

Kapittel 2

Fourieranalyse

Tradisjonelt sett har fourierrekker vært pen-
sum i TMA4120/25/30/35 på Gløshaugen. Se
på gamle eksamener i 4K her for et rikholdig
utvalg av regneeksempler. Se også

- Adams kap. 9.9
- Kreyszig kap. 11
- Rudin kap. 8

Joseph Fourier ble satt i fengsel under den franske
revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte,
og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han
oppfant også fourierrekker. De satte opp en statue
av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst
rekvirert av staten og smeltet om under andre ver-
denskrig.

Ka e problemet?

Du har lært at mange glatte funksjoner kan skrives
som en potensrekke. For eksempel er

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

for alle x . Joseph Fourier støtte på et annet problem
da han prøvde å løse varmelikningen tidlig på 1800-
tallet. Han måtte

PROBLEMET

skrive en gitt funksjon $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ som en
uendelig rekke av sinusfunksjoner:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

Hvis du har fiklet litt med indreproduktrom, går det
an å gjette på hvordan det skal gjøres.. Det er nem-
lig slik at sinusfunksjoner med forskjellige heltalls-
multipler av en grunnfrekvens er ortogonale:

$$\int_0^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} \pi/2 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

Fourier benyttet seg av dette omtrent som følger. Han
ganget likningen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

med $\sin mt$ og integrerte:

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt \, dt$$

Så byttet han plass på integraltegnet og summen, og
fikk

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt$$

Siden sinusfunksjonene er ortogonale, blir det nå en
haug med kanselleringer, slik at

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = \frac{\pi b_m}{2}$$

eller

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Dette kjenner du forhåpentligvis igjen som projeksjon-
en av f på $\sin mt$, og vi gjorde bunn og grunn den
samme beregningen i kapitlet om indreproduktrom,
men da i et endelig antall dimensjoner. Det at vi nå
har fått uendelig mange dimensjoner, gjør alt mer
komplisert, men det viser seg at veldig mange funk-
sjoner kan skrives som uendelige summer av sinus-
eller cosinusfunksjoner.

Joseph Fouriers ideer ble til dels avskrevet av samti-
dige matematikere, men eksemplene han oppdrev på
at en funksjon med knekkpunkt kan skrives som en
uendelig rekke av glatte sinusfunksjoner var banebry-
tende.

Periodiske funksjoner

Når man skal forstå fourierrekker er det ikke mulig å
komme utenom periodiske funksjoner.

Periode

En funksjon sies å ha *periode* $p > 0$ dersom

$$f(t+p) = f(t)$$

for alle t i definisjonsmengden til f . Den minste
 p slik at likningen holder for alle t , kalles
fundamentalperioden til f .

Eksempel 2.1. Funksjonen

$$f(t) = \sin t$$

har perioder $2n\pi$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er 2π . $\triangle$

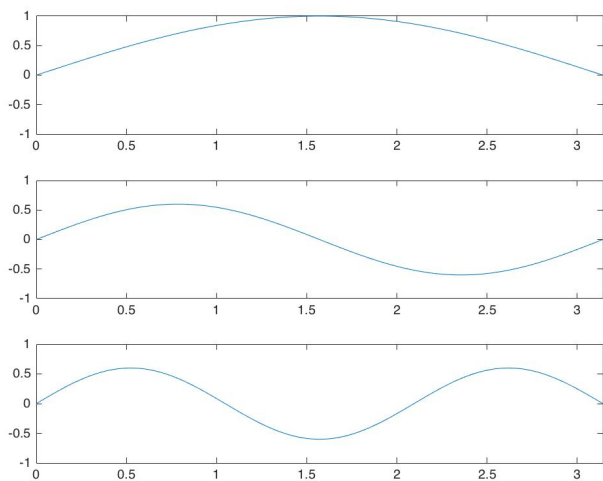
Dersom f har periode p , og $g(t) = f(kt)$, har g periode p/k , for

$$\begin{aligned} g(t) &= f(kt) = f(kt + p) \\ &= f(k(t + p/k)) = g(t + p/k). \end{aligned}$$

Eksempel 2.2. Funksjonen

$$f(t) = \sin(3t)$$

har perioder $2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $2\pi/3$. Under er plot av funksjonene $\sin t$, $\sin 2t$ og $\sin 3t$. $\triangle$



