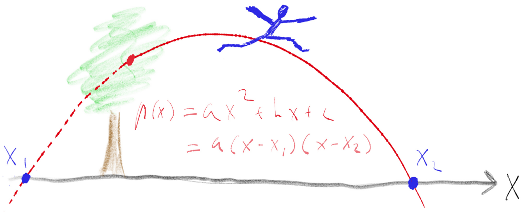
TMA4101/4106/4111/4121

1 - 11 - LIKNINGER

Fysiske modeller formuleres stort sett som likninger. Dersom du kun påvirket av tyngden hopper ut av et tre får du et helt greit estimat for landingspunktet ved å løse en annengradslikning.

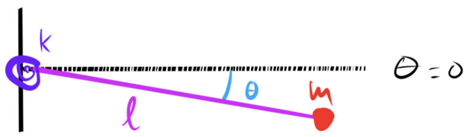
$\boxed{0}$ Sett opp likninger og finn landingspunktet gitt startposisjon og startfart. Tyngdeakselerasjonen på campus er $g = 9.8214675$. (Denne er målt ganske nøyaktig i kjelleren på Institutt for Fysikk.)



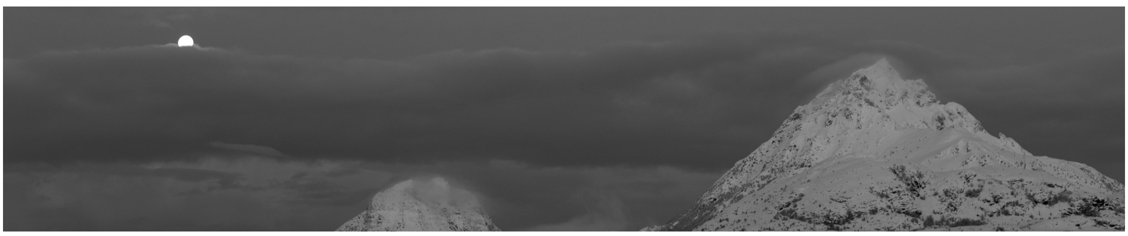
På skolen trente du mye på å løse likninger. Men denne tolv år lange løsningstreningsleiren gir et skjevt bilde av virkeligheten; de fleste likninger som detter ut av praktiske anvendelser er umulige å løse for hånd. Under ser du et bilde av en torsjonsfjær.[1] Dette er en slik fjær du finner i musefeller og i gamle dører og den leverer et moment[2] som er proporsjonalt med utslagsvinkelen θ.

Vi fester en horisontal stang med lengde l i en vegg med en torsjonsfjær med stivhet k og legger en vekt m ytterst på stangen. Gravitasjonskraften fra vekten gir da dreiemomentet $ml\cos\theta$. Hvis vi har lyst til å regne ut hvor langt ned vekten drar stangen, må vi finne punktet der momentet fra fjæren balanserer momentet fra vekten:

$$k\theta = ml\cos\theta$$



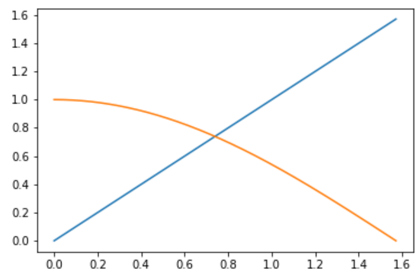
$\boxed{1}$ Vi setter $ml/k = 1$ så det blir greit. Prøv å løse likningen $\theta = \cos\theta$.



[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_spring

[2] Dreiemoment har er kraft ganger arm og har benevning Nm. Svigerfaren min er tannlege og i kjeften på folk skrur man til med om lag 30 Nm. Hjulbolten på en bil pleier å være 90-120 Nm, og en vanlig drill leverer 30-50. Et tikilos lodd i enden av en én meter lang vannrett latmannsarm gir 98 Nm.

Her er et plot av funksjonene $f(\theta) = \theta$ og $g(\theta) = \cos\theta$. De to funksjonene krysser hverandre, så løsningen til likningen eksisterer, men den er ikke god å finne uten en kalkulator eller en datamaskin. Løsningen kalles *dottietallet* og er oppkalt etter en professor i fransk. Professor Dottie var gift med en matematiker, og oppdaget at hvis hun skrev inn et tilfeldig tall på kalkulatoren hans og trykket gjentatte ganger på cosinusknappen, endte hun alltid opp på omtrent 0.739085.



$\boxed{2}$ Gjenta Dotties eksperiment i Python.

