1 - 10 - DIFFERENSIALLIKNINGER IV

Snøskoharen (Lepus americanus) er en liten nordamerikansk hareart som er kjent for sine voldsomme bestandssvingninger. Bestandssvingningene har periode på omtrent ti år, og skyldes at den formerer seg fort og at den kanadiske gaupen (Lynx canadensis) nesten ikke spiser noe annet enn snøskohare dersom den har tilgang på dem.[1] Dette var et av de første biologiske systemene som ble forsøkt modellert av matematikere,[2] og utledningen går omtrent som følger. La x_1 være harebestanden og x_2 gaupebestanden. Ved fravær av gaupe vil harene formere seg eksponensielt, slik at

$$\dot{x}_1 = ax_1$$

der $a > 0$. Dersom det finnes gaupe, spiser disse harer og dette fører til en nedgang i harebestanden. Hvis vi antar at predasjonen er proporsjonal med ***både*** harebestanden og gaupebestanden, og at predasjon er den eneste av harenes dødsårsaker som ikke er tatt høyde for i a, får vi

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2$$

der $b > 0$. Det første leddet på høyresiden beskriver hvordan harene formerer seg, og det andre leddet beskriver predasjonen. Økning i antall harer er differansen mellom disse to. Gaupen oppfører seg på alle måter stikk motsatt: Hvis du antar at gaupene kun spiser hare, kan du ved fravær av hare trygt anta at gaupene dør ut. Antar vi at raten er proporsjonal med bestanden, får vi

$$\dot{x}_2 = -cx_2$$

og dersom det er hare, fører dette til økning i gaupebestanden som er proporsjonal med både harebestanden og gaupebestanden:

$$\dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1x_2$$

Alt i alt får vi differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \quad ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x_2} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

der a, b, c og $d > 0$. Lotkavolterrasystemet kan ikke *løses*; det er ikke mulig å finne pene funksjoner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ som passer i likningssystemet. Men det finnes massevis av andre teknikker for å hale ut informasjon av modellen. For eksempel kan vi dele likningene på hverandre, sortere litt og integrere med hensyn på t. Hvis du gjør dette riktig, får du at en eventuell løsning må ligge på kurven

$$dx_1 + bx_2 - c\ln|x_1| - a\ln|x_2| = C$$

der C er vilkårlig konstant. Dette kalles en **invariant**.

$\boxed{1}$ Utled likningen slik som foreslått.

[1] https://www.enr.gov.nt.ca/en/services/lynx/lynx-snowshoe-hare-cycle
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equations

Mengden av punkter som passer i en likning med to variable

$$x_1 + x_2 - \ln|x_1| - \ln|x_2| = C$$

kalles en **algebraisk kurve**.[3] Det finnes en annen måte å representere slike kurver på, nemlig ved $\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dette kalles en **vektorvaluert funksjon**, siden den avhengige variabelen er en vektor. Grafen til $\mathbf{x}$ kan du tenke på som trajektorien til en flue som spaserer rundt på rullegardinen; t er tidspunktet og $\mathbf{x}(t)$ er posisjonen. Å si at lotkavolterrasystemet ikke kan løses er i samme gate som å si at det ikke er mulig å finne et eksplisitt uttrykk for en vektorvaluert funksjon som gir oss punktene på kurven $x_1 + x_2 - \ln|x_1| - \ln|x_2| = C$.

$\boxed{2}$ Vi begynte egentlig med dette allerede i uke 38. Finn en funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ som ligger på linjen med likning $x_1 + x_2 = 1$.

Den deriverte

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}$$

gir **tangenten** til kurven ved tiden t, og et plot $x_1(t)$ mot $x_2(t)$ kalles funksjonens **faseplott**.[4]