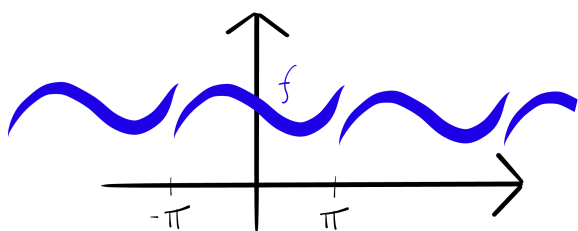
Eksempel 2.3. Den komplekse eksponensialfunksjonen $e^{it} = \cos t + i \sin t$ har fundamentalperiode 2π . $\triangle$

Eksempel 2.4. La vi $k = 2\pi/T$ og sammenlikner med forrige eksempel, ser vi at den komplekse eksponensialfunksjonen $e^{2\pi it/T}$ har fundamentalperiode T . Det er vanlig å skrive $\omega = 2\pi/T$. $\triangle$

Hvis man tar en funksjon

$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

og kopierer funksjonen slik at den ser identisk ut på $[\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 5\pi]$ og så videre, får man noe som kalles den periodiske utvidelsen til f :



Eksempel 2.5. Den 2π -periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en firkantbølge. $\triangle$

Eksempel 2.6. Den 2π -periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & t < 0 \\ \pi - t & t \geq 0 \end{cases}$$

kalles en trekantbølge. $\triangle$

Eksempel 2.7. Den 2π -periodiske utvidelsen av funksjonen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(t) = t$$

kalles en sagtannbølge. $\triangle$

Av og til slurver vi litt og omtaler den periodiske utvidelsen til en funksjon $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Det er da underforstått at funksjonsverdiene i endepunktene er irrelevante.

Fourierrekker på kompleks form

Det vakreste

En *fourierrekke* er en rekke

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

kalt fourierkoeffisientene.

Dette er en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor e^{it} , og den er en periodisk funksjon med fundamentalperiode 2π .¹ Av og til er det mer praktisk å skrive

$$h(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

eller

$$h(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(nt + \phi_n).$$

Følgende teorem skal vi bevise nederst i kapitlet:

¹Vi skal sette opp fourierrekker med andre perioder enn 2π , men formlene blir mer grisete, så det er lurt å lære seg 2π først.

Det pene konvergensteoremet

La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuerlig deriverbar 2π -periodisk funksjon, og la

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Da er

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

for alle t .

Nå skal vi gjøre noe som er ganske vanlig i ingeniørmatematikk. Vi skriver opp et presist teorem med strenge betingelser på f fordi dette er greit å bevise, men når vi skal regne eksempler, går vi friskt på med funksjoner ikke tilfredsstillende disse betingelsene, og dette går irriterende nok stort sett bra. Det går selvfølgelig an å si noe om hva som skjer under svakere forutsetninger på f , men da blir bevisene mye vanskeligere, og ingeniører har andre ting å gjøre enn å lese lange bevis. Rapporter skal jo skrives.

Dersom f er stykkvis kontinuerlig, og den venstre- og høyrederiverte eksisterer i eventuelle bruddpunkter, er

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

dersom f er kontinuerlig i t , og

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t-h) + f(t+h)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

dersom f ikke er kontinuerlig i t . f ikke er det. Vi skriver

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

dersom fourierrekken ikke konvergerer til f for alle t . (Det går fint å beregne fourierrekken så lenge f er riemannintegrerbar.)

Dersom $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig deriverbar, blir fourierrekken omtrent lik den 2π -periodiske utvidelsen til f . Det er ofte denne ingeniører er interesserte i, siden de bruker fourierrekker til å analysere signaler som er periodiske i tid, for eksempel pipetone eller vekselspanning.

Det store spørsmålet

Hvorfor er fourierkoeffisientene gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad ?$$

Fourierkoeffisientene c_n er ortogonale projeksjoner, og de komplekse eksponensialfunksjonene

$$e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$$

er innbyrdes ortogonale på $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{mt}} dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt &= \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Ved første øyekast kan man bli forledet til å tro at alt dette kun funker for harmoniske svingebevegelser, og dette trodde de fleste matematikere helt frem til 1700-tallet eller så.² Det viser seg imidlertid at veldig mange funksjoner kan skrives som trigonometriske rekker. Fourier klarte ikke bevise dette, men Dirichlet fant ut av det i 1829, og oppfant en konvergenstest i samme slengen. Det finnes noen berømte eksempler på kontinuerlige funksjoner der fourierrekken ikke konvergerer til funksjonen, men deriverbarhet gjør susen.

