad \text{eller} \qquad I(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2}\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

der

- λ er bølgelengden
- T er temperaturen
- h er Plancks konstant
- c er lyshastigheten i vakuum
- k er Boltzmanns konstant

Lord Rayleigh hadde tidligere foreslått formelen

$$B(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

som stemmer ganske bra for lange bølgelengder, men bommer totalt for korte bølgelengder. Formelen er utledet med fundering i klassisk fysikk, og skivebommen for korte bølgelengder kalles "den ultrafiolette katastrofen". Planck kom frem til den korrekte fordelingen ved å anta at energi måtte være kvantifisert, og dette regnes som begynnelsen på kvantefysikken.

$\boxed{29}$ Rayleighs uttrykk er en approksimasjon til Plancks. Hvordan?

Integralet

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, T)\, d\omega$$

forteller deg hvor mye av energien som stråles ut mellom frekvensene ω_1 og ω_2. Setter du $\omega = \hbar\omega/kT$ i Planckfordelingen får du

$$\frac{k^4T^4}{\hbar^3\pi^2c^3}\frac{x^3}{e^x - 1}.$$

$\boxed{30}$ Nå er det faktisk mulig å beregne den totale utstrålingen

$$\frac{k^4T^4}{\hbar^3\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

med teknikkene vi har lært denne uken.

[5] Synlig lys er omtrent 380-750nm.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Black_body`

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Finn konvergensområdet for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

$\boxed{2}$ Finn taylorrekken til $f(x) = x \ln x$ om $x = 1$. For hvilke x konvergerer denne?

Vi har tidligere sett at Newtons metode stort sett konvergerer mye kjappere en "vanlig fikspunkt". Uttrykkene i oppgave 10 og 11 over kalles feilestimater. De forteller noe om hvordan feilen endres fra iterasjon til iterasjon. Vanlig fikspunkt har linæer konvergens, siden feilen i iterasjon $n + 1$ er proporsjonal med feilen i iterasjon n, mens Newton har kvadratisk; feilen i iterasjon $n + 1$ er proporsjonal med kvadratet av feilen i iterasjon n, Dette kan imidlertid bryte sammen.

$\boxed{3}$ Prøv først å finne roten $r = 1$ til

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

og til

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x-1)^2(x-3)(x-4)$$

med Newtons metode. Hva skjer?

UKENS LIFE HACK

På skredkurs lærer man at den minste vinkelen i en rettvinklet trekant der den ene kateten er dobbelt så lang som den andre er om lag 26.6 grader. Dette er nyttig å vite siden en slik trekant er lett å lage med skistavene, og det sjelden går skred i terreng med helning på under 30 grader.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

$\boxed{1}$ Bruk rekkeutviklingen til sinusfunksjonen til å skrive

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

som en alternerende rekke, og finn en tilnærming til integralet ved å legge sammen de to første leddene i rekken. Gi en øvre skranke for feilen.

$\boxed{2}$ Vis at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergerer for $-1 \leq x \leq 1$. og gjør rede for at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

i rekkens konvergensområde.

$\boxed{3}$ Gjør rede for at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

$\boxed{4}$ Gjør rede for at

$$\frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$