OBLIG - TMA4106

Når man skal løse sin første partielle differensiallikning numerisk, er varmelikningen grei å begynne med, for dette er den enkleste å få til. Den deriverte til en funksjon f er

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer. Uttrykket

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

er stigningstallet til sekanten til f mellom punktene x og $x+h$. For små h er denne sekanten en grei tilnærming til stigningstallet $f(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

På papiret er det slik at jo mindre h, desto bedre tilnærming. La $f(x) = e^x$, og la $h = 0.1$. Vi beregner

$$f'(1.5) \approx \frac{e^{1.6} - e^{1.5}}{0.1} = 4.7134.$$

Merk at

$$f'(1.5) = e^{1.5} = 4.4817,$$

så denne tilnærmingen bommer med rundt $2 \cdot 10^{-1}$.

$\boxed{1}$ Gjenta eksperimentet med $h = 0.01$, $h = 0.001$ osv, og se hva som skjer. Hvor liten h kan du ta før det går åt skogen?

Feilen i forrige oppgave er tydelig proporsjonal med h - deler du h på 10, deler du feilen på 10. En god illustrasjon av lineær feil. Men dette gjelder bare inntil et visst punkt, blir h liten nok blir presisjonen dårligere igjen. Dette er fordi datamaskinen din kun regner med 16 desimaler. For å få en ide om hva som skjer, kan vi anta at f er analytisk og taylorutvikle f i om punktet x:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \cdots$$

og skrive stigningen til sekanten slik:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \cdots$$

Dette stigninstallet består av den eksakte verdien for $f'(x)$ pluss resten av taylorrekken til f:

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots$$

og denne halen forteller oss noe om feilen. Dersom h er liten vil h være mye større enn h^2, så med mindre og $f'(x)$ gjør noe dumt og blir enorm i x skriver vi

$$\frac{f''(x)}{2}h + \frac{f'''(x)}{6}h^2 + \cdots = O(h)$$

for å signalisere at feilen er proporsjonal med h.

$\boxed{2}$ Gjenta eksperimentet i forrige oppgave, men nå med formelen

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

og se hva som skjer. Hvor liten h kan du nå ta før det går åt skogen? Bruk taylorrekker til å forklare oppførselen.

Legg merke til hvordan feilen i forrige eksempel er nærmest perfekt kvadratisk - vi får to nye desimaler hver gang vi deler h på 10. Feilen deles altså på 100 når h deles på 10.

$\boxed{3}$ Hvis du virkelig vil slå på stortrommen, kan du prøve eksperimentet med formelen

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}.$$

Dersom du trenger en tilnærming for $f''(x)$, kan du bruke den andre ordens sentraldifferansen

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{f''''(x)}{12}h^2 + \cdots$$

Det finnes bedre og mer kompliserte formler, men vi skal ikke plages med dem. Vi skal nå lage en numerisk metode for varmeligningen

$$\dot{u}(x,t) = u''(x,t)$$

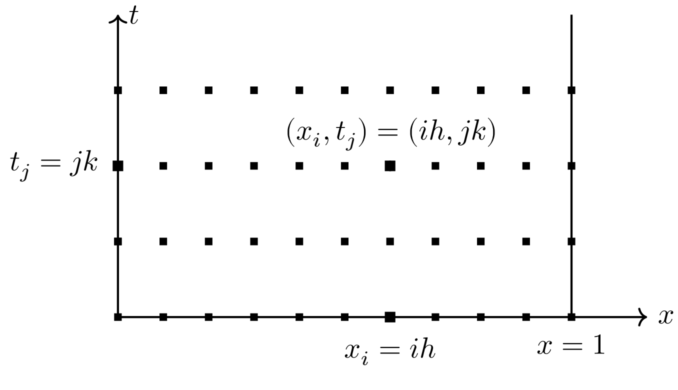
med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = f(x).$$

Når vi skal løse en partiell differensiallikning, må vi holde styr på to gitre - et i x-retningen, og et i t-retningen. Målet er å approksimasjoner til løsningen u i alle gitterpunktene. Vi gitrer opp intervallet $[0,1]$ på x-aksen med gitteravstanden h, og nummererer punktene slik at $x_0 = 0$ og $x_n = 1$. Den positive t-aksen gitrer vi opp med gitteravstanden k, og nummerer slik at $t_0 = 0$:



Her er i en tellevariabel og ikke den imaginære enheten. Vi kan nå tenke at vi erstatter $u(x,t)$ med $n+1$ envariable funksjoner $u_i(t)$, som approksimerer temperaturendringen i hvert sitt punkt x_i på stangen:

$$u_i(t) \approx u(x_i, t)$$

Den andre ordens differanseformelen for x er

$$u''(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

og setter vi denne og $u_i(t)$ inn i varmelikningen, får vi dette ordinære differensiallikningssystemet:

$$\dot{u}_i(t) \approx \dot{u}(x_i, t) = u''(x_i, t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}$$

Systemet har $n-1$ likninger, for det er $n+1$ punkter i gitteret på x-aksen, og $u_0 = 0$ og $u_n = 0$ er gitt av randbetingelsene. Systemet løses med en av de numeriske metodene du lærte i TMA4101. Etter diskretiseringen i t, skriver vi approksimasjonen i punktet (x_i, t_j) som u_{ij}:

$$u(x_i, t_j) \approx u_{ij}$$

De tre vanligste metodene som brukes i tid er eksplisitt Euler, implisitt Euler, og trapesmetoden. De korresponderende skjemaene for varmelikningen blir:

Eksplisitt $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Imsplisitt $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

Crank-Nicolson $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2}$$

Metodene har litt forskjellige egenskaper.

$\boxed{4}$ Løs varmelikningen med eksplisitt skjema og initialkrav $u(x, 0) = \sin x$. Prøv forskjellige kombinasjoner av h og k. Prøv for eksempel å sette dem lik hverandre og den ene mye større enn den andre og sånt. Lag animasjon av løsningen slik at du kan se om koden funker.

$\boxed{5}$ Implisitte metoder er litt vanskeligere å implementere, og litt mer beregningstunge, men det er noen fordeler med dem. Implementer implisitt og test med forskjellige kombinasjoner av h og k slik som i forrige oppgave.

$\boxed{6}$ Implementer Crank-Nicolson, og sammenlikne de tre metodene for samme h og k med den analytiske løsningen.