1 Helt banalt, som lovet:

$$\dot{u} = -e^{-t}\sin x \qquad \ddot{u} = e^{-t}\sin x \qquad \nabla u = e^{-t}\cos x \qquad \Delta u = -e^{-t}\sin x.$$

2 Ingen bakterier skal forsvinne, så eneste måte antallet bakterier mellom a og b kan endre seg på, er at bakterier flyter inn over randen ved a eller ut over randen ved b. Fluksen teller bakterier per sekund i positiv x-retning, så

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = J(a,t) - J(b,t) = \rho(a,t)v(a,t) - \rho(b,t)v(b,t).$$

Nå bruker vi analysens fundamentalteorem

$$\int_a^b \partial_x f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

baklengs på høyresiden, og drar tidsderivasjonen under integraltegnet på venstresiden:

$$\int_a^b \partial_t \rho(x,t)\,dx = -\int_a^b \partial_x\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big)\,dx,$$

altså

$$\int_a^b \partial_t \rho(x,t) + \partial_x\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big)\,dx = 0.$$

Dette skal gjelde uansett hvilke integrasjonsgrenser a og b vi velger, og da må integranden være null overalt: hadde den vært positiv i et punkt, kunne vi valgt et bitte lite intervall rundt akkurat det punktet og fått et positivt integral. Følgelig er

$$\partial_t \rho(x,t) + \partial_x\Big(\rho(x,t)v(x,t)\Big) = 0.$$

Trikset i siste steg - "gjelder det for alle intervaller, gjelder det punktvis" - er verdt å huske, for det er standardmåten å komme seg fra integralform til differensialform, og du får bruk for det siden.

4 Kontinuitetslikningen sier

$$\partial_t \rho + \partial_x J = 0,$$

og setter vi inn $J = -D\nabla\rho$, får vi

$$\partial_t \rho + \partial_x\left(-D\nabla\rho\right) = 0 \qquad \text{altså} \qquad \dot{\rho} = D\Delta\rho.$$

Vi skal komme tilbake til Ficks lov senere i kurset, når vi skal studere stigning i flere romlige koordinater.

5 Massen til den lille biten er ρh, og akselerasjonen er $\ddot{u}(x,t)$, så Newtons andre lov gir

$$\rho h\ddot{u}(x,t) = T_1 + T_2,$$

der T_1 og T_2 er de vertikale komponentene av strengestrekket i endene av biten. Nå kommer kongruenstrikset fra figuren: strekkraften peker langs strengen, så trekanten som dekomponerer

kraften i horisontal og vertikal del er formlik med trekanten som gir stigningen til strengen. Siden den horisontale komponenten er T i begge ender, er

$$T_2 = T\nabla u(x+h,t) \qquad \text{og} \qquad T_1 = -T\nabla u(x,t),$$

med minus på venstre ende fordi strekket der drar mot venstre. Innsatt:

$$\rho h\ddot{u}(x,t) = T(\nabla u(x+h,t) - \nabla u(x,t))\,.$$

Deler vi på Th og lar $h \to 0$, står det

$$\frac{\rho}{T}\ddot{u}(x,t) = \lim_{h\to 0}\frac{\nabla u(x+h,t) - \nabla u(x,t)}{h} = \Delta u(x,t),$$

altså

$$\ddot{u} = c^2\Delta u \qquad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Her kan det være lurt å dobbeltsjekke benevningen; T er i newton, altså kg$\cdot$m/s^2, og ρ i kg/m, så T/ρ har benevning m^2/s^2, så c blir fart. Krumningen bestemmer akselerasjonen, positiv krumning gir akselerasjon oppover og negativ krumning gir akselerasjon nedover. Stram og lett streng gir høy bølgefart - strammer du strengen går tonen opp, og tykke gir dypere toner enn tynne strenger.