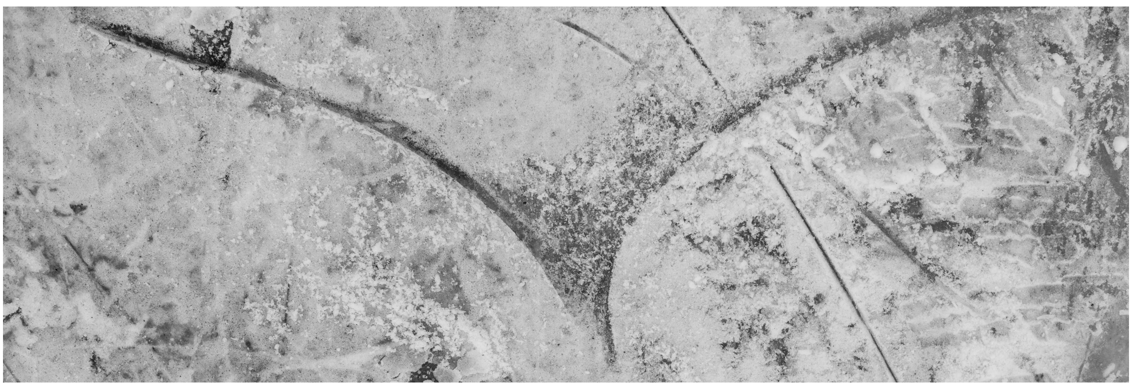
$\boxed{3}$ Hvis du fulgte med på gymnaset kjenner du allerede noen vektorvaluerte funksjoner ganske godt. Skisser $\mathbf{x} : [0, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$ Hva med $\mathbf{y} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$? Finn tangenten.

$\boxed{5}$ Enn $\mathbf{z} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$? Hva er tangenten i $t = 0$?

$\boxed{6}$ Det går fint med flere komponenter enn to. Finn $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^3$ som gir alle korrekte balanseringer av $x_1\mathrm{NO} + x_2\mathrm{O_2} \to x_3\mathrm{NO_2}$.

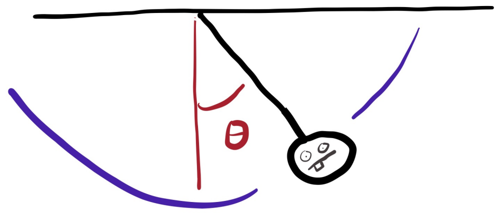


[3]Punktene som passer i likningen $y = f(x)$, altså grafen til f, er et spesialtilfelle.

[4]`https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve`

Førsteintegralet i lotkavolterrasystemet er ikke så enkelt å tolke. Nå skal vi se på en annen modell der førsteintegralet er kjent og kjært. En pendel som henger fra taket og dingler uten friksjon eller luftmotstand, tilfredsstiller

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$



der θ er vinkelutslaget med loddlinjen, l er pendelens lengde og g er tyngdeakselerasjonen.

$\boxed{7}$ Utled likningen fra Newtons andre lov.

Førsteintegralet kan i dette tilfellet utledes ved å gange likningen med $ml^2\dot{\theta}$ og integrere:

$$m\frac{1}{2}\left(l\dot{\theta}\right)^2 - mgl\cos\theta = C,$$

$\boxed{8}$ Gjør dette og tolk førsteintegralet fysisk.
(Hint: Du har lært dette i fysikktimene på gymnaset.)

Hvis du, som jeg, syntes det var litt mystisk å få slengt Newtons lover i trynet og så bare få vite at energien var konservert uten noe mer forklaring, har du nå grunnen. Energikonservering følger av Newtons lover, og oppgave 5 er et eksempel på hvordan. Et annet eksempel er klossen og fjæren

$\boxed{9}$ Gjenta analysen for kloss og fjær $m\ddot{x} + kx = 0$.

Akkurat som for lotkavolterrasystemet, er det håpløst å hente ut nøyaktig hvordan $\theta(t)$ oppfører seg fra pendellikningen, men om θ er liten, oppfører pendelen faktisk seg som kloss og fjær. Dette kan vi finne ut av ved noe som heter **linearisering**. Fysikere simpelthen *elsker* linearisering.

$\boxed{10}$ Vis geometrisk at

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Av dette kan vi slutte at dersom pendelens vinkelutslag er lite, er $\theta \approx \sin\theta$, slik at vi får **den lineariserte pendellikningen**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

$\boxed{11}$ Denne har du løst før. Løs den igjen og sammenlikne med kloss og fjær.

Både den logistiske modellen og lotkavolterramodellen er tilnærmet ubrukelige til prediksjon. Det vi prøver å ta med oss fra dem er noen grunnleggende ideer som i kan ha en viss verdi. For eksempel vil E. Coli formere seg omtrent eksponensielt så lenge det er god plass i petriskålen. Veksten avtar etterhvert som skålen blir full, og den logistiske kurven ser kvalitativt riktig ut. Det er det samme med Lotka-Volterra. Det er bare det at "det at det ser kvalitativt riktig ut" ikke er godt nok for prediksjon. For prediksjon må man som regel ha en ide om mekanismen som er presis.