Før vi går videre kan vi ta et sitat av en stor matematiker:

> *"It is impossible to exaggerate the extent to which modern applied mathematics has been shaped and fueled by the general availability of fast computers with large memories. Their impact on mathematics, both applied and pure, is comparable to the role of the telescopes in astronomy and microscopes in biology."*
>
> *— Peter Lax, Siam Rev. Vol. 31 No. 4*

Konseptet "datamaskin som kan generere prediksjon" er ganske gammelt,[3] og et helt uunværlig verktøy for å løse små og store matematiske problemer. En av de klassiske teknikkene for å løse uløselige likninger kalles **fikspunktiterasjonen**, og det var denne Professor Dottie snublet over ved å leke med cosinusknappen. Hun oppdaget at rekursjonen

$$\theta_{n+1} = \cos\theta_n$$

lager en følge som sakte men sikkert konvergerer mot $L \approx 0.739085$ uansett hvor man starter.

Fikspunktiterasjonen har vært i bruk i tusener av år,[4] og er et eksempel noe som kalles en **numerisk likningsløser**. Dette er noe som produserer en følge som jobber seg inn mot løsningen til en likning. Det er nyttig å kjenne til numeriske likningsløsere, slik at man ikke blir stående fast bare fordi man støter på en likning som er umulig å løse med penn og papir.

$\boxed{3}$ Gjenta professor Dotties eksperiment i Python, men legg inn noe som teller hvor mange iterasjoner det tar før det stabiliserer seg på $L \approx 0.739085133215161$.

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Antikythera_mechanism
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Fixed-point_iteration

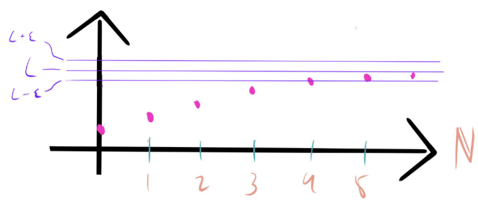
Nå er det antagelig på tide å innføre en ny type funksjon som kalles en **følge**. Dette er en funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vanligvis er følgen gitt ved en **rekursjon**:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

og en initialverdi x_0. Spørsmålet er nesten alltid hva følgen konvergerer til. Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er **konvergent** dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Dette er en definisjon som får mange studenter til å fryse på ryggen. Men det er dessverre den eneste måten å gjøre det på slik at alt blir presist. Tenk på L som løsningen til $x = \cos x$, og på ϵ som vilkårlig valgt bitte lite tall. Konvergens betyr at alle ledd etter ledd nummer N ligger nærmere L enn ϵ, og at du kan finne en slik N uansett hvor liten ϵ velges.



Fikspunktiterasjonen er gitt ved rekursjonen

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

og den produserer en følge som av og til konvergerer mot en løsning av likningen

$$x = g(x).$$

Om fikspunktiterasjonen konvergerer til noe fornuftig, kommer an på g og på x_0. Nøyaktig når den konvergerer, skal vi komme tilbake til. Nå tar vi noen flere eksempler.

$\boxed{4}$ Likningen

$$x \ln x = 1$$

kan skrives om til formen

$$x = g(x)$$

på minst to forskjellige måter. Finn de to åpenbare, og prøv fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

på begge. Hvor mange iterasjoner før du når **maskinpresisjon**, altså $\epsilon \approx 10^{-16}$?[5]

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Double-precision_floating-point_format

Det finnes mange numeriske likningsløsere. En annen klassiker er **Newtons metode**. Denne baserer seg på at likningen som skal løses er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter altså etter nullpunkter til funksjoner, og er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

$\boxed{5}$ Løs likningen $x = \cos x$ med Newtons metode og tell antall iterasjoner slik som i oppgave 3. (Du må skrive om likningen litt.) Hva ser du?

Det første elementet x_0 i følgen kalles **initialgjetningen**. Alle numeriske likningsløsere trenger en slik for å komme igang. Noen numeriske likningsløsere er mer sensitive på initialgjetningen enn andre, og forskjellige numeriske likningsløsere oppfører ganske ulikt.

$\boxed{6}$ Løs likningen $x = \cos x$ med både Newtons metode og fikspunktiterasjonen og eksperimenter med forskjellige initialgjetninger. Hva skjer om $x_0 = 4$ eller større?

$\boxed{7}$ Gjenta for $x = \ln x$.

Nå tar vi en oppgave fra den virkelige verden. Denne er visst en klassiker borte på maskin.