6 Se på biten av ledningsparet mellom x og $x+h$. Den har induktans Lh, og over en spole er spenningsfallet $Lh\,\partial_t i$, så spenningen som kommer ut av biten er

$$v(x+h,t) = v(x,t) - Lh\partial_t i(x,t).$$

Kondensatoren mellom ledningene har kapasitans Ch, og strømmen som lekker over den er $Ch\,\partial_t v$, så strømmen som kommer ut i andre enden er

$$i(x+h,t) = i(x,t) - Ch\partial_t v(x,t).$$

Flytter vi $v(x,t)$ og $i(x,t)$ over på venstresidene, deler på h og lar $h \to 0$, får vi telegraflikningene

$$\partial_x v = -L\partial_t i \qquad\qquad \partial_x i = -C\partial_t v.$$

Dette er to koblede likninger av første orden, akkurat som systemene fra første økt, og vi dekobler dem på samme måte: deriver den første med hensyn på x og den andre med hensyn på t,

$$\partial_{xx} v = -L\partial_x\partial_t i = -L\partial_t\partial_x i = -L\partial_t\left(-C\partial_t v\right) = LC\,\partial_{tt} v,$$

altså

$$\ddot{v} = c^2\Delta v \qquad c = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

og bytter du rollene til de to likningene får du nøyaktig det samme for i. Spenningen på en transmisjonslinje tilfredsstiller nøyaktig samme likning som gitarstrengen. Signaler på lange linjer går som bølger med fart $1/\sqrt{LC}$ og disse kan reflekteres i enden av linjen.[1]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Impedance_matching

7 Hvis v er en konstant, sier transportlikningen

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

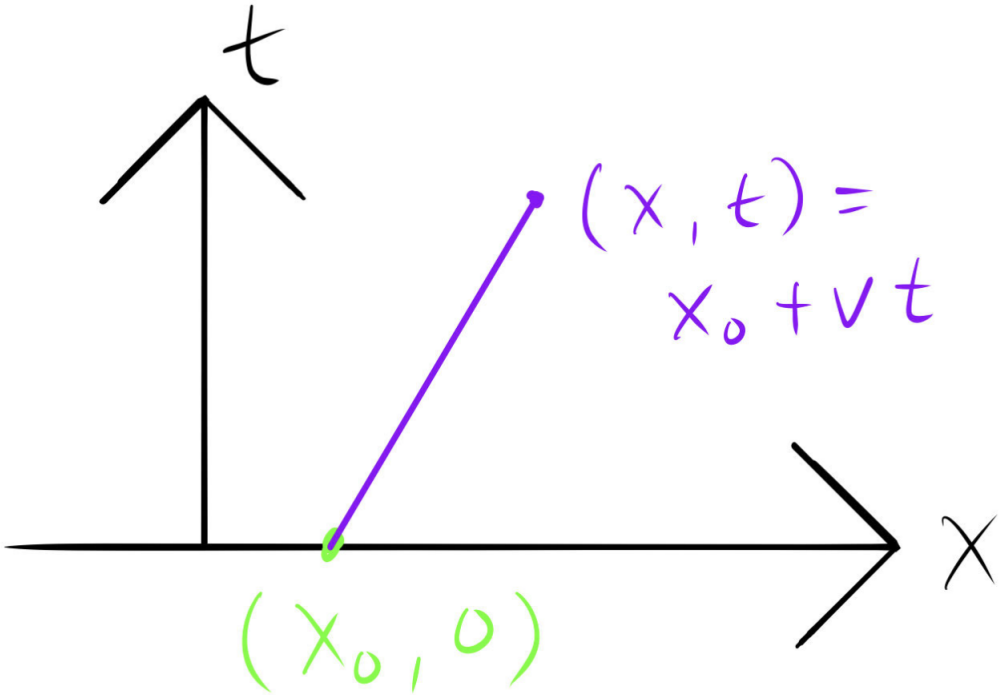
at den totalderiverte til ρ skal være null langs kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

siden

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Karakteristisk kurve betyr noe sånt som *en kurve der du kan klare å finne ut hva løsningen er*, og dette er det enkleste eksemplet.