$\boxed{12}$ Den lineariserte pendellikningen gir oss faktisk en modell som er grei nok, om vinkelutslaget er lite. I realfagsbygget finner du Norges lengste foucaultpendel.[5] Finn ut hvor lang den er.
(Hint: Mål perioden så nøyaktig du kan, og sammenlikne med den lineariserte pendellikningens analytiske løsning. Institutt for fysikk har visst målt tyngdeakselerasjonen i kjelleren på realfagsbygget temmelig nøyaktig til 9.8214675 meter per sekund per sekund.)

[5] https://www.ntnu.no/fysikk/foucault

Nå skal vi se på industristandarden for å takle uløselige differensiallikninger, nemlig **numeriske differensiallikningsløsere**. La oss bruke Lotka-Volterra med $a = b = c = d = 1$ som eksempel:[6]

$$\dot{x} = x - xy$$
$$\dot{y} = -y + xy$$

Jeg har prøvd å forklare ideen bak numeriske differensiallikningsløsere hundrevis av ganger siden jeg var student, og det går dårligere og dårligere for hver gang jeg prøver. Men ideen er i bunn og grunn enkel: Hvis du antar at populasjonene står i punktet (x, y), kan du *anslå størrelsen på dem litt senere* ved å bruke differensiallikningene og din forståelse av tangenten på side 2. Høyresiden av likningen forteller deg nemlig hvilken retning $(\dot{x}, \dot{y})$ løsningen er på vei. Her er en kode som regner ut numerisk løsning ved Eulers eksplisitte metode.[7]

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=20
N=2000
h=T/N

t=np.linspace(0,T,N+1)
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=2
y[0]=2

for n in range(N):
    x[n+1]=x[n]+h*x[n]*(1-y[n])
    y[n+1]=y[n]+h*y[n]*(x[n]-1)

plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.savefig('lotkavolterra-tid.png')