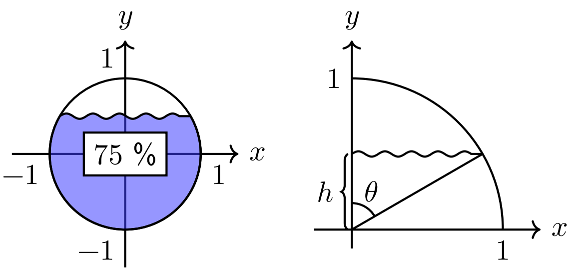
$\boxed{8}$ La h være vannstanden i et kloakkrør med radius 1 m, og la $h = \cos\theta$.

Når vannet fyller 75 % av rørets tverrsnitt, løser θ ligningen

$$2\sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0.$$

Finn vannstanden h med fikspunktiterasjonen og Newtons metode.

(Figur: Marius Thaule.)



$\boxed{9}$ Likningen $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ har en reell og to komplekse røtter. Du kan finne disse numerisk, men du må fortelle Python at du har til hensikt å jobbe med komplekse tall og skrive initialgjetningen som $1 + 0 * 1j$. Prøv å finne alle.

Det er lett å finne eksempler på uløselige likninger fra anvendelser. Det er jo slik at de alle fleste likninger er helt uhåndterlige med penn og papir.

$\boxed{10}$ Dersom man skal finne likevektskonsentrasjoner, ender man ofte opp med å måtte løse en ikkelineær likning. For eksempel må man løse likningen

$$K_c = \frac{16x^3}{(1-4x)^2}$$

dersom man skal finne likevektskonsentrasjonene i

$$2\,\mathrm{NOCl(g)} \rightleftharpoons 2\,\mathrm{NO(g)} + \mathrm{Cl_2(g)}$$

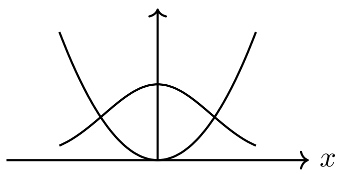
Nå er det i prinsippet mulig å regne ut løsningen av en tredjegradslikning for hånd, men det er enklere å kjøre en numerisk likningsløser. Prøv.

$\boxed{11}$ Når man løser partikkel-i-boks med ikke helt tette vegger,[6] støter man gjerne på likningen

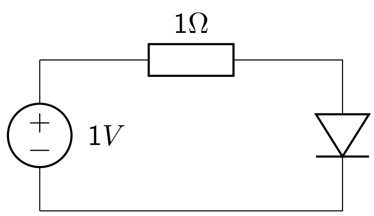
$$\tan\sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}.$$

Finn x.

$\boxed{12}$ Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren, støter man visst på en situasjon der man må finne skjæringspunktet mellom kurvene gitt ved $y = \exp(-ax^2)$ og $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter. Finner skjæringspunktene med en numerisk likningsløser når $a = b = 1$. Hvorfor er det kun nødvendig å beregne det ene skjæringspunktet?



$\boxed{13}$ Det er lett å finne frem til en krets der det vi må ty til numeriske likningsløsere. Dere som går elsys eller kyb har allerede koblet den opp i ADE:



Vi er mest interesserte i den matematiske oppførselen til likningen, og derfor setter vi både $\frac{q}{nkT} = 1$ og $I_0 = 1$ slik at likningen blir

$$i(v) = e^v - 1$$

for det blir så greit. Kirchhoffs spenningslov gir likningen

$$1 = i + \ln(i+1)$$

for strømmen i kretsen. Finn strømmen.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_potential_well

Det finnes en klasse av funksjoner som er spesielt gunstige. De heter **polynomer**,[7] og er funksjoner på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Dersom $a_n \neq 0$ sier vi at polynomet har orden n. Det var Rene Descartes som introduserte denne notasjonen på 1600-tallet en gang. Fordelen med polynomer er at de er enkle å analysere. Tallene $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ kalles **koeffisientene**.

Vi sier at en tallmengde er algebraisk lukket dersom alle polynomer med koeffisienter fra tallmengden har et nullpunkt. Dette er ikke sant for $\mathbb{R}$, for eksempel finnes det ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

men den neste tallmengden i matryosjkaen vår, $\mathbb{C}$, er derimot algebraisk lukket. Jean-Robert Argand (en amatørmatematiker!)[8] beviste i 1806 at vi alltid kan faktorisere slik:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0.$$

Dette er altfor vanskelig å bevise for oss, men kan være artig å kjenne til fra tid til annen.

