

## Kapittel 3

# Funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$

I dette kapitlet skal vi ta for oss funksjoner på  $\mathbb{R}$ . Dette er på noen måter mer komplisert enn funksjoner på  $\mathbb{N}$ .

Alternative kilder:

- Adams kap. P og 1-4
- Lindstrøms I kap. ??

## En sykt viktig funksjon

Mange vil hevde at eksponensialfunksjonen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

er den viktigste funksjonen av alle. Forholdstesten viser at rekken er absolutt konvergent for alle  $x$ :

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

og det går an å vise at

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tallet  $e$  er definert ved

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71182818284590452 \dots,$$

og det går an å vise at

$$\exp(x) = e^x.$$

Dette er relativt enkelt å vise for rasjonale  $x$ , man ser fra produktregelen at

$$\exp(2) = \exp(1)\exp(1) = e^2$$

og at

$$\exp(1) = \exp(1/2)\exp(1/2) = \sqrt{e}\sqrt{e}$$

og så videre.

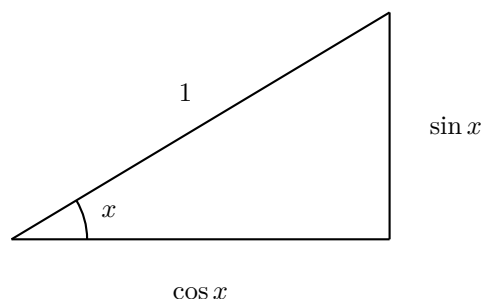
**Eksempel 3.1.** Det er vel på tide å introdusere sinusfunksjonen

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

På skolen lærte du at disse var katetene i en rettvinklet trekant:



Det går an å vise at alt dette er det samme, men det er litt jobb.  $\triangle$

## Kontinuerlige funksjoner

Anta at man har en funksjon  $f$ . Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

forteller oss noe om hva som skjer med  $f$  når den avhengige variabelen  $x$  går mot verdien  $x_0$ . For de fleste funksjoner man støter på i dagliglivet, er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

men dette er ikke alltid riktig.

**Definisjon.** En funksjon sies å ha grenseverdien  $L$  i  $x_0$  dersom det for hver  $\epsilon > 0$  finnes en  $\delta > 0$  slik at implikasjonen

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

**Teorem 3.2.** En grenseverdi, dersom den eksisterer, er entydig.

*Bevis.* Dette er så og si identisk med beviset for tilsvarende teorem for følger. Prøv selv!  $\square$

**Eksempel 3.3.** For den konstante funksjonen

$$f(x) = 1$$

gjelder at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

overalt. Dette er lett å se. Velg  $\epsilon$ . Vi har at

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0,$$

så her kan  $\delta$  velges til hva som helst.  $\triangle$

**Eksempel 3.4.** Det første ordens polynomet

$$f(x) = ax + b$$

har grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = ax_0 + b.$$

Dette er også lett å se. Velg  $\epsilon$ . Vi har at

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)|.$$

Dersom vi velger  $\delta = \epsilon/|a|$ , og krever  $0 < |x - x_0| < \delta$ , får vi

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Spesialtilfellet  $a = 1$  og  $b = 0$  forteller at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

som vi skal få bruk for lenger ned.  $\triangle$

**Eksempel 3.5.** Vi prøver å finne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x).$$

Hva kan  $L$  være? Vi ser først av definisjonen at

$$\exp(0) = 1,$$

Dette forteller ikke nødvendigvis at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp(x) = 1,$$

men vi kan ha det som arbeidshypotese, og undersøke saken nærmere. La  $|x| < 1$ . Det følger at

$$\begin{aligned} |\exp(x) - 1| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \\ &\leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |x|(e - 1). \end{aligned}$$

Velg  $\epsilon$ . Dersom  $|x| \leq \frac{\epsilon}{e-1}$  vil

$$\begin{aligned} |\exp(x) - 1| &\leq |x|(e - 1) \\ &\leq \frac{\epsilon}{e - 1} (e - 1) = \epsilon, \end{aligned}$$

som er det vi måtte vise.  $\triangle$

Merk at i de tre foregående eksemplene er funksjonsverdier og grenseverdier identiske. Dette er et viktig poeng vi skal komme tilbake til om litt.

**Eksempel 3.6.** Vi kan på liknende vis som i forrige eksempel, se at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

La  $|x| < 1$ . Det følger at

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n+1)!} \\ &\leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = |x|(e - 2). \end{aligned}$$

Velg  $\epsilon$ . Dersom  $|x| \leq \frac{\epsilon}{e-2}$  vil

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| &\leq |x|(e - 2) \\ &\leq \frac{\epsilon}{e - 2} (e - 2) = \epsilon, \end{aligned}$$

som er det vi måtte vise. Denne grenseverdien får vi bruk for når vi skal derivere eksponensialfunksjonen litt lenger ned.  $\triangle$

**Eksempel 3.7.** Heavisidefunksjonen er gitt ved

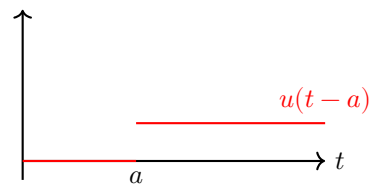
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Man kan tenke på denne som en funksjon som slår noe på ved  $t = 0$ :



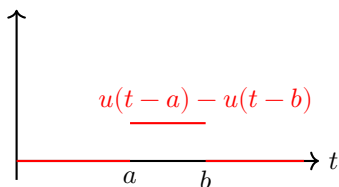
Vi kan slå på ved tiden  $t = a$  istedet:

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$



Vi kan også slå på ved  $t = a$  og av igjen ved  $t = b$ :

$$u(t - a) - u(t - b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$



Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$$

eksisterer ikke. Hva skulle den i så fall vært? Fra venstre ser det ut til at  $u$  går mot null, mens fra høyre ser det ut til at  $u$  går mot en.  $\triangle$