8 I forrige oppgave viste vi at en eventuell løsning må være konstant på alle kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

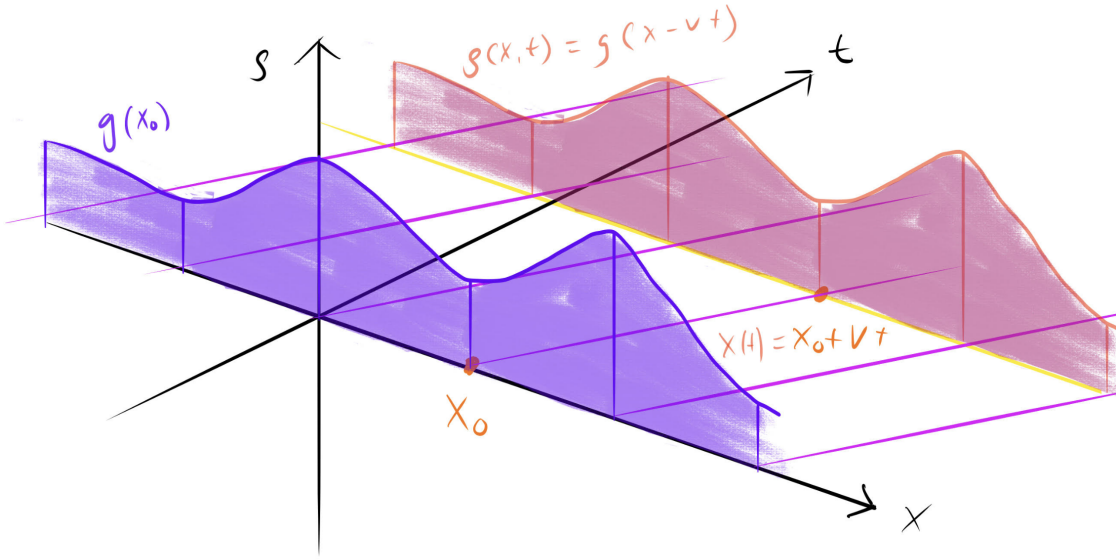
så med andre ord passer funksjoner på formen

$$\rho(x, t) = h(x - vt)$$

i likningen så lenge h er deriverbar. Derfor er også

$$\rho(x, t) = g(x - vt)$$

en løsning, og gjett hva, denne tilfredsstiller også initialkravet.



9 La oss undersøke hvordan løsningen oppfører seg langs de karakteristiske kurvene $x(t) = x_0 + vt$. Vi får

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \dot{\rho}(x_0+vt,t) + v\cdot\nabla\rho(x_0+vt,t) = -\gamma\rho(x_0+vt,t)$$

eller

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) + \gamma\rho(x_0+vt,t) = 0$$

om du vil. Denne likningen kan vi håndtere ved å gange hele greia med $e^{\gamma t}$ slik:

$$e^{\gamma t}\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) + e^{\gamma t}\gamma\rho(x_0+vt,t) = 0$$