Eksempel 2.8. Vi finner fourierrekken til $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(t) = t$. Fourierkoeffisientene blir:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0 \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = -\frac{1}{2in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) \\ &= -\frac{1}{in} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}. \end{aligned}$$

Siden f er glatt på intervallet $(-\pi, \pi)$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} t &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{int} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{-int} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \end{aligned}$$

på $(-\pi, \pi)$. I $t = \pi$ og $t = -\pi$ konvergerer rekken til 0. Fourierrekken er 2π -periodisk, utenfor intervallet $(-\pi, \pi)$ konvergerer den ikke til f . $\triangle$

La oss merke oss et par ting fra eksemplet over.

- Fourierrekken er reell siden f er det, selv om den er en sum av komplekse eksponensialfunksjoner
- Fourierrekken er lik den 2π -periodiske utvidelsen til funksjonen $g : [-\pi, \pi]$ gitt ved

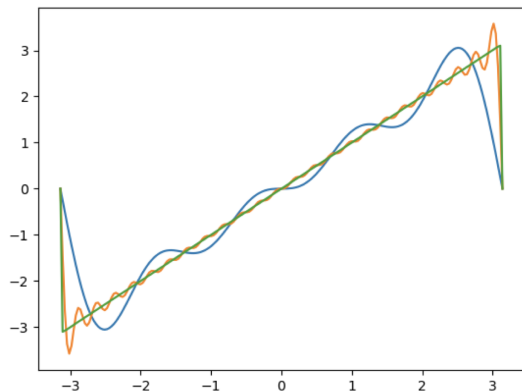
$$g(t) = \begin{cases} t & \text{for } t \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{for } t = -\pi \end{cases}$$

Uttrykket

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

²https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

kalles den N -te partialsummen til fourierrekken. Under er et plot av tre av partialsummene til sagtannbølgen. Den blå er S_5 , den gule er S_{25} og grønne er S_{5000} . Merk hvordan det er umulig å se forskjell på S_{5000} og f unntatt i endepunktene.



Fourierrekker på reell form

Dersom f er reell, blir fourierrekken også reell. Dette følger av formelen for koeffisientene c_n . Dersom f er reell, kan vi skrive:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e^{int}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt = \overline{c_{-n}} \end{aligned}$$

Derfor blir

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = c_n e^{int} + \overline{c_n e^{int}}$$

blir en reell funksjon, og følgelig er hele fourierrekken reell. Vi kan fint sette opp fourierrekken direkte med sinus- og cosinusfunksjoner. I noen tilfeller gir dette enklere regning, og noen tilfeller vanskeligere.

Fourierrekker på reell form

En annen variant er

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med koeffisienter:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \end{aligned}$$

Det er vanlig å kalle alt dette 'reell fourierrekke', men det er litt misvisende, siden en fourierrekke kan være reell selv om den er skrevet ned med komplekse eksponensialfunksjoner.

Eksempel 2.9. Vi finner enhetssprangfunksjonen

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

sin reelle fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt dt = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases} \end{aligned}$$

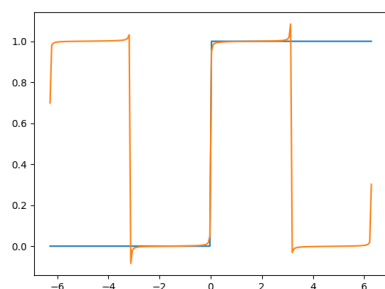
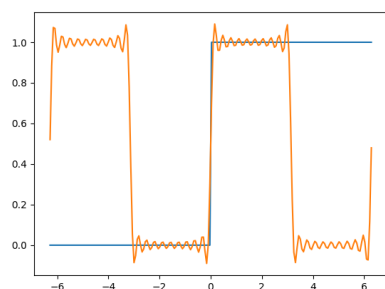
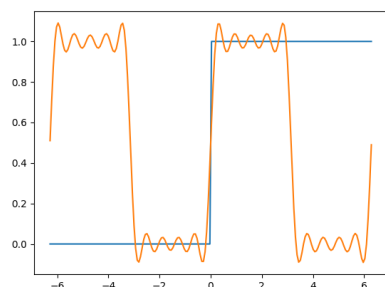
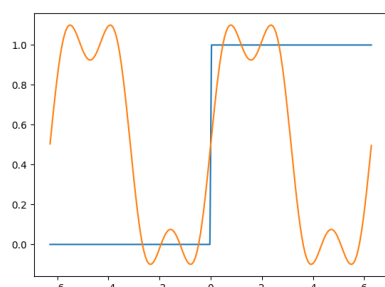
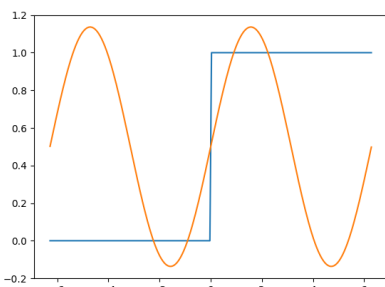
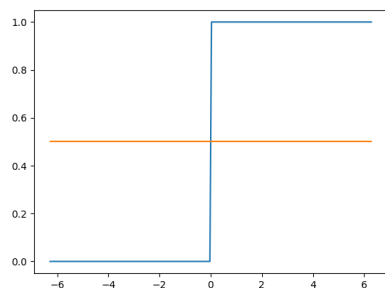
Her kan vi bare skrive