**Eksempel 3.8.** Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

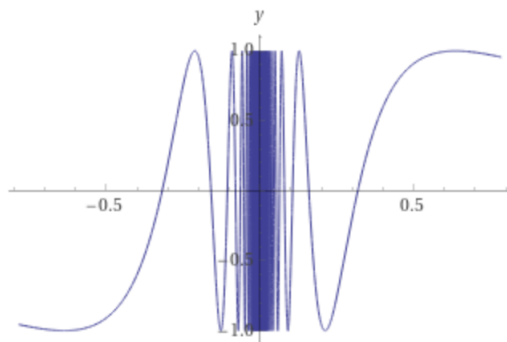
eksisterer ikke. Siden  $\sin \frac{1}{x} = 1$  når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

og  $\sin \frac{1}{x} = -1$  når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$$

for alle  $n \in \mathbb{Z}$ , ser vi at dersom du står i  $x = a$  og lar  $x \rightarrow 0$  vil  $\sin \frac{1}{x}$  ha uendelig mange oscillasjoner mellom  $a$  og  $0$ , uansett hvor liten  $a$  er. Så konklusjonen er at dersom du har en kandidat for grenseverdi  $L$ , og velger  $\epsilon > 0$  og  $\delta > 0$  som du tror gjør jobben, vil  $|\sin \frac{1}{x} - L| > 1 - |L|$  for en eller annen  $|x| < \delta$ , og  $L$  er altså ikke en grenseverdi. Dette eksemplet er litt komplisert, men vi skal bruke det til å illustrere et viktig poeng litt senere. Ta en titt på figuren under.  $\triangle$



**Teorem 3.9.** Anta vi har to funksjoner  $f$  og  $g$ , med

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$$

og la  $c$  være et tall. Da gjelder at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cL_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = L_1L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2 \quad (L_2 \neq 0)$$

*Bevis.* Velg  $\epsilon$ . Vi må vise at det går an å velge  $\delta$  slik at  $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$  impliserer

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= \\ |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| &\leq \\ |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \end{aligned}$$

Siden  $f$  og  $g$  har respektive grenseverdier  $L_1$  og  $L_2$  i  $x_0$ , kan vi velge  $\delta$  slik at  $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$  impliserer

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|g(x) - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer  $0 \leq |x - x_0| \leq \delta$  at

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise. De andre reglene bevises på liknende måte, men det er litt mer regning.  $\square$

**Eksempel 3.10.** Nå kan vi vise at dersom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0).$$

For det første vet vi at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

og at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Teoremet om regneregler for grenseverdier sier at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = L_1L_2,$$

og dersom vi velger  $f(x) = g(x) = x$ , ser vi at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2.$$

Det samme teoremet sier at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cL_1,$$

så derfor er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cx^2 = cx_0^2.$$

Til slutt kan vi bruke

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2,$$

og slutte at for eksempel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 2x^2 + x = 2x_0^2 + x_0.$$

Hvis vi fortsetter i samme stilen, ser vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} p(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= p(x_0). \end{aligned} \quad \triangle$$

**Eksempel 3.11.** Vi kan nå vise at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp x = \exp x_0.$$

Siden

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0,$$

må

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x - x_0 = 0.$$

Vi beregner så

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \exp x &= \lim_{x \rightarrow x_0} \exp(x_0 + x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \exp x_0 \exp(x - x_0) \\ &= \exp x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \exp(x - x_0) \\ &= \exp x_0 \exp(0) = \exp x_0. \quad \triangle \end{aligned}$$

Det neste teoremet kalles gjerne skviseteoremet, for det handler om en funksjon som blir skvist mellom to andre funksjoner.

**Teorem 3.12.** Anta at  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  på et intervall som inneholder  $x_0$ , og at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

Da er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

*Bevis.* Denne tar vi i IF. □

**Eksempel 3.13.** Man kan bevise at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

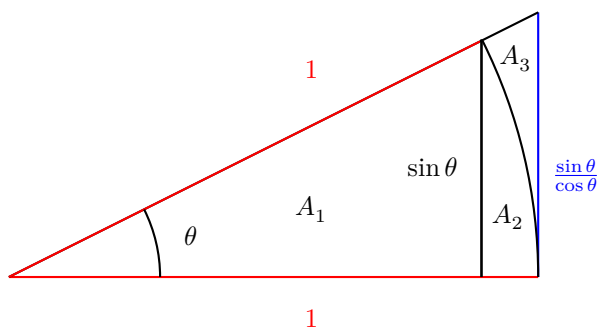
geometrisk ved å bruke skviseteoremet på ulikheten

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Denne kan utledes ved å betrakte figuren under og se at

$$A_1 \leq A_1 + A_2 \leq A_1 + A_2 + A_3.$$

Husk at arealet av et kakestykke med radius en og vinkelutslag  $\theta$  er  $\theta/2$ . △



**Eksempel 3.14.** Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

eksisterer. Siden  $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$  når  $x \neq 0$ , er

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|,$$

og siden

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0,$$

må

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. \quad \triangle$$

Til slutt kan nevnes at i noen situasjoner er vi nødt til å operere med ensidige grenser.

**Definisjon.** En funksjon sies å ha den venstresidige grenseverdien  $L$  i  $x_0$  dersom det for hver  $\epsilon > 0$  finnes en  $\delta > 0$  slik at implikasjonen

$$0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L$$

eller

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

Høyresidige grenser defineres tilsvarende.

En funksjon er kontinuerlig i et punkt dersom du kan tegne grafen gjennom punktet uten å løfte blyanten fra rutepapiret. For å gjøre dette presist, bruker vi grenseverdigbegrepet.

**Definisjon.** En funksjon sies å være *kontinuerlig* i  $x_0$  dersom:

- $f(x_0)$  er definert
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  eksisterer
- $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Som regel er det slik at man ikke spør om  $f$  er kontinuerlig i et punkt der  $f$  ikke er definert, for disse punktene ekskluderes per definisjon fra definisjonsmengden. Vi sier at en funksjon er kontinuerlig på et intervall dersom funksjonen er kontinuerlig for alle punkter i intervallet. Dersom intervallet er lukket, bruker man ensidige grenser i endepunktene.