og så skrive

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\rho(x(t),t)\right) = 0$$

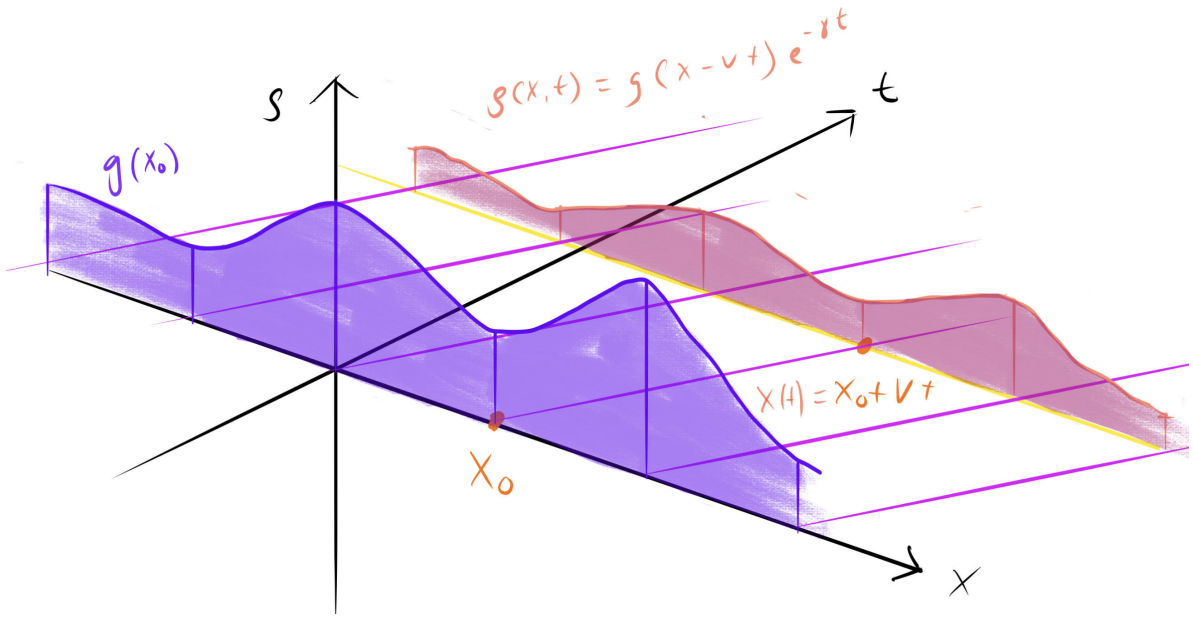
slik at

$$\rho(x(t),t) = ce^{-\gamma t}.$$

Denne likningen sier at løsningen skal være en konstant ganger $e^{-\gamma t}$ på hver karakteristisk kurve, så om vi setter

$$\rho(x,t) = g(x-vt)e^{-\gamma t}$$

har vi noe som tilfredsstiller både differensiallikningen og initialkravet.



10 Hvis vi evaluerer løsningen ρ på de karakteristiske kurvene fra forrige oppgave, får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0+vt,t) = \dot{\rho}(x_0+vt,t) + v\cdot\nabla\rho(x_0+vt,t) = f(x_0+vt,t)$$

og hvis vi integrerer denne likningen fra 0 til t, får vi

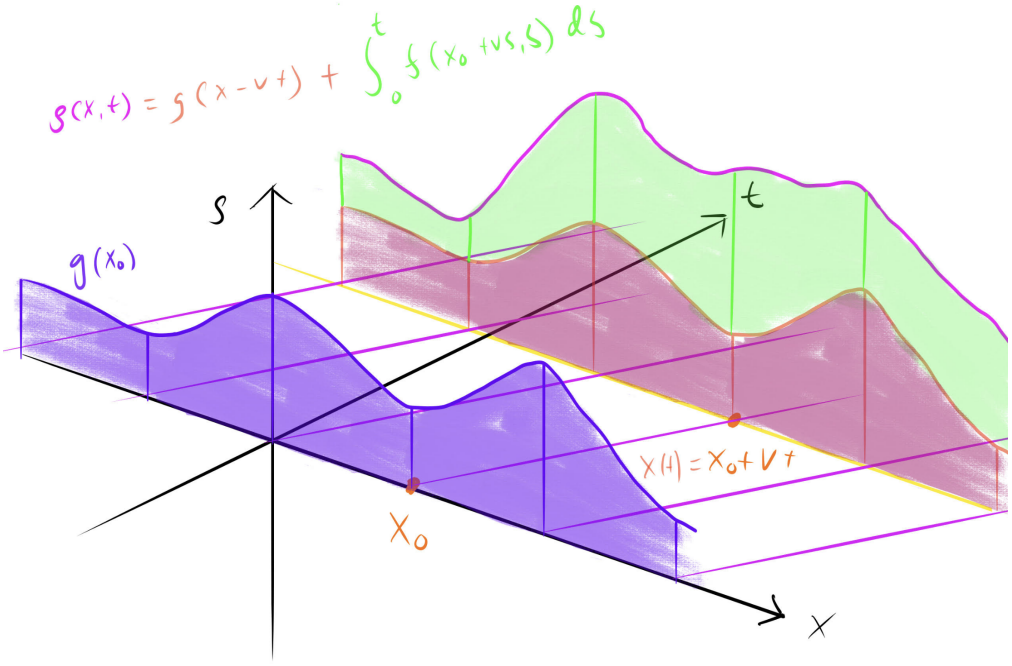
$$\rho(x(t),t) - \rho(x(0),0) = \int_0^t f(x(s),s)\,ds = \int_0^t f(x_0+vs,s)\,ds$$