$\boxed{15}$ Vi vet jo at det kan være vanskelig å finne nullpunktene til et polyom, men nå vet vi ihvertfall at de finnes. Her kan numeriske likningsløsere være til hjelp. Faktoriser polynomet

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

$\boxed{16}$ Her er en oppgave som slenger ut noen spørsmål vi kan svare på mot slutten av semesteret. Polynomene

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

og

$$q(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$$

har begge nullpunkt i $x = 1$. Prøv å finne nullpunktene med Newtons metode med startverdi $x_0 = 1/2$, og noter deg hvor mange iterasjoner som trengs for både p og q.

[7]Studenter har flere ganger foreslått at jeg bytter fornavn til Poly.

[8]`https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra`

Her kommer en utledning av Newtons metode. Newtons metode baserer seg på at likningen er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter etter nullpunkter til funksjoner. La oss si at nullpunktet vi leter etter kalles r og at vi har en tilnærming x_0 til r, og så slår vi tangenten til f i x_0. Punktet der tangenten skjærer x-aksen, kaller vi x_1. Dette punktet kan vi finne ved å sette opp likningen for tangenten til f i x_0:

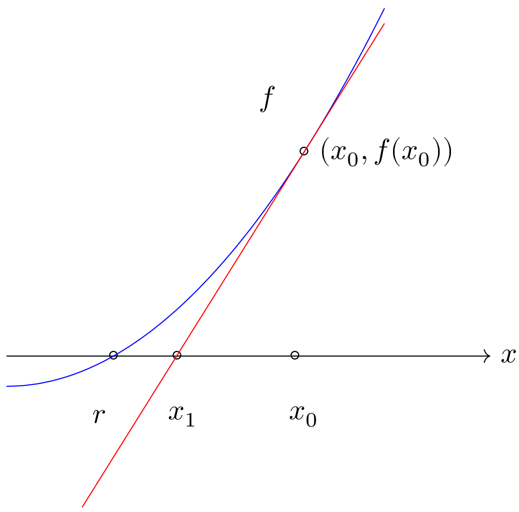
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

og så kreve at $y = 0$ i denne likningen:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Løser vi denne likningen for x_1, får vi at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



Dersom f og x_0 ser ut slik som i figuren, vil x_1 ligge nærmere nullpunktet enn x_0, og det trengs ikke så stor fantasi for å se at x_2 vil legge seg nærmere nullpunktet enn x_1. Newtons metode er definert som den rekursive følgen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

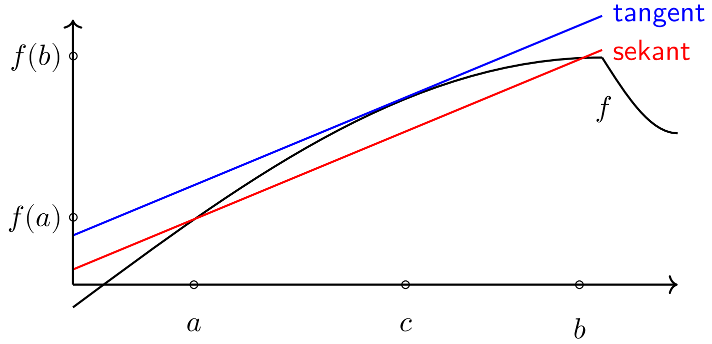
Denne utledningen er litt for vanskelig til at du og jeg ville klart å komme på det selv som nittenåringer. Derfor lager jeg heller en oppgave som heter

$\boxed{17}$ Denne utledningen kan du bli spurt om på eksamen og da må du kunne den.

Hvis du husker **sekantsetningen**, som sier at dersom en funksjon f er deriverbar på et intervall som inneholder a og b, finnes en c mellom a og b slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

er det mulig for deg å forstå slike ting som hvorfor fikspunktiterasjonen noen ganger konvergerer fort, noen ganger sakte, og noen ganger ikke i det hele tatt.



Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r, sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r, og vi ser nå at det kan være lurt å ha peiling på hvorvidt $|g'| \leq k < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør. Hvis $|g'| \geq 1$ kan det være det ikke konvergerer i det hele tatt.

$\boxed{18}$ I oppgave 4 over, var de to åpenbare omskrivningene $x = 1/\ln x$ og $x = e^{1/x}$. Bruk din nye kunnskap til å spå på forhånd (1) hvilken av disse omskrivningene som kommer til å funke og (2) hvilke startverdier som funker for den omskrivningen som funker.