**Eksempel 3.15.** Polynomer er kontinuerlige overalt. Vi har vist at for et polynom  $p$ , er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

for alle  $x_0$ . △

**Eksempel 3.16.** En rasjonal funksjon er en funksjon på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

der  $p$  og  $q$  er polynomer. Det samme resonnementet som for polynomer kan kjøres på disse funksjonene. Man bruker at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2},$$

og slutter at siden  $p$  og  $q$  er polynomer, er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

så lenge  $q(x_0) \neq 0$ . Derfor er rasjonale funksjoner kontinuerlige overalt der  $q(x) \neq 0$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.17.** Heavisidefunksjonen er ikke kontinuerlig i  $x = 0$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.18.** Eksponensialfunksjonen er kontinuerlig overalt. Vi har jo vist at

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp x = \exp x_0$$

for alle  $x_0$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.19.** Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ L & x = 0 \end{cases}$$

er ikke kontinuerlig for noen  $L$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.20.** Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig overalt.  $\triangle$

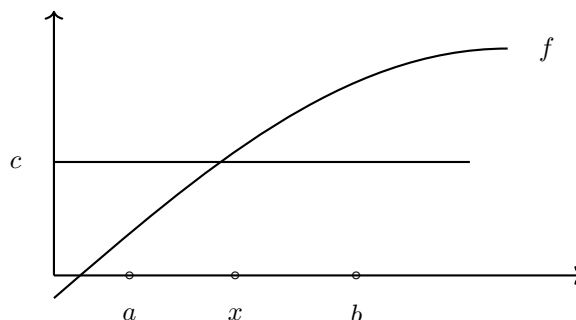
**Eksempel 3.21.** Funksjonen gitt ved  $f(x) = 1/x$  kan virke noe paradoks, siden den er kontinuerlig overalt der den er definert, men allikevel ikke kan tegnes uten å løfte blyanten fra arket i  $x = 0$ . Forklaringen er at  $f$  er ikke definert i  $x = 0$ , og dette deler definisjonsmengden i to adskilte deler. En kontinuerlig funksjon kan tegnes uten å løfte pennen fra papiret så lenge du ser på et sammenhengende intervall, men når definisjonsmengden er delt i to, bryter dette sammen. (Man kan spørre seg om det er naturlig i det hele tatt å stille spørsmålet hvorvidt en funksjon er kontinuerlig på en ikke sammenhengende definisjonsmengde.) Dette er lett å bli forvirret av i starten, og det finnes en strengere type kontinuitet som kalles uniform kontinuitet. En funksjon  $f$  er uniformt kontinuerlig dersom det for hver  $\epsilon > 0$  finnes en  $\delta > 0$  slik at

$$0 < |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

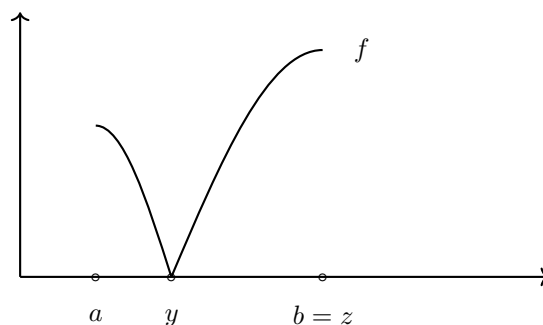
for alle  $x$  og  $y$ . Funksjonen  $f(x) = 1/x$  er ikke uniformt kontinuerlig.  $\triangle$

De to neste teoremene kalles henholdsvis skjæringssetningen og ekstremalverdisetningen. Bevisene er litt for vanskelige for dette kurset, men figurene kan hinte om hvorfor teoremene er sanne. Merk også at teoremene ikke er sanne dersom definisjonsmengden er  $\mathbb{Q}$  istedet for  $\mathbb{R}$ .

**Teorem 3.22.** Anta at  $f$  er en kontinuerlig funksjon på  $[a, b]$ , og at  $f(a) < f(b)$ . Dersom  $f(a) < c < f(b)$ , finnes en  $x \in [a, b]$  slik at  $f(x) = c$ .

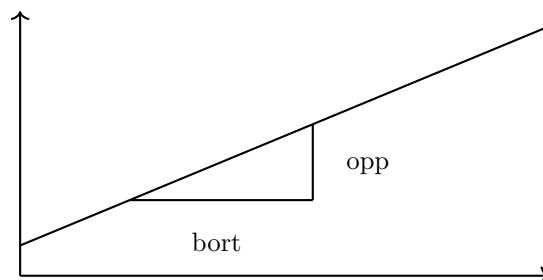


**Teorem 3.23.** Anta at  $f$  er en kontinuerlig funksjon på  $[a, b]$ . Det finnes punkter  $y$  og  $z$  slik at  $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$  for alle  $x \in [a, b]$ .

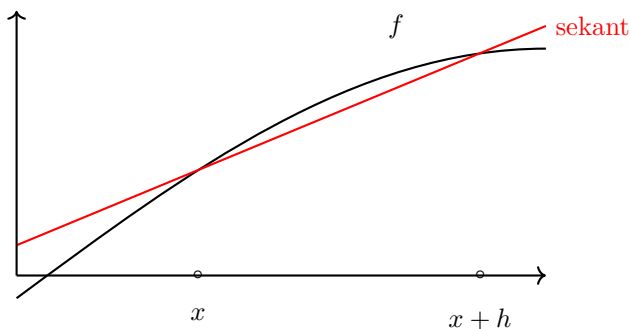


## Deriverbare funksjoner

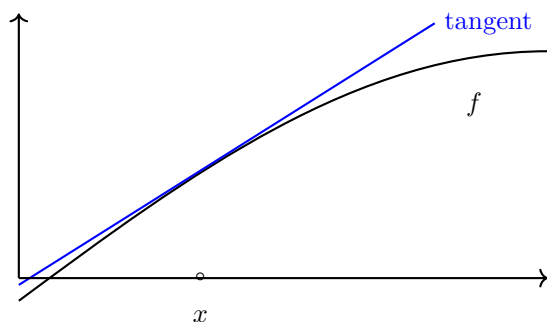
Det er et interessant faktum at Newton fant ut av differensialregning flere hundre år før noen skjønnte hva de reelle tallene egentlig var. Stigningstallet til en rett linje er opp delt på bort.



La  $f$  være en funksjon. En *sekant* er en rett linje som skjærer grafen til  $f$  lokalt i to punkter:



En *tangent* er en rett linje som tangerer grafen til  $f$  i et punkt:



Man kan tenke på dette som en sekant der de to skjæringspunktene er sammenfallende. Stigningstallet til tangenten i  $x_0$  er det vi mener når vi snakker om stigningstallet til  $f$  i  $x_0$ . Nå skal vi definere nøyaktig hva vi mener med dette.

**Definisjon.** Vi definerer den deriverte til  $f$  i punktet  $x$  som

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer. Vi sier i så fall at  $f$  er *deriverbar* i  $x$ .