slik at

$$\rho(x,t) = g(x-vt) + \int_0^t f(x_0+vs,s)\,ds.$$

Men $x_0 = x - vt$, så vi kan skrive dette enda penere slik:

$$\rho(x,t) = g(x-vt) + \int_0^t f(x+v(s-t),s)\,ds$$



11 Den partiellderiverte med hensyn på x er

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{z(t)y(x+h)-z(t)y(x)}{h}\\ &= z(t)\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = z(t)y'(x).\end{aligned}$$

Beregningen for $\frac{\partial u}{\partial t}$ er lik.

12 Vi setter $u(x,t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen og får

$$\dot{z}(t)y(x) = \alpha z(t)y''(x).$$

Hvis vi nå deler ut $\alpha z(t)y(x)$, får vi

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}$$

og den eneste muligheten er at begge sidene av denne likningen er konstante, siden de er avhengige av hver sin variabel:

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k$$

Dette gir

$$y''(x) - ky(x) = 0,$$

og dersom vi skal ha $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, må vi ha $y(0) = y(\pi) = 0$. (Å sette $z = 0$ for alle t er åpenbart en dårlig ide, siden vi da får $u = 0$ for alle x og t.) Gjør du det samme med bølgelikningen, får du den samme konklusjonen.

13 Dersom $k = 0$, får vi $y(x) = ax + b$ der a og b er konstanter, og dersom $y(0) = y(\pi) = 0$, får vi $a = b = 0$. Dette er en gyldig løsning av randverdiproblemet, men vi får jo $u = 0$ for alle x og t, som ikke er særlig spennende, og dessuten ikke tilfredsstiller initialkravene. Dersom $k > 0$, får vi

$$y(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x},$$

som gir likningssettet

$$\begin{aligned} 0 =& y(0) = a + b \\ 0 =& y(\pi) = ae^{\sqrt{k}\pi} + be^{-\sqrt{k}\pi}. \end{aligned}$$

Determinanten til dette systemet er $-2\sinh\sqrt{k}\pi \neq 0$, så systemet har den entydige løsningen $a = b = 0$ dersom $k > 0$. Vi støter altså på samme problem. Dersom $k < 0$, får vi

$$y(x) = a\cos\left(\sqrt{-k}x\right) + b\sin\left(\sqrt{-k}x\right)$$

og nå er det håp. Kriteriet $y(0) = 0$ gir $a = 0$, mens $y(\pi) = 0$ kan tilfredsstilles ved å sette $\sqrt{-k} = n$, der $n \in \mathbb{N}$. Vi får følgelig $k = -n^2$, slik at vi får en haug med løsninger på formen

$$y_n(x) = \sin(nx).$$

14 Siden $k = -n^2$, får vi

$$\dot{z}(t) + \alpha n^2 z(t) = 0,$$

som har løsning

$$z_n(t) = e^{-\alpha n^2 t},$$

slik at

$$u_n(x,t) = z_n(t)y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx).$$

15 Samme her, vi får

$$\ddot{z}(t) + c^2 n^2 z(t) = 0,$$

som har løsninger

$$z_n(t) = a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt)$$

slik at

$$u_n(x,t) = (a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt))\sin(nx).$$