En liknende analyse av Newtons metode vil forklare hvorfor denne som regel konvergerer fortere. Men denne analysen må vi vente med, for vi trenger litt mere maskineri først. Dette maskineriet kalles **Taylors teorem** og kommer nå snart.

La oss til slutt ta noen teoretiske greier. Her er en eksamensoppgave fra i fjor.

$\boxed{19}$ Skriv opp definisjonen på konvergent følge og vis at

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots\right\}$$

konvergerer til 1.

Studiet av alt som involverer ϵ og δ kalles **analyse**. Dette er det helligste fagfeltet innen matematikk. I analyse er det ikke så ofte at man gjør sånn som i oppgaven over og viser at en bestemt følge er konvergent, man tar heller og utleder teoremer

$\boxed{20}$ La $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ være konvergente følger. Vis at følgen $\{x_n + y_n\}$ konvergerer til summen av grenseverdiene til $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$.

og så bruker man dem:

$\boxed{21}$ Vis at

$$\left\{\frac{2(n+1)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \cdots\right\}$$

konvergerer til 2.

Oppgaven over kunne vi tatt med et annet teorem istedet:

$\boxed{22}$ La $\{x_n\}$ være en konvergent følge med

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

og la a være et reelt tall. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = ax.$$

Konvergens av komplekse følger er identisk med definisjonen av reelle følger, du bare tolker absolutt-verditegnet som kompleks absoluttverdi.

$\boxed{23}$ Gjelder teoremene i oppgave 20 og 22 for komplekse følger? Konvergerer denne:

$$\left\{\frac{n+i}{in}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad ?$$

UKENS NØTTER

1 Utled likningen

$$2\sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0$$

i kloakkrøroppgaven over.

2 Følgende oppgave illustrerer Georg Cantors konstruksjon av $\mathbb{R}$, nemlig ved å lage ekvivalensklasser av cauchyfølger.[9] Løs likningen

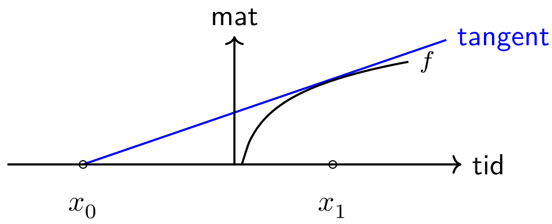
$$x^2 - 2 = 0$$

med Newtons metode, og svar på følgende to spørsmål:

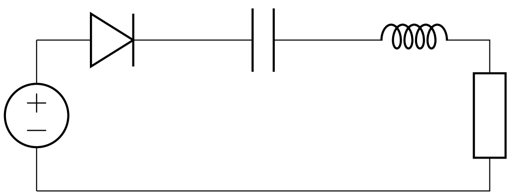
- Er det sant at $x_n \in \mathbb{Q}$ for alle n dersom $x_0 \in \mathbb{Q}$?
- Dersom $\{x_n\}$ konvergerer, konvergeres det mot et rasjonalt tall?

3 Følgende er en modell for matauk, og kalles marginalverditeoremet (marginal value theorem).[10] En stær mater ungene sine ved å plukke mark fra et sted i nærheten. La $x = x_0$ være tidspunktet den forlater redet, og $x = 0$ tiden den ankommer stedet der den plukker mark. Funksjonen f beskriver hvor mye mat den får med seg. Denne kurven flater ut når tiden øker, for etterhvert som stæren fyller nebbet med mark, blir det vanskeligere og vanskeligere å fange nye mark.

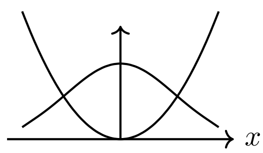
Stæren ønsker å maksimere forholdet mellom total tid borte fra redet og mengde hjembrakt mat. Tidspunktet $x = x_1$ når den setter nebbet hjemover, er tidspunktet når dette forholdet er maksimert. Vis at tangenten til f i x_1 skjærer x-aksen i x_0.



4 Finn strømmen:



Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator`
støter man på en situasjon der man må finne arealet under kurven $y = e^{-ax^2}$ og utenfor $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter.



5 Lag en funksjon som tar inn a og b, og beregner en tilnærming til arealet. (Her må du vite at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

men hvordan man ser dette må vi vente med til et senere semester.)

---

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers`

[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/Marginal_value_theorem`