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t,$$

for fourierrekken konvergerer til u på intervallene $(-\pi, 0)$ og $(0, \pi)$, men til $1/2$ i $t = 0$ og $t = \pm\pi$. Partialsummene er gitt ved

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t.$$

Under er plot av partialsummer for $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$, og $n = 10$. Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet $[-\pi, \pi]$. Merk den lille over- og underskytningen partialsummene gjør på hver side av spranget. Denne er alltid på rundt 9% av sprangets høyde, og oppførelen kalles Gibbs fenomen, til tross for at det først ble oppdaget av en som het Wilbraham. Spranget forsvinner på mystisk vis når $n \rightarrow \infty$. $\triangle$



Vi kan utlede formler for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form:

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-int} + e^{int}) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n - c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{-int} - e^{int}) dt \right) \\ &= \frac{-i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = -ib_n \end{aligned}$$

Overgang mellom reell og kompleks

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Andre intervaller enn $[-\pi, \pi]$

Å utlede formler for fourierrekker på andre intervaller enn $[-\pi, \pi]$ er ikke vanskelig, men formlene blir mer grisete og vanskeligere å huske.

Fourierrekker på generelt intervall

For intervallet $[-L, L]$ skriver man

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{L}}. \quad (2.1)$$

eller

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L}.$$

Koeffisientene er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{L}} dt,$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

henholdsvis.

Utleddning er identisk med utledning på intervallet $[-\pi, \pi]$. På samme måte kan man sette opp fourierrekker på intervallet $[a, b]$, men det dropper vi.

Eksempel 2.10. Vi beregner den komplekse fourierrekken til heavisidefunksjonen på $[-1, 1]$. Koeffisientene blir

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i \frac{n\pi t}{L}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i \frac{n\pi t}{L}} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{n\pi i} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n, \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i t}.$$

Merk nok en gang at

$$c_n e^{n\pi i t} + c_{-n} e^{-n\pi i t} = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi t,$$

slik at

$$\begin{aligned} u(t) &\sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi t. \quad \triangle \end{aligned}$$

Odde og jevne funksjoner

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-t) = -f(t)$$

og jevn dersom

$$f(-t) = f(t).$$

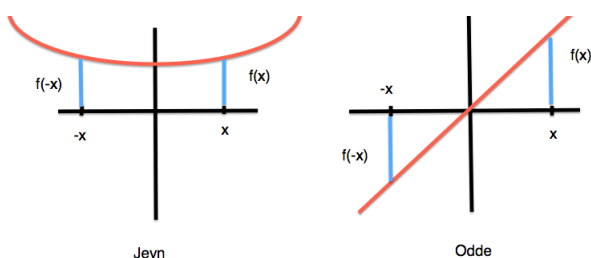
for alle t i definisjonsmengden til f . Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y -aksen. En rask kikk på figur viser at

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(t) dt = 2 \int_0^L f(t) dt$$

for jevne funksjoner.



Dersom $f(-t) = -f(t)$, og $g(-t) = g(t)$, ser vi at

$$f(-t)g(-t) = -f(t)g(t),$$

altså er fg en odde funksjon dersom f er odde og g er jevn. Dersom både f og g er enten jevne eller odde blir fg jevn.