16 Setter vi inn $u_n(x,t) = z_n(t)y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)$ i initialkravet $u(x,0) = f(x)$, får vi

$$f(x) = b_n\sin(nx).$$

Dette går åpenbart ikke med mindre f er en skalarmultippel av $\sin(nx)$. Joseph Fourier mente at dersom du prøver å legge sammen alle overtonene slik:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)$$

kan du klare å få til

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$$

nesten uansett hva f er, og han hadde faktisk rett. En uendelig sum av sinuser kan du få til å bli nesten hva som helst, selv den infernalske og stygge lyden av en klarinett.

18 Litt triksing med trigonometriske funksjoner gir oss

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\,dx$$
$$= \begin{cases} \pi/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

siden både $\cos((m-n)x)$ og $\cos((m+n)x)$ er like mye over x-aksen som under på $[0,\pi]$. Unntaket er når $m = n$, for da blir $\cos((m-n)x) = 1$.

19 Vi ganger med $\sin(mx)$ og integrerer og får

$$\int_0^\pi \sin(mx)\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)\,dx = \int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,dx.$$

Hvis vi flytter $\sin(mx)$ og bruker ortogonaliteten, får vi

$$\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,dx = \sum_{n=1}^{N}\int_0^\pi b_n \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{\pi b_m}{2}$$

slik at

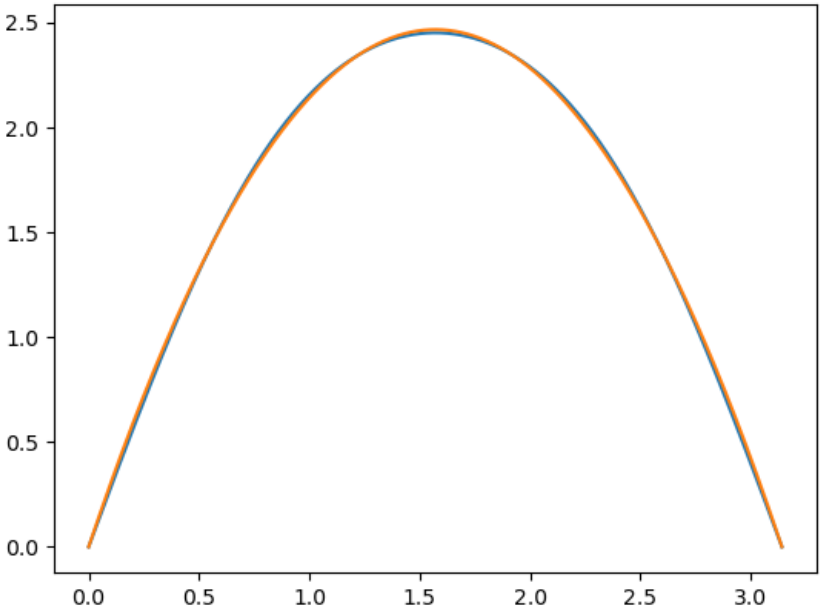
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = b_n.$$

Det er nå vanlig å bli forvirret av at jeg bytta fra m til n. Men dette er en dummy variable, det spiller ingen rolle hva den heter.