Vi skriver også

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Noen ganger er denne notasjonen mer praktisk. Siden grenseverdier er entydige, ser vi at den deriverte er entydig bestemt dersom den eksisterer. Likningen for tangenten til  $f$  i punktet  $x_0$  er gitt ved

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Eksempel 3.24.** La  $f(x) = x$ . Vi beregner

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.25.** La  $f(x) = \exp x$ . Produktregelen for eksponentialfunksjonen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} \\ &= \exp x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x. \end{aligned} \quad \triangle$$

**Eksempel 3.26.** Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig, men ikke deriverbar, i  $x = 0$ . Grenseverdien

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h} \end{aligned}$$

eksisterer ikke. △

**Teorem 3.27.** Dersom en funksjon er deriverbar i et punkt, er den også kontinuerlig i punktet.

*Bevis.* Dersom

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

skal eksistere, må både  $f(x)$  og

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

eksistere, og de må være like. Men dette er det samme som at  $f$  kontinuerlig i  $x$ . □

**Eksempel 3.28.** Hverken heavisidefunksjonen eller  $\sin \frac{1}{x}$  er deriverbare i  $x = 0$ . Dette vet vi siden de ikke er kontinuerlige i  $x = 0$ . △

**Eksempel 3.29.** Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i  $x = 0$ , siden

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0. \end{aligned}$$

Men her er en artig tvist:  $f'$  er ikke en kontinuerlig funksjon, for

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

og  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  eksisterer ikke! △

Eksemplet over viser at deriverbarhet ikke impliserer at den deriverte er en kontinuerlig funksjon. Den motsatte implikasjonen er derimot sann; dersom  $f'$  er kontinuerlig i et punkt, må jo  $f'$  være definert i dette punktet, så det er klart at  $f$  er deriverbar om  $f'$  er kontinuerlig. Denne lille skjebnens ironi inspirerer oss til følgende definisjon.

**Definisjon.** Dersom  $f'$  er en kontinuerlig funksjon, sier vi at  $f$  er kontinuerlig deriverbar. Dersom den  $n$ -te deriverte  $f^n$  er kontinuerlig, sier vi at  $f$  er  $n$  ganger kontinuerlig deriverbar. Dersom  $f^n$  er kontinuerlig for alle  $n \in \mathbb{N}$ , sier vi at  $f$  er glatt.

**Eksempel 3.30.** Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig deriverbar i  $x = 0$ , siden

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sin \frac{1}{h} = 0. \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

som er kontinuerlig i  $x = 0$ .  $\triangle$

Her er noen regler for derivasjon.

**Teorem 3.31.** La  $f$  og  $g$  være deriverbare funksjoner. Følgende regler gjelder. (Den tredje gjelder kun når  $g(x) \neq 0$ .)

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

*Bevis.* Vi vet at

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og at

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Addisjonsregelen er rett fram:

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

For produktregelen må vi sjonglere litt mer:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

Brøkregelen dropper vi.  $\square$

**Eksempel 3.32.** La  $f(x) = x^2$ . Vi beregner

$$f'(x) = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.33.** La  $f(x) = x^n$ , der  $n \in \mathbb{N}$ . Vi viser at

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

ved induksjon. De to foregående eksemplene viser at regelen gjelder for  $n = 1$  og  $n = 2$ . Induksjonssteget er å vise at likningen

$$\frac{d}{dx} x^n n = nx^{n-1}$$

impliserer

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n.$$

Vi bruker multiplikasjonsregelen på den første, og får

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (nx^{n-1}) = (n+1)x^n.$$

Bruker vi derivasjonsregelen for rasjonale funksjoner, ser vi at regelen også gjelder for  $n \in \mathbb{Z}$ . Det går også an å vise at regelen gjelder dersom  $n \in \mathbb{R}$ , men dette er mye vanskeligere.  $\triangle$

**Teorem 3.34.** Dersom  $f$  er deriverbar i punktet  $g(x)$ , og  $g$  er deriverbar i punktet  $x$ , er

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x))g'(x).$$

*Bevis.* Denne er litt teknisk, så vi nøyer oss med en skisse av hvordan beviset går. Da kan man ihvertfall skjønne hvorfor formelen ser ut som den gjør. Vi må beregne

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Men dersom  $h \neq 0$ , er

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \\ \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(g(x))) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x). \end{aligned} \quad \square$$

**Eksempel 3.35.** La  $f(x) = \cos x$ . Vi bruker kjerner-regelen, og får

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{i \exp(ix) - i \exp(-ix)}{2} \\ &= -\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = -\sin x. \quad \triangle \end{aligned}$$

På skolen lærer man gjerne at maksimum og minimum er det samme som at tangenten er vannrett. Dette er en forenkling av virkeligheten, Det finnes også andre typer maksimums- og minimumspunkter.

**Eksempel 3.36.** La  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  være gitt ved  $f(x) = x$ . Denne funksjonen har maksimum i  $x = 1$ . Dette er helt åpenbart det punktet der  $f$  tar sin største verdi.  $\triangle$

**Eksempel 3.37.** Funksjonen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gitt ved  $f(x) = |x|$  har et lokalt minimum i  $x = 0$ , siden

$$0 \leq |x|$$

for alle  $x$ .  $\triangle$

**Definisjon.** Dersom det finnes en  $\delta$  slik at

$$|x - p| < \delta \implies f(p) \geq f(x),$$

sier vi at  $p$  er et *lokalt maksimum* for  $f$ . Dersom

$$|x - p| < \delta \implies f(p) \leq f(x),$$

er  $p$  et lokalt minimum.

**Eksempel 3.38.** Funksjonen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gitt ved  $f(x) = 1 - (x - 1)^2$  har et lokalt maksimum i  $x = 1$ . Dette er mulig å se ved å niglane litt på funksjonsuttrykket. Siden

$$(x - 1)^2 \geq 0$$

oppnår funksjonen sin maksimale verdi når dette leddet er null, altså i  $x = 1$ .  $\triangle$

**Definisjon.** Et punkt  $p$  der  $f'(p) = 0$ , kalles gjerne kritisk punkt. Punkter der  $f'$  ikke eksisterer, kalles singulære punkter.

**Teorem 3.39.** Dersom  $f$  er en funksjon på  $(a, b)$ , har et lokalt maksimum i  $p$ , og  $f'(p)$  er definert, er  $f'(p) = 0$ . Det samme gjelder om  $p$  er et minimum.