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.savefig('lotkavolterra-fase.png')
```

$\boxed{13}$ Finn ut hva koden gjør og hva Eulers eksplisitte metode er. (Antagelig er dette første gang du får en kode slengt i trynet med beskjed av en autoritetsperson om å finne ut hvordan den virker. Jeg vedder en månedslønn på at det ikke er siste.)

[6] Jeg x og y istedet for x_1 og x_2, for vi kommer til å trenge subindeksen til noe annet akkurat her.
[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

Eulers eksplisitte metode fungerer omtrent som følger. Man deler intervallet $[0, T]$ på t-aksen inn i små biter med lengde $h = T/N$. Delingspunktene kalles **tidssteg**, og er gitt ved

$$t_n = nh \qquad\qquad 0 \leq n \leq N.$$

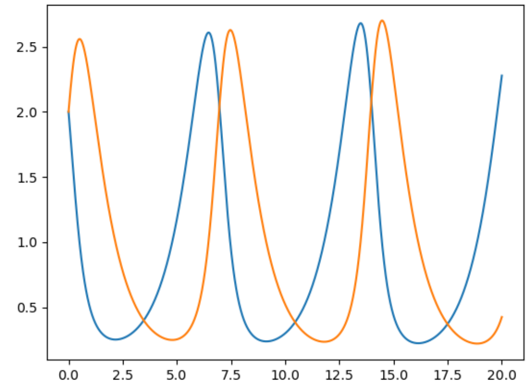
Mengden med disse $N+1$ punktene kalles **gitteret**, og for hver t_n definerer vi en tilnærming:

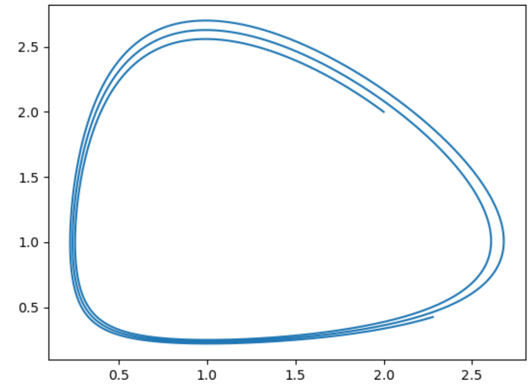
$$x_n \approx x(t_n) \qquad\qquad y_n \approx y(t_n)$$

Disse beregnes rekursivt ved å ta tilnærmingen på forrige tidssteg, beregne tangenten direkte fra differensiallikningen der, og legge til h ganger denne tangenten:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n(1 - y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hy_n(x_n - 1)$$

Koden på siden over produserer disse to figurene (den til høyre kalles et **faseplott**):



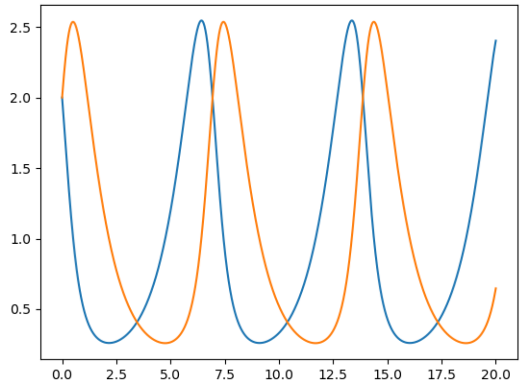


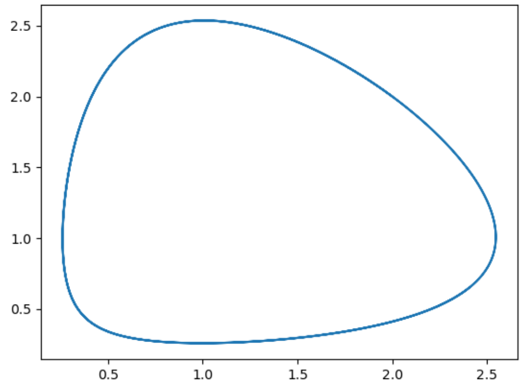
Den til venstre er x og y mot t mens den til høyre er x mot y. Disse to figurene illustrerer to veldig viktige poenger. For det første er denne løsningen ikke kvalitativt korrekt, og for det andre er dette lett å se fra den ene figuren, men ikke fra den andre.

$\boxed{14}$ Finn ut hva som er feil og forklar hvilken figur man ser det fra.
(Hint: Sammenlikne med kurvene gitt av $C = x + y - \ln|x| - \ln|y|$.)

Det finnes hundrevis av numeriske metoder for å løse ordinære differensiallikninger. Her er en variant som gir helt andre figurer:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + hx_n\,(1 - y_n)\\
y_{n+1} &= y_n + hy_n\,(x_{n+1} - 1)
\end{aligned}
$$





$\boxed{15}$ Løs Lotka-Volterra med denne metoden og sammenlikne med Eulers eksplisitte metode. Legg inn en evaluering av $f(x_n, y_n) = x_n + y_n - \ln|x_n| - \ln|y_n|$ i løkken, og plott denne som funksjon av t.

Hvis du har en andreordens differensiallikning, kan den skrives om til et første ordens system, og så er det bare å kjøre de samme numeriske metodene. La oss vise med pendelen. Vi lager oss bare noen nye variable der $\dot{\theta}$ er en egen variabel. Det vanligste er å bruke $p = \theta$ og $q = \dot{\theta}$, slik at systemet blir

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= q\\
\dot{q} &= -\frac{g}{l}\sin p
\end{aligned}
$$

$\boxed{16}$ Den nye metoden anvendt på pendelen kalles **symplektisk Euler**. Prøv eksplisitt og symplektisk. Akkurat som for lotkavolterra, kan du evaluere den totale energien i hvert tidssteg.

En annen klassiker fra elektroteknikken er van del Pols likning:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Denne ble oppdaget av Balthasar van der Pol i forbindelse med radiorør, men modellerer visst også nevronavfyring og sprekker mellom kontinentalplater.

$\boxed{17}$ Løs van der Pol numerisk med $\mu = 2$, og plot x mot $\dot{x}$.

Hvis man skjønner metodene for numerisk integrasjon, kan man lære seg en enkel tommelfingerregel: **For en hver numerisk integrasjonsrutine finnes det en korresponderende metode for å løse ordinære differensiallikninger.** Trikset for å skjønne dette er enkelt. La oss si vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$\dot{x} = f(x) \qquad x(0) = 0$$

på intervallet $[0, T]$. Vi deler tidsintervallet inn i en partisjon med n punkter

$$t_k = kh \qquad 0 \leq k \leq n$$

der $h = T/n$, og integrerer den uløselige differensiallikningen fra et gitterpunkt til neste:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t))\ dt$$

Hvis vi setter inn en enkelt rektangulær riemannboks eller trapesmetoden for integralet på høyresiden, og så setter inn approksimasjonen $x_k \approx x(t_k)$ overalt, får vi nå fire metoder på rappen:

Eksplisitt Euler: $$x_{k+1} = x_k + hf(x_k)$$

Implisitt Euler: $$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$$

Midtpunktmetoden: $$x_{k+1} = x_k + hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

Trapesmetoden: $$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right)$$

Jeg kunne bedt deg om å fundere på hvilken som korresponderte til hvilken, men de avsløres av navnene. Hvis du setter eksplisitt eulersteg inn som approksimasjon for x_{k+1} på høyresiden i trapesmetoden, får du noe som kalles

Heuns metode: $$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k) + f(x_k + hf(x_k))\right)$$

Det samme kan gjøres med midtpunktmetoden; da får du noe som kalles den eksplisitte midtpunktmetoden. Det finnes faktisk en uendelig stor klasse av forskjellige metoder, kalt **rungekuttametoder**, som alle er variasjoner og generaliseringer av disse metodene.[8] Bruker du Simpsons metode på integralet på høyre side og setter inn noen approksimasjoner slik som dem som gir Heuns metode fra trapesmetoden, får du den kjente RK4. Nå kan du teste disse metodene på

$\boxed{18}$ Ecoliproblemet: $\dot{x} = x \quad x(0) = 1$ $\boxed{19}$ Fallskjermproblemet: $\dot{v} = 1 - v^2 \quad v(0) = 0$

og sammenlikne med analytisk løsning. Trenger du hjelp med å komme igang, finner du kode her: `https://folk.ntnu.no/mortano/fallskjerm/`

$\boxed{20}$ Løs Newtons avkjølingsproblem

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \qquad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers ekspisitte metode og med trapesmetoden og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?

[8] `https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods`

Eulers implisitte metode er

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}).$$

I problemene på forrige side gikk det greit å løse rekursjonen for x_{n+1}. Hva om α ikke er et tall, men en funksjon av T? Proporsjonalitetskonstanten α forteller oss noe om hvor raskt varmen strømmer mellom elgtungen og omgivelsene, og det er en rimelig antagelse at α er avhengig av elgtungens varmekapasitet. Jeg vet ikke om noen har studert varmekapasiteten til en kokt elgtunge, men om vi kjøler ned en krystall, kan vi forvente at varmekapasiteten er sterkt temperaturavhengig.[9] Hvis vi nå gjør det enkelt, og antar at

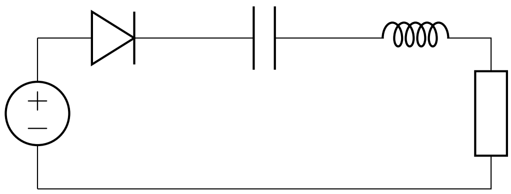
$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

(her er det en haug med fysiske konstanter som er satt til en av hensyn til din kognitive last) blir Newtons avkjølingslov

$$\dot{T} + \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2} (T - T_K) = 0 \quad T(0) = T_0.$$

$\boxed{21}$ Sett opp Eulers implisitte metode. Hvordan i alle dager skal du klare å beregne T_{k+1}?

Hvis du vil ha en uløselig differensiallikning fra kretsteorien, er det bare å slenge på en diode. Kretsen under er en dårlig frekvensfordobler, og du får det samme problemet med implisitte metoder som for den kokte krystallen.



$\boxed{22}$ Anta at $i(0) = 1$ etter at spenningskilden er slått av, sett parametrene til et eller annet, og finn strømmen.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_solid

UKENS NØTTER

Det er en ting matematiske modeller trenger, og dette kravet har de til felles med andre ting, for eksempel software og orienteringskart, nemlig *korrekt balanse mellom lesbarhet og detaljnivå*. Dersom et orienteringskart har for mange detaljer, blir det umulig å lese, og har det for få, gir det ikke korrekt beskrivelse av terrenget. Software som er skrevet for ytelse heller enn lesbarhet kan fort bli uforståelig for alle andre enn det store geniet som har skrevet koden, og da kan den bli ubrukelig når det geniet dør eller skifter jobb eller glemmer hva det har gjort.

Lotkavolterramodellen er lesbar. Begge likningene i lotkavolterra har ett ledd som beskriver veksten ved fravær av den andre arten, og ett ledd som beskriver hvordan arten påvirkes av samspillet med den andre arten. Jeg introduserte den logistiske modellen ved å si at du tok modellen for eksponensiell vekst, og bytte ut proporsjonalitetsfaktoren med en monotont synkende funksjon som har et nullpunkt i bærekapasiteten, men du kan også skrive den slik:

$$\dot{x} = a\left(x - x^2/k\right)$$

Hvis du har skjønt lotkavolterra skjønner du kanskje at det kvadratiske leddet kan representere kannibalisme. [10] Når man først har vendt seg til tanken at endring i en størrelse kan være proporsjonal med produktet av størrelsen med seg selv eller andre størrelser, er det en lavthengende frukt å forstå **kinetikk**, nemlig modellering av kjemisk reaksjonshastighet.

La oss si at du har en kjemisk reaksjon som tar speciene A og B produserer C:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C}$$

Produktet av konsentrasjonene $[\mathrm{A}]$ og $[\mathrm{B}]$ forteller noe om sannsynligheten for at disse to molekylene tilfeldigvis møter på hverandre i suppen, og massevirkningsloven[11] sier at dersom reaksjonen kun går den ene veien, tilfredsstiller konsentrasjonene $[\mathrm{A}]$, $[\mathrm{B}]$ og $[\mathrm{C}]$ differensiallikningen

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{C}] = k\,[\mathrm{A}]\,[\mathrm{B}]$$

der k er en konstant som avhenger av sannsynligheten for at A og B faktisk kombinerer til C når de møtes.[12] Dette avhenger av temperatur og farten til molekylene og masse annet, og siden det trengs én av A og én av B for å produsere én av C, er

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{A}] = \frac{d}{dt}[\mathrm{B}] = \frac{d}{dt}[\mathrm{C}]\,.$$

Dersom reaksjonen kan gå begge veier, tilfredsstiller konsentrasjonene differensiallikningen

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{C}] = k_+\,[\mathrm{A}]\,[\mathrm{B}] - k_-\,[\mathrm{C}]\,.$$

En av de mest kjente kjemiske reaksjonsdifferensiallikningene kalles Michaelis-Menten-systemet.[13] Det er en modell for et enzymkatalysert reaksjon som visstnok skjer i levende celler:

$$\mathrm{S} + \mathrm{E} \rightleftharpoons \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{E} + \text{noen uinteressante produkter}$$

[10] Kannibalisme er faktisk ikke helt uvanlig i naturen:
https://www.youtube.com/watch?v=7wKu13wmHog

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_mass_action

[12] Radioaktiv nedbrytning er det enkleste eksemplet: https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium-lead_dating

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Michaelis-Menten_kinetics

Reaksjonsratene er k_1 og k_{-1} for den første reaksjonen, og k_2 for den andre. I virkeligheten går den andre reaksjonen begge veier, men man sørger visst for å ta de uinterssante produktene ut av suppen når man tester dette i lab, så ikke alt skal bli så komplisert. På skolen lærte du at en katalysator er noe som påvirker en kjemisk reaksjon uten å bli brukt opp. Dette forvirret alltid meg, men man må huske på at dette betyr at det er snakk om flere reaksjoner som skjer samtidig, og at katalysatoren blir brukt i en reaksjon og produsert i en annen.

$\boxed{1}$ La $s = [\mathrm{S}]$, $e = [\mathrm{E}]$ og $c = [\mathrm{C}]$, og vis at differensiallikningsystemet blir

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -k_1 se + k_{-1} c \\ \dot{e} &= -k_1 se + (k_{-1} + k_2)\, c \\ \dot{c} &= k_1 se - (k_{-1} + k_2)\, c\end{aligned}$$

Vi kan forenkle litt. Summen av to av konsentrasjonene må være konstant.

$\boxed{2}$ Hvilke?
(Hint: Tenk logisk eller herje litt med likningene.)

Dersom du bruker relasjonen du fant over, bør det være mulig å koke alt ned til

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -k_1 s\,(e_0 - c) + k_{-1} c \\ \dot{c} &= k_1 s\,(e_0 - c) - (k_{-1} + k_2)\, c\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Løs numerisk.

med initialverdier $e(0) = e_0$ og $c(0) = 0$. Det er nå vanlig å anta at produksjonen av c går veldig fort unna og raskt går i likevekt, slik at $\dot{c} = 0$. I så fall blir den andre likningen en algebraisk likning.

$\boxed{4}$ Vis at i så fall er

$$\dot{s} = -\frac{k_2 e_0 s}{s + K_m} \qquad \text{der} \qquad K_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}.$$

og løs numerisk.

Konstanten K_m kalles *michaelismentenkonstanten*. Likningen for s kan ikke løses i ordinær forstand, men du kan herje litt, integrere, og få

$$s + K_m \ln s + k_2 e_0 t = C.$$

$\boxed{5}$ Ligger den numeriske løsningen fra oppgave 4 på denne kurven?