20 Vi får bare brette opp ermene:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\,(\pi - x)\sin(nx)\,dx =& \frac{1}{n}\left(-x\,(\pi-x)\cos(nx)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx\right) \\
=& \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx \\
=& \frac{1}{n^2}\left((\pi-2x)\sin(nx)\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) \\
=& -\frac{2}{n^3}\cos(nx)\Big|_0^\pi \\
=& \frac{2}{n^3}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{4}{n^3} & \text{odde } n \end{cases}
\end{aligned}$$

Her er signalet og de to første leddene i rekken:



21 Varmeledningsproblemet er

$$\dot{u}(x,t) = \alpha \Delta u(x,t) \qquad u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad u(x,0) = x\,(\pi - x)$$

og vi vet at funksjonene

$$u_n(x,t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

alle tilfredsstiller varmelikningen og randkravene. Nå sier altså Joseph Fourier at atmosfæren vil fungere som et drivhus og at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

tilfredsstiller

$$u(x,0) = x\,(\pi - x)$$

dersom vi setter

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{odde } n \end{cases}$$

slik at

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} e^{-\alpha(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x).$$

22 I denne modellen er varmeflyten proporsjonal med temperaturgradienten, så om man krever at temperaturgradienten er null i endepunktene, stenger man av varmeflyten der.

23 Vi gjentar suksessen fra forrige økt, og setter $u(x,t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen og får

$$\dot{z}(t)y(x) = \alpha z(t)y''(x).$$

slik at

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k$$

og

$$y''(x) - ky(x) = 0,$$

der k er en konstant. Dersom vi skal ha $\nabla u(0,t) = \nabla u(\pi,t) = 0$, må vi ha $y'(0) = y'(\pi) = 0$. Dersom $k = 0$, får vi $y(x) = ax + b$ der a og b er konstanter, og dersom $y'(0) = y'(\pi) = 0$, får vi $a = 0$, mens b kan være hva som helst. Dersom $k > 0$, får vi

$$y(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x},$$

som gir likningssettet

$$\begin{aligned} 0 =& y'(0) = a - b \\ 0 =& y'(\pi) = ae^{\sqrt{k}\pi} - be^{-\sqrt{k}\pi}. \end{aligned}$$

Determinanten til dette systemet er $2\sinh\sqrt{k}\pi \neq 0$, så systemet har den entydige løsningen $a = b = 0$ dersom $k > 0$. Dersom $k < 0$, får vi

$$y(x) = a\cos\left(\sqrt{-k}x\right) + b\sin\left(\sqrt{-k}x\right)$$

og nå er det håp. Kriteriet $y'(0) = 0$ gir $b\sqrt{-k} = 0$, mens $y'(\pi) = 0$ kan tilfredsstilles ved å sette $\sqrt{-k} = n$, der $n \in \mathbb{Z}$. Vi får følgelig $k = -n^2$, slik at vi får en haug med løsninger på formen

$$y_n(x) = a_n\cos(nx).$$

Merk at forskjellen fra Dirichletproblemet er at $n = 0$ også må med. Men det er fortsatt ikke vits i å ha med negative verdier av n. Når vi løser

$$\dot{z} + \alpha n^2 z = 0$$

får vi også konstante z som en mulighet, men konstant u er allerede tatt med i regnskapet, så konklusjonen er at

$$u_n(x,t) = a_n e^{-\alpha n^2 t}\cos(nx)$$

alle er gyldige løsninger, også for $n = 0$. Initialkravet gir

$$f(x) = u(x,0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$$

slik at

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.$$

Formelen for a_n gir også riktig verdi for a_0, dette er grunnen til faktoren $1/2$ foran a_0 i uttrykket for u.

25-26 Disse er så og si helt like som 23 over.

27 Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x+ct) + \psi''(x-ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\phi''(x+ct) + c^2\psi''(x-ct).$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen. Tolkningen er at vi har to vandrende bølger, der ψ beveger seg mot høyre og ϕ mot venstre.