*Bevis.* La  $p$  være et lokalt maksimum. Beviset for minimum er helt likt. Dersom  $h > 0$  er liten, er

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0,$$

og dersom vi lar  $h$  gå mot null, ser vi at

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0.$$

Men vi kan gjøre det samme resonnementet med en liten  $h < 0$ . Da blir

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \geq 0,$$

og

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \leq 0.$$

Med andre ord må både  $f'(p) \leq 0$  og  $f'(p) \geq 0$ , så eneste mulighet er  $f'(p) = 0$ .  $\square$

**Eksempel 3.40.** Et andregradspolynom

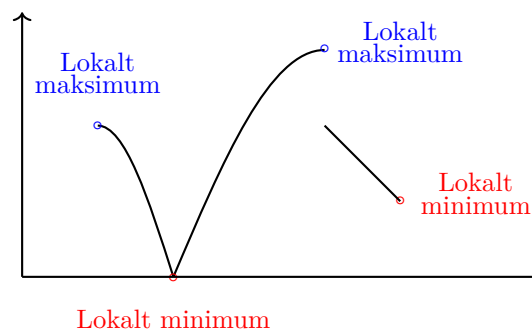
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

har ekstremaltpunkt i  $x = -\frac{b}{2a}$ , siden

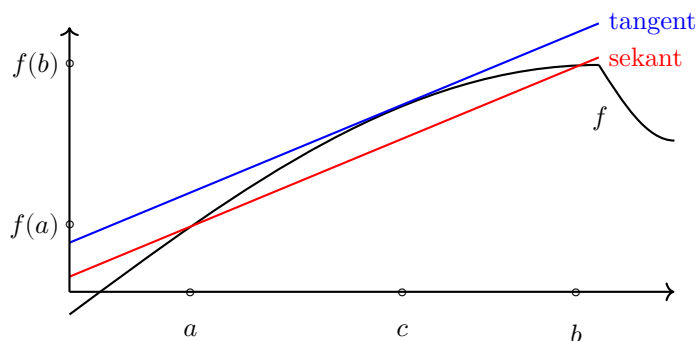
$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + b = -b + b = 0. \quad \triangle$$

**Teorem 3.41.** La  $I$  være et intervall, og anta at  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  har et ekstremalpunkt i  $x_0 \in I$ . Da er  $x_0$  enten et endepunkt, eller et kritisk punkt, eller et singulært punkt.

Under er en figur av en funksjon med verdimengde  $[a, b]$ .



Sekantsetningen kan brukes til å bevise noen andre interessante ting, og er motivert fra følgende figur. Dersom  $f$  er deriverbar og du slår en sekant, må det mellom punktene der du slo sekanten finnes en tangent som er parallell med sekanten din.



**Teorem 3.42.** Dersom  $f$  er kontinuerlig på  $[a, b]$  og deriverbar på  $(a, b)$ , finnes  $c \in (a, b)$  slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Bevis.* Vi beviser først spesialtilfellet der  $f(a) = f(b)$ . I dette tilfellet kalles gjerne sekantsetningen Rolles teorem, og teoremet sier nå at  $f'(c) = 0$  for en eller annen  $c \in (a, b)$ . Dette er lett å bevise. Siden  $f$  er kontinuerlig på  $[a, b]$ , må  $f$  ha et maksimum og et minimum på  $[a, b]$ . Hvis begge disse sitter i endepunktene, må  $f$  være en konstant funksjon, og da må minst ett av disse finnes på  $(a, b)$ . La oss kalle dette punktet  $c$ . Siden  $f$  er deriverbar på  $(a, b)$  må  $f'(c) = 0$ .

Dersom  $f(a) \neq f(b)$ , kan vi gjøre som følger. La  $g$  være funksjonen gitt ved

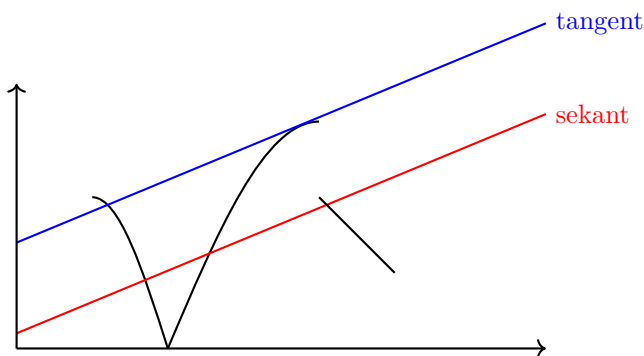
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Siden  $g(a) = g(b) = f(a)$ , må Rolles teorem gjelde, og det må finnes et punkt  $c \in (a, b)$  slik at  $g'(c) = 0$ . Men dette betyr at

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

som er det sekantsetningen sier.  $\square$

Merk at  $f$  må være deriverbar overalt på  $(a, b)$ , ellers trenger ikke utsagnet i teoremet være sant.



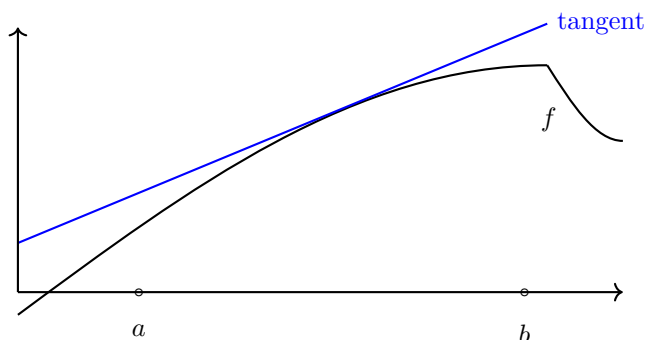
Sekantsetningen har en generalisering som kalles Taylors teorem.

**Teorem 3.43.** La  $f$  være en  $n + 1$  ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder  $a$  og  $x$ . Det finnes en  $s$  mellom  $a$  og  $x$  slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

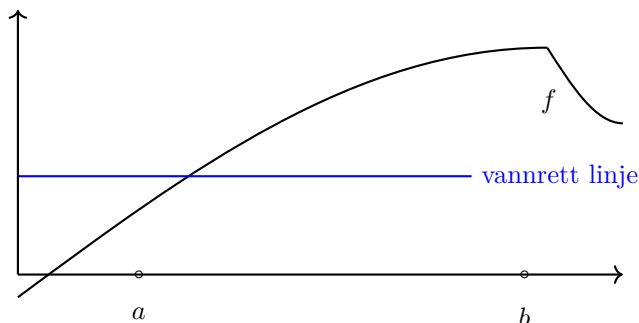
Vi avslutter med to teoremer.