Dersom f er odde, blir $a_n = 0$ for alle n , og dersom f er jevn, blir $b_n = 0$ for alle n . Fourierrekken til en odde funksjon inneholder derfor kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

For $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(t) & \text{for } 0 \leq t \leq L \\ -f(-t) & \text{for } -L \leq t < 0 \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(t) & \text{for } 0 \leq t \leq L \\ f(-t) & \text{for } -L \leq t < 0 \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $[0, L]$, vil fourierrekkenes deres konvergere til f på $[0, L]$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f . Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekkenes til f på $[0, L]$. For fourierutviklingen til f_o er

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt. \end{aligned}$$

og for fourierutviklingen til f_j er

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_j(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \end{aligned}$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_j(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt.$$

Eksempel 2.11. Vi beregner cosinusrekken til $f(t) = t$ på $(0, \pi)$. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t dt = \pi/2$$

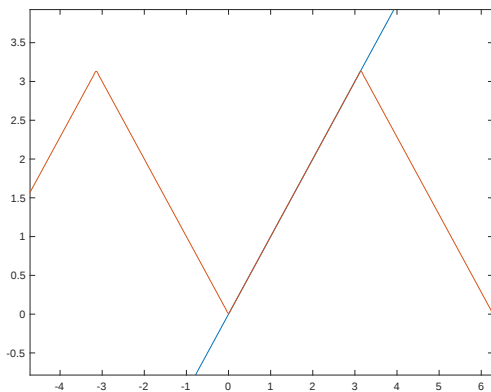
og

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt dt = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n. \end{cases}$$

slik at

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

på intervallet $(0, \pi)$. Under er et plot af $f(t) = t$ og cosinusrekken på et litt større intervall enn $[0, \pi]$. $\triangle$



Parsevals teorem

En uendeligdimensjonal variant av pytagoras, kalles Parsevals teorem.

Parsevals teorem

Anta f er riemannintegrerbar, og at

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{L}}.$$

Da gjelder Parsevals identitet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

Eksempel 2.12. Vi kan bruke fourierrekken til heavisidefunksjonen til å finne summen til rekken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Siden

$$u(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

og u er glatt i $t = \pi/2$, ser vi at

$$\begin{aligned} 1 = u(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \quad \triangle$$

Eksempel 2.13. Vi kan bruke Parsevals identitet til å finne summen til den kjente og kjære rekken

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Siden

$$t \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt,$$

gir Parsevals identitet at

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

eller

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \triangle$$

Vanskelig teori

Hvis du slår opp i et kapittel om fourierrekker i en vanlig lærebok i matematikk, begynner de gjerne med noe slikt:

Anta at vi har en funksjon $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ som vi har lyst til å skrive

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Ok, så hva må koeffisientene være? La oss gange hele greia med $\sin mt$ og integrere alt sammen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt dt$$

Det neste steget er å bytte plass på integraltegnet og summen, slik at vi får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt$$

og så bruke at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

for å se at det blir en haug med kanselleringer på høyresiden, og at vi derfor får

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt = \pi b_n.$$

Men denne 'utledningen' gir en litt falsk følelse av forståelse. Det er et problem her, som er illustrert av et eksempel fra kapittel 7 i Rudin. Problemet ligger i likningen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin mt dt &= \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt & \end{aligned}$$

Følgende eksempel viser at det å bytte om på integrasjon og uendelig sum kan være farlig. La

$$f_n(t) = nt(1-t^2)^n.$$

Fra rekketeorien ser vi enkelt at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} nt(1-t^2)^n = 0$$

dersom $0 \leq t \leq 1$, slik at

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0.$$

Men

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}.$$

Det ligger altså ingen nødvendighet i at det går greit å bytte om på uendelig sum og integral:

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt$$

Følgende strategi er derfor å foretrekke. Strategien er litt teknisk, men leder frem mot riktig resultat uten alt for mange vanskeligheter. En *generell fourierrekke* er et uttrykk på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t).$$

Vi skal nå utlede litt teori om disse. La f og g være komplekse funksjoner av en reell variabel på intervallet $[a, b]$. Husk at

$$\int_a^b f \bar{g}$$

er et indreprodukt og at f og g er *ortogonale* på $[a, b]$ dersom

$$\int_a^b f \bar{g} = 0.$$

Alle lineærkombinasjoner av en endelig mengde med innbyrdes ortogonale funksjoner ϕ_n er et vektorrom, og $\{\phi_n\}$ er en basis for dette vektorrommet. Dersom

$$\int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

sier vi at familien er *ortonormal*.