28 Vi vet at

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \tag{1}$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x,0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$\dot{u}(x,0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds + \phi(0) - \psi(0).$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds + \phi(0) - \psi(0)$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)\,ds - \phi(0) + \psi(0)$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ =& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} g(s)\,ds - \int_0^{x-ct} g(s)\,ds\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \end{aligned}$$

30 V er et energipotensiale, og både

$$i\hbar\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \qquad \text{og} \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

har benevning joule, så separasjonskonstanten er energi, derav E. Kvantefysikkfolk er stort sett opptatt av å finne E i forskjellige situasjoner.

31 Siden den ene siden av likningen kun avhenger av t og den andre kun av x, må E være konstant. Likningen

$$i\hbar\frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = E$$

gir

$$i\hbar\dot{f}(t) = Ef(t)$$

som løses av

$$f(t) = e^{-Eit/\hbar}.$$

Resten av likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E$$

gir den tidsuavhengige schrödingerlikningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi = E\psi.$$

32 Greit, så vi må løse likningen

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + E\psi = 0.$$

At $E > 0$ følger av randkravene og kravet om at $|\Psi|^2$ skal være en sannsynlighetstetthet. Dersom $E = 0$ får vi

$$\psi(x) = ax + b$$

og dersom denne rette linjen skal tilfredsstille $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, må $a = b = 0$, men da blir arealet under $|\Psi|^2$ null, og det kan vi ikke ha noe av. Dersom $E < 0$, får vi

$$\psi(x) = ae^{\sqrt{-2Em}x/\hbar} + be^{-\sqrt{-2Em}x/\hbar}.$$

Skal dette tilfredsstille $\psi(0) = 0$, må $a = -b$, og skal vi ha $\psi(\pi) = 0$, får vi

$$0 = a\left(e^{\sqrt{-2Em}\pi/\hbar} - e^{-\sqrt{-2Em}\pi/\hbar}\right) = 2a\sinh\left(\sqrt{-2Em}\pi/\hbar\right)$$

Sinushyperbolicusfunksjonen er som kjent ikke null for positive argumenter, så da må $a = 0$, og slik får vi også nå ingen sannsynlighetstetthet. Altså må $E > 0$, og vi får

$$\psi(x) = a\sin\left(\sqrt{2Em}x/\hbar\right) + b\cos\left(\sqrt{2Em}x/\hbar\right)$$

Hvis vi nå bruker $\psi(0) = 0$, får vi $b = 0$, mens $\psi(\pi) = 0$ gir

$$0 = a\sin\left(\sqrt{2Em}\pi/\hbar\right).$$

Dette klarer vi fint på andre måter enn $a = 0$; vi kan nemlig sette $\sqrt{2Em}\pi/\hbar$ til å være en heltallsmultippel av π, som gir

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m}$$

der n er ovennevnte heltall. Dette er de berømte kvantiserte energinivåene, og alt i alt har vi nå en uendelig familie av løsninger på formen

$$\Psi_n(x,t) = a_n e^{-E_n it/\hbar} \sin nx = a_n e^{-i\frac{\hbar}{2m}n^2 t} \sin nx.$$

Det som gjenstår er nå å sette a_n slik at $|\Psi|^2$ blir en sannsynlighetstetthet. Vi beregner

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^\pi |\Psi(x,t)|^2 \, dx \\
&= \int_0^\pi \left| a_n e^{-E_n it/\hbar} \sin nx \right|^2 \, dx \\
&= |a_n|^2 \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx \\
&= |a_n|^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx = \frac{\pi}{2}|a_n|^2
\end{aligned}$$

som gir

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\theta}$$

der θ er en ukjent kompleks faseforskyvning. Denne ser det ut til at kvantefysikkfolk ikke bryr seg så mye om, så vi setter $\theta = 0$, og får

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

som gir

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-E_n it/\hbar} \sin nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\hbar}{2m}n^2 t} \sin nx$$

Nå er det på sin plass å observere at dette er det samme vi får ved å løse varmelikningen

$$\dot{u} = \alpha u''$$

med $\alpha = \frac{i\hbar}{2m}$ og så normalisere istedet for å bruke initialkrav.