**Teorem 3.44.** Anta at  $f$  er deriverbar på  $(a, b)$ . Dersom  $f' > 0$  på  $(a, b)$  er  $f$  stigende på  $(a, b)$ . og dersom  $f' < 0$  på  $(a, b)$  er  $f$  synkende på  $(a, b)$ .



**Teorem 3.45.** Anta at  $f$  er deriverbar på  $(a, b)$  og enten  $f' > 0$  eller  $f' < 0$  på  $(a, b)$ . Da eksisterer  $f^{-1}$ , og

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$



Dersom vi deriverer likningen

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1,$$

som gir at

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

## Analytiske funksjoner

Vi er vant med å skrive om funksjoner. For eksempel kan funksjonsuttrykket

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

like gjerne skrives

$$f(x) = \cos 2x.$$

I dette kapitlet skal vi ta et steg videre, og skrive funksjoner som uendelige summer av tilsynelatende ikke-relaterte funksjoner.

Du kjenner allerede fire Taylorrekker.

**Eksempel 3.46.**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \triangle$$

### Eksempel 3.47.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \triangle$$

### Eksempel 3.48.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \triangle$$

### Eksempel 3.49.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (|x| < 1) \quad \triangle$$

### Eksempel 3.50. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)(x-1)}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 0 \end{cases}$$

er glatt, men ikke analytisk. Siden

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{dx^n} f(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{dx^n} f(s) = 0$$

for alle  $n$  er  $f$  glatt, men det er klart at taylorrekken om et punkt  $x = a$  ikke kan representere  $f$  på hele  $\mathbb{R}$ .  $\triangle$

Det er også mulig å skrive funksjoner som uendelige rekker av sinus- og cosinusfunksjoner, men dette skal vi vente med til senere.

### Eksempel 3.51. Vi kan bruke rekken for eksponentialfunksjonen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

sinusfunksjonen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Dersom bruker den imaginære enheten  $i$  til å skrive

$$\cos x = 1 + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

og

$$i \sin x = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

og legger disse to sammen, får vi

$$\cos x + i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}. \quad \triangle$$

## Numeriske likningslødere

Det tilsynelatende mylderet av likninger man løser på skolen kan forlede en til å tro at man kan løse alle likninger analytisk, men i virkeligheten lærer man først og fremst standardteknikker for å løse noen veldig spesifikke likningstyper.

### Eksempel 3.52. Likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan løses ved å dele ut  $a$ , og skrive

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

eller

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Vi kvadrerer, og får

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

som kalles  $abc$ -formelen.  $\triangle$

Løsningen til en likning kalles gjerne en *rot*.

### Eksempel 3.53. Likningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

har en røtter  $x = -1$  og  $x = \pm\sqrt{3}$ , men disse er ikke enkle å finne. Oppskriften for å løse en generell tredjegradslikning er lang og teknisk, og selv matematikstudenter lærer det ikke. Løsningsteknikken til en generell fjerdegradslikning er enda mer komplisert, og for en generell femtegradslikning kan man ikke en gang utlede en løsningsformel.  $\triangle$

### Eksempel 3.54. Likningen

$$\cos(2x + 3) = \frac{1}{2}$$

løses ved å inverttere cosinusfunksjonen

$$2x + 3 = \arccos \frac{1}{2},$$

huske at  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$2x + 3 = \frac{\pi}{3},$$

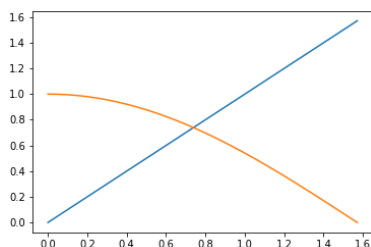
og løse for  $x$

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}. \quad \triangle$$

### Eksempel 3.55. Likningen

$$x = \cos x$$

har en rot på intervallet  $[0, 1]$ , se figur. Men denne likningen kan ikke løses med et endelig antall algebraiske operasjoner.  $\triangle$



Noen likninger kan altså løses, mens andre ikke kan det. Andre likninger har løsningsteknikker som er for kompliserte til at det er praktisk å lære seg dem. Finnes det ingen løsningsteknikker som takler alle likninger? Svaret er nei, men det finnes teknikker for å beregne tilnærmede løsninger til likninger vi av en eller annen grunn ikke kan løse analytisk, og disse teknikkene kan ofte brukes på brede klasser av likninger. Disse teknikkene kalles *numeriske likningslødere*.

En numerisk likningsløser produserer en følge av tilnærminger til løsningen. Dersom likningsløseren er tilpasset likningen vi prøver å løse, vil tilnærminger bli bedre utover i følgen. Det neste eksemplet illustrerer tankegangen.

**Eksempel 3.56.** Siden

$$\cos \frac{1}{2} \approx 0.8776 \geq \frac{1}{2}$$

ser vi at roten ligger i intervallet  $[\frac{1}{2}, 1]$ . La oss sette  $x_0 = \frac{3}{4}$ , altså midt i dette intervallet. Dette kan vi se på som en tilnærming til den analytiske løsningen. Siden

$$\cos \frac{3}{4} \approx 0.7317 \leq \frac{3}{4}$$

ser vi videre at roten må ligge i intervallet  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ , som er halvparten så bredt som det forrige, og vi setter  $x_1 = \frac{5}{8}$ , altså midt i det nye intervallet. Siden

$$\cos \frac{5}{8} \approx 0.8110 \geq \frac{5}{8},$$

må roten ligge i  $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$ , og vi setter  $x_2 = \frac{11}{16}$ . Slik kan vi fortsette så lenge vi ønsker. Denne metoden kalles gjerne *halveringsmetoden*.  $\triangle$

En løsning  $r$  av en likning

$$f(x) = 0.$$

kalles gjerne en *rot*. Dersom  $f$  bytter fortegn i  $r$ , kan vi benytte denne informasjonen til å finne en approksimasjon  $x_n$  til  $r$ . La oss anta at vi kjenner  $a$  og  $b$  slik at  $r \in [a, b]$  er den eneste roten til  $f$  i  $[a, b]$ . Vi definerer nå  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ , og  $x_3 = \frac{a+b}{2}$ . Dersom  $f$  ikke har noen sprang eller finner på noe annet tull på  $[a, b]$ , vil fortegnet til  $f(x_3)$  fortelle oss om  $x_3 < r$  eller  $x_3 > r$ , slik at vi med sikkerhet kan si om  $r \in [x_1, x_3]$  eller  $r \in [x_3, x_2]$ .