Eksempel 2.14. Funksjonene

$$\frac{1}{2\pi} e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$$

er et ortonormalt system på intervallet $[-\pi, \pi]$. $\triangle$

Eksempel 2.15. La $m, n \geq 1$. Siden

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt dt = 0$$

utgjør $\{\sin nt, \cos mt\}$ også et ortogonalt system på $[-\pi, \pi]$. Vi tar cosinusfunksjonene. Først skriver vi om litt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt &= \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t + \cos(n-m)t dt \end{aligned}$$

Det siste integralet er lett å beregne. Det forsvinner for alle verdier av m og n , unntatt når $m = n$, for da er

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = \pi,$$

slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

De to andre formlene bevises på samme måte. $\triangle$

Eksempel 2.16. Legendrepolynomene er en familie av polynomer gitt ved rekursjonen

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ (n+1)P_{n+1}(t) &= (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Disse er et ortogonalt system på intervallet $[-1, 1]$. De første fem polynomene er:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \end{aligned}$$

Disse dukker opp mange steder i anvendelser, for eksempel i interpolasjon, numerisk integrasjon, samt Schrödingers likning for hydrogenatomet. $\triangle$

Dersom en funksjon kan skrives som en lineærkombinasjon av ortonormale funksjoner:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t),$$

vet vi fra kapitlet om indreproduktrom at fourierkoeffisientene kan skrives

$$c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt$$

og at

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 = \int_a^b f^2(t) dt.$$

Dersom f ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjonene ϕ_n , har allikevel uttrykket

$$\sum_{n=1}^N c_n \phi_n,$$

noen gunstige egenskaper. Lineærkombinasjonen med fourierkoeffisientene som vektor er en god approksimasjonen til f .

Teorem 2.17. Dersom

$$h(t) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt$$

og

$$g(t) = \sum_{n=1}^N d_n \phi_n(t),$$

er

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt$$

Bevis. Denne beregningen er litt hårete, men du finner nok ut av det med penn og papir:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt &= \int_a^b |f(t)|^2 dt - \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \\ &\quad - \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt = \\ \int_a^b |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N c_n \overline{d_n} - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} d_n + \sum_{n=1}^N d_n \overline{d_n} &= \\ \int_a^b |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n} + \sum_{n=1}^N |c_n - d_n|^2. \end{aligned}$$

Det siste uttrykket er helt klart minimert dersom man velger $d_n = c_n$. $\square$

Det neste teoremet kalles gjerne *Bessels ulikhet*, ihvertfall dersom $n \rightarrow \infty$.

Teorem 2.18. Dersom

$$h(t) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(t),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt$$

er

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

Bevis. Fra forrige bevis vet vi at

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}.$$

Siden

$$\int_a^b |f(t) - h(t)|^2 dt \geq 0,$$

må

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \geq \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}. \quad \square$$

Merk til slutt at dersom vi har uendelig mange funksjoner ϕ_n , impliserer Bessels ulikhet at

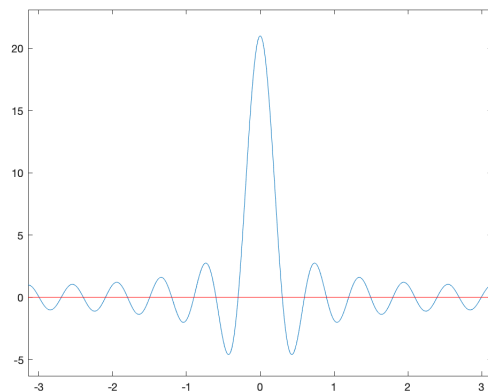
$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

er en konvergent rekke, og at $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$.

Uttrykket

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^N e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nt$$

kalles *dirichletkjernen*. Under er et plot av dirichletkjernen for $N = 10$.



Vi kan også lage en enda penere formel. Først utnytter vi at en trigonometrisk rekke er en geometrisk rekke med faktor e^{it} , og skriver

$$e^{iNt} \sum_{n=-N}^N e^{int} = \sum_{n=0}^{2N} e^{int} = \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1},$$

så lenge $e^{it} \neq 1$. Siden

$$\frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} e^{iNt} = 1$$

kan vi beregne

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{int} &= \frac{e^{-i(N+1/2)t}}{e^{-it/2}} e^{iNt} \sum_{n=-N}^N e^{int} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} & t \neq 0 \\ 2N + 1 & t = 2k\pi \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{1}{2}t} & t \neq 0 \\ 2N + 1 & t = 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vi kan bruke dirichletkjernen til å skrive partialsummen til en fourierrekke som noe som kalles en konvolusjon.

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{int} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(t-y)} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(t-y) dy = f * D_n. \end{aligned}$$

Konvolusjonsbegrepet er ekstremt viktig i signalbehandling, men vi skal vente til neste semesteret med å se nøye på dette.

Teorem 2.19. La f være en 2π -periodisk funksjon slik at $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ konvergerer. Dersom f er deriverbar i t , er

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = f(t).$$

Bevis. Dette er et pent bevis laget av en kar som heter Paul Chernoff. Formlene i beviset blir litt enklere å skrive opp dersom vi antar $t = 0$ og at $f(0) = 0$. Hvis ikke er dette er tilfelle, kan vi flytte hele problemet slik at t ligger på origo, noe som er helt greit siden f er 2π -periodisk, og så subtrahere $f(0)$ fra f , som også er greit siden $f(x) - f(0)$ også tilfredsstiller betingelsene i teoremet. Vi må vise at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-i(N+1)t}}{e^{it} - 1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{e^{it} - 1} e^{-i(N+1)t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{e^{it} - 1} e^{iNt} dt \end{aligned}$$

De to siste integralene er fourierkoeffisienter til funksjonen

$$g(t) = \frac{f(t)}{e^{it} - 1}.$$

og må derfor gå mot null når $N \rightarrow \infty$ dersom $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$ konvergerer. Siden f er deriverbar og $f(0) = 0$, er g begrenset i området rundt 0, og følgelig må $\int_{-\pi}^{\pi} g^2$ konvergere siden $\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ gjør det. $\square$

Fouriertransform

Dette er noe som har en spesiell plass i elektroingeniørens hjerte. I dette kapitlet skal vi gå gjennom fouriertransformens grunnleggende egenskaper.

Fouriertransform

Fouriertransformen til f er

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

der ω er en reell variabel.

Siden

$$X(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

ser vi at det gir ingen mening å stappe inn en funksjon som ikke lar seg integrere på hele t -aksen. Det er vanlig å kreve at x er absolutt integrerbar, altså at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Det er mulig å slakke noe på dette kravet, med det skal ikke vi gjøre. Funksjonen $e^{-i\omega t} = \cos \omega x - i \sin \omega x$ er en parametrisering av enhetssirkelen, med $|e^{-i\omega t}| = 1$ for alle ω og x .

Inngangsbillett til fouriertansform

Dersom x er absolutt integrerbar, konvergerer integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

absolutt.

Bevis. Dersom ω og x er reelle, er $|e^{-i\omega t}| = 1$, slik at

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-i\omega t}| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Eksempel 2.20. La $a > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|x|}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-x(a+i\omega)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(a-i\omega)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad \triangle \end{aligned}$$

Vi har tilgang på en formel for den inverse transformen, men det er for vanskelig å bevise for oss.

Invers fouriertransform

Dersom $X(\omega)$ er absolutt integrerbar, har vi

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

For å få en magefølelse for hvorfor inversformelen er som den er, kan vi ta en titt på fourierrekker. Man kan tenke at fouriertransform er en slags fourierrekke der $[-L, L]$ strekkes til å bli hele x -aksen. La f være en kontinuerlig og absolutt integrerbar funksjon. Vi setter opp fourierrekken til f på intervallet $(-L, L)$, og gjør en omskrivning:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi t}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L x(s) e^{-i \frac{n\pi}{L} s} ds \right) e^{i \frac{n\pi t}{L}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{L} \int_{-L}^L x(s) e^{-i \frac{n\pi}{L} s} ds \right) e^{i \frac{n\pi t}{L}}. \end{aligned}$$

Det siste uttrykket kan tolkes som en riemannsum på aksene der n telles fra $-\infty$ til ∞ . Gitteravstanden er $\frac{\pi}{L}$, og punktene er gitt ved $\frac{n\pi}{L}$. Hvis vi lar $L \rightarrow \infty$, vifter vi det vi kan med armer og bein og får

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Vi kjenner igjen det innerste integralet som fouriertransformen til x :

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} dt.$$

Det ytterste integralet kalles den inverse fouriertransformen, og med noen strenge krav på signalet x , er det riktig å skrive at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Teorem 2.21. Hvis f er glatt, og alle deriverte synker fryktelig raskt når $|x| \rightarrow \infty$, er det riktig at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Hva betyr det at alle deriverte synker raskt nok når $t \rightarrow \infty$? Det er vanlig å kreve at

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^k \left| \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right| < \infty$$

for alle k og n , for da er det ikke så vanskelig å bevise at inversformelen gjelder (det er fremdeles litt for vanskelig for oss). Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på en mye mer komplisert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue. Ingeniører må jo stadig vekk fouriertransformere funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet, så det er bare å knipe igjen øynene og håpe på det beste som vi pleier.