Intervallene  $[x_1, x_3]$  og  $[x_3, x_2]$  er akkurat halvparten så lange som  $[x_1, x_2]$ , så etter å ha utført denne prosessen, har vi en mer nøyaktig ide om hvor  $r$  befinner seg. Vi setter så  $x_2 = x_3$  eller  $x_1 = x_3$ , alt etter fortegnet til  $f(x_3)$ , og repeterer prosedyren. Dersom vi

gjør dette  $n$  ganger, ender vi opp med et intervall med lengde

$$\frac{b-a}{2^n},$$

og hvis vi til slutt setter  $r_n = \frac{x_1+x_2}{2}$ , vet vi at

$$|r - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

#### Halveringsmetoden

Dersom  $f$  er en kontinuerlig funksjon med en rot i intervallet  $(a, b)$ , produserer  $n$  steg med halveringsmetoden et estimat som tilfredsstill-

$$|r - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Professor Dottie gjenoppdaget med sine eksperimenter noe som kalles fikspunktiterasjonen. Hun oppdaget kort og godt at iterasjonen

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

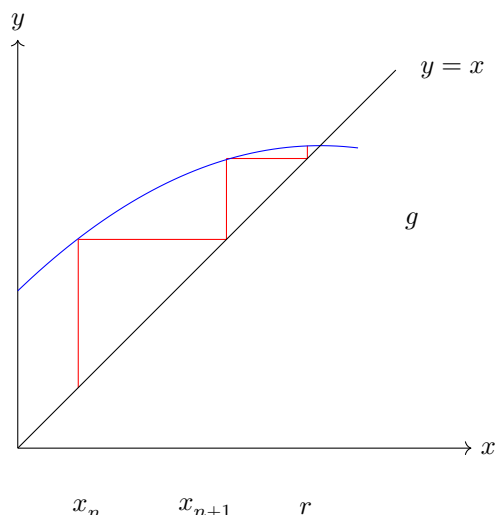
sakte men sikkert konvergerer mot den korrekte løsningen  $r \approx 0.739085$ . Dette ser sikkert rart ut, men i neste uke skal vi se på hvorfor dette noen ganger virker, og når det eventuelt virker. La oss anta at vi har en likning på formen

$$x = g(x).$$

En løsning  $r$  av en slik likning, kalles et *fikspunkt*. Fikspunktmotoden er definert ved iterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Det kan virke snodig at denne iterasjonen skal hjelpe oss til å finne  $r$ . Men det gjør den ofte. Figuren under illustrerer hvordan iterasjonen finner frem.



**Eksempel 3.57.** Likningen

$$x = \cos x$$

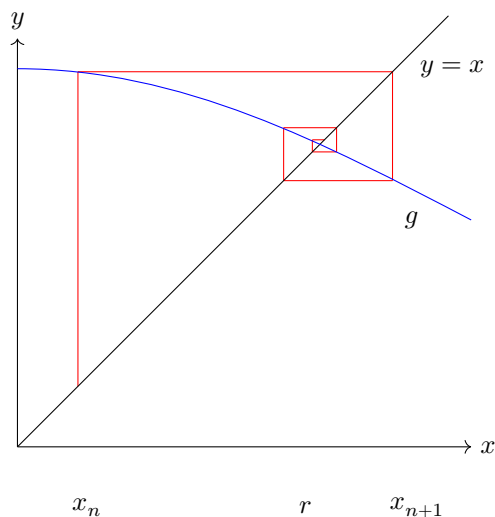
har som nevnt en foreløpig ukjent rot på intervallet  $[0, 1]$ . Iterasjonen

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

produserer følgende tabell, dersom vi setter  $x_0 = \frac{3}{4}$ :

|          |                    |
|----------|--------------------|
| $x_0$    | 0.7500000000000000 |
| $x_1$    | 0.731688868873821  |
| $x_2$    | 0.744047084788764  |
| $x_3$    | 0.735733618187236  |
| $x_4$    | 0.741338598887922  |
| $x_{78}$ | 0.739085133215161  |

Det går ikke så fort i svingene. Figurene under illustrerer hva som skjer.  $\triangle$



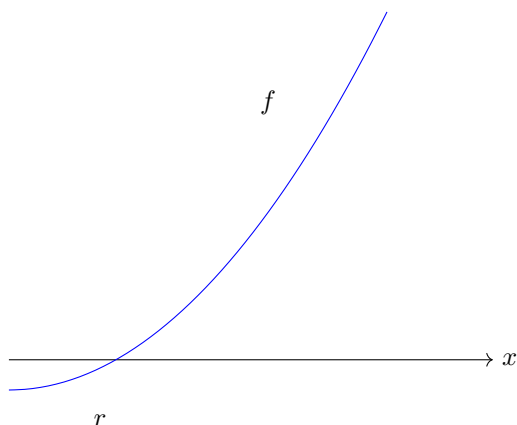
I neste bolk skal vi sette opp presise konvergenskriterier for fikspunktiterasjonen.

En av de metodene som er enklest å forstå, er *Newtons metode*. På samme måte som halveringsmetoden, produserer den en følge av tilnærminger til løsningen av likningen.

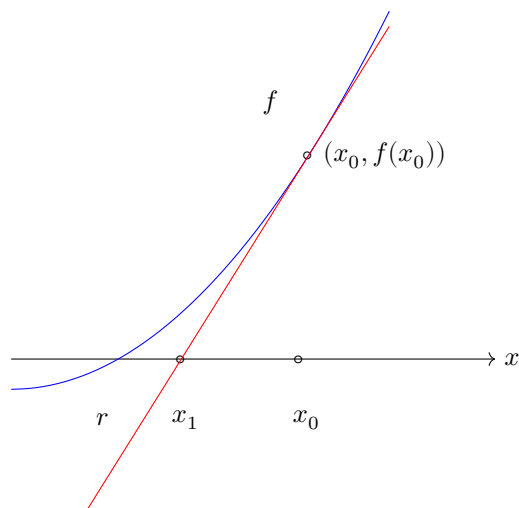
Newtons metode baserer seg på at likningen er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter altså etter nullpunkter til funksjoner. La oss si at nullpunktet vi leter etter kalles  $r$ .