Eksempel 2.22. La $a > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|t|}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-x(a+i\omega)} dx + \int_0^{\infty} e^{x(a-i\omega)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad \triangle \end{aligned}$$

Regneregler

Den første er grei. Siden integralet er en lineæroperator, er også fouriertransformen det.

Fouriertransform er en lineæroperator

Dersom a og b er tall og f og g funksjoner, er

$$\mathcal{F}\{ax + by\} = a\mathcal{F}\{x\} + b\mathcal{F}\{y\}.$$

Husk at $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ siden x er absolutt konvergent.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\dot{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

slik at

Derivasjonsregelen

La x' være absolutt integrerbar på x -aksen, og anta at $x(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \pm\infty$. Da er

$$\mathcal{F}\{\dot{x}\} = i\omega \mathcal{F}\{x\}$$

Eksempel 2.23. Vi beregner

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt$$

Dette er litt jobb. Derivasjonsregelen over gir

$$\mathcal{F}(-2te^{-t^2}) = i\omega \mathcal{F}(e^{-t^2}).$$

Men vi kan også observere at

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(-2te^{-t^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -2te^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ite^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt \\ &= -2i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt \\ &= -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}). \end{aligned}$$

Vi mangler litt vanskelig teori for å være helt sikker på den siste beregningen, men vi lar den passere allikevel. Hvis vi setter disse uttrykkene lik hverandre, får vi differensiallikningen

$$i\omega \mathcal{F}(e^{-t^2}) = -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2})$$

eller

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e^{-t^2}) + \frac{\omega}{2} \mathcal{F}(e^{-t^2}) = 0$$

for $\mathcal{F}(e^{-t^2})$. Integrerende faktor er

$$e^{\omega^2/4},$$

slik at

$$\frac{d}{d\omega} (e^{\omega^2/4} \mathcal{F}(e^{-t^2})) = 0$$

eller

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = C e^{-\omega^2/4}.$$

Senere i semesteret skal vi se at

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

som gir

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}.$$

Dersom $a > 0$, kan vi gjøre den samme beregningen og få

$$\mathcal{F}(e^{-at^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}. \quad \triangle$$

Flere regneregler

Tidsskift

$$\mathcal{F}\{x(t - \theta)\} = e^{-i\omega\theta} X(\omega)$$

Frekvensskift

$$\mathcal{F}\{e^{i\theta t} x(t)\} = X(\omega - \theta)$$

Tidsskalering

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Konvolusjon

Konvolusjon er et litt merkelig produkt som dukker opp her og der, og er definert ved

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) y(t - \theta) d\theta. \quad (2.2)$$

Det finnes forskjellige typer konvolusjoner, og det er stort sett forskjellige integrasjonsgrenser som skiller dem. Hvilken type integrasjonsgrenser som er mest relevant, kommer litt an på anvendelsen, men vi begynner med den her.

Konvolusjon kan fremstå som noe umotivert, men har fryktelig mange bruksområder. Mange artige ting er basert på konvolusjon. Noen eksempler er reverbknappen på gitarforsterkeren din, bakgrunnsuskarpheten i det vakre konfirmasjonsbildet ditt, eller autofocusfunksjonen på speilreflekskameraet du fikk til ovennevnte konfirmasjon. Sannsynlighetstettheten til summen av to stokastiske variable er konvolusjonen mellom tetthetene til hver variabel.

Eksempel 2.24. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y , med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$. Hva er sannsynlighetstettheten til $X + Y$?

Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z - v$, tar $X + Y$ verdien z . For å finne sannsynlighetstettheten til $X + Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z - v)$, slik at sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X + Y$ blir

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z - v) dv. \quad \triangle$$

Viktig regel

Det er lett å vise at konvolusjonsoperatoren er kommutativ:

$$x * y = y * x$$

Konvolusjonsteoremet

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)Y(\omega),$$

eller på norsk: "Konvolusjon i tidsdomenet tilsvare multiplikasjon i frekvensdomenet."

Bevis. Vi bruker varablelskiftet $u = x - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x - v) dv e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(x - v) e^{-i\omega t} dv dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} \mathcal{F}(x) du \\ &= \mathcal{F}\{x\} \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} du \\ &= \mathcal{F}\{x\} \mathcal{F}\{y\} = X(\omega)Y(\omega) \quad \square \end{aligned}$$

Vi skal løse differensiallikninger med fouriertransform, og da vil vi få bruk for å inverstransformere produkter av fouriertransformer. Konvolusjonsteoremet forteller oss nøyaktig hvordan vi inverstransformerer et slikt produkt.