La oss anta at vi har en tilnærming  $x_0$  til  $r$ . Vi slår tangenten til  $f$  i  $x_0$ .



Punktet der tangenten skjærer  $x$ -aksen, kaller vi  $x_1$ . Dette punkt kan vi finne ved å sette opp likningen for tangenten til  $f$  i  $x_0$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

og så kreve at  $y = 0$  i denne likningen:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

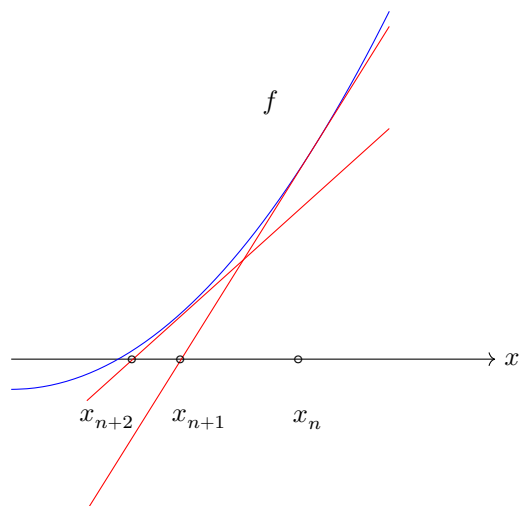
Løser vi denne likningen for  $x_1$ , får vi at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newtons metode er definert som den rekursive følgen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

I mange situasjoner konvergerer denne følgen ganske fort mot  $r$ .



**Eksempel 3.58.** Likningen

$$x = \cos x$$

har som nevnt en foreløpig ukjent rot på intervallet  $[0, 1]$ . For å bruke Newtons metode, må vi skrive likningen

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

og sette opp Newtons iterasjon

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

Setter vi  $x_0 = \frac{3}{4}$ , produserer metoden følgende tabell:

|       |                    |
|-------|--------------------|
| $x_0$ | 0.7500000000000000 |
| $x_1$ | 0.739111138752579  |
| $x_2$ | 0.739085133364485  |
| $x_3$ | 0.739085133215161  |
| $x_4$ | 0.739085133215161  |

Fra tredje til fjerde iterasjon er det ingen endring. Det betyr at vi mest sannsynlig har roten med seksten desimalers nøyaktighet. Senere i kurset skal vi sette opp presise kriterier for konvergens.  $\triangle$

**Teorem 3.59.** *La  $g$  være en kontinuertlig derivbar funksjon. Dersom både  $a < g(x) < b$  og  $|g'(x)| \leq L < 1$  på  $[a, b]$ , finnes et entydig punkt  $r$  slik at*

$$r = g(r).$$

*Fikspunktiterasjonen*

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

*konvergerer mot  $r$  dersom  $x_0 \in [a, b]$ .*

*Bevis.* Siden  $a < g(x) < b$  vet vi at  $x_1 \in (a, b)$  dersom  $x_0 \in [a, b]$ . Videre vet vi at dersom  $x_n \in (a, b)$ , er  $x_{n+1} \in (a, b)$ , så det er klart at  $x_n \in (a, b)$  for alle  $n \geq 1$ .

Så la oss anta at  $x_n \in (a, b)$ . Vi bruker Taylors teorem på  $g$  i  $r$ , og skriver

$$g(x_n) = g(r) + g'(s)(x_n - r)$$

for en  $s$  mellom  $x_n$  og  $r$ . Hvis vi bruker at  $r = g(r)$  og  $x_{n+1} = g(x_n)$ , kan vi skrive

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(s)(x_n - r).$$

Vi tar absoluttverdi på begge sider, og bruker at  $|g'(s)| \leq L < 1$ , siden  $s \in (a, b)$ :

$$|x_{n+1} - r| = |g'(s)(x_n - r)| \leq L|x_n - r| \leq L^{n+1}|x_0 - r|$$

Lar vi så  $n \rightarrow \infty$ , får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x_{n+1} - r| \leq |x_0 - r| \lim_{x \rightarrow \infty} L^{n+1} = 0,$$

siden  $L < 1$ .

For å vise at fikspunktet er entydig, kan vi anta at det finnes to fikspunkt,  $r_1$  og  $r_2$ . Men da må

$$\begin{aligned} |r_2 - r_1| &= |x_{n+1} - r_1 - (x_{n+1} - r_2)| \\ &\leq |x_{n+1} - r_1| + |x_{n+1} - r_2| \\ &\leq L|x_n - r_1| + L|x_n - r_2| \\ &\leq L^{n+1}|x_0 - r_1| + L^{n+1}|x_0 - r_2|. \end{aligned}$$

Denne likningen gjelder for alle  $n$ . Dersom vi lar  $n \rightarrow \infty$ , går det siste uttrykket mot null, og vi ser at dette kun er mulig dersom  $r_1 = r_2$ .  $\square$

Sekantsetningen gir at det finnes et punkt  $s$  slik at

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(s)(x_n - r).$$

Dette er en likning som sier noe om størrelsen på  $x_{n+1} - r$  som en funksjon av  $x_n - r$ , altså hvor mye feilen minker fra iterasjon til iterasjon, dersom fikspunktiterasjonen konvergerer. Feilen minker dersom  $|g'| \leq L < 1$ .

**Eksempel 3.60.** Likningen

$$x = \frac{1}{2 \cos x}$$

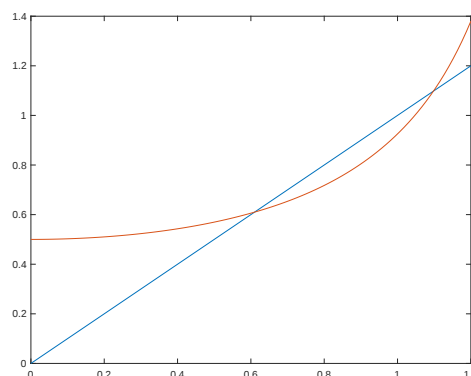
har en rot på intervallet  $[1, 1.4]$ . La oss prøve å finne den. Iterasjonen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 \cos x_n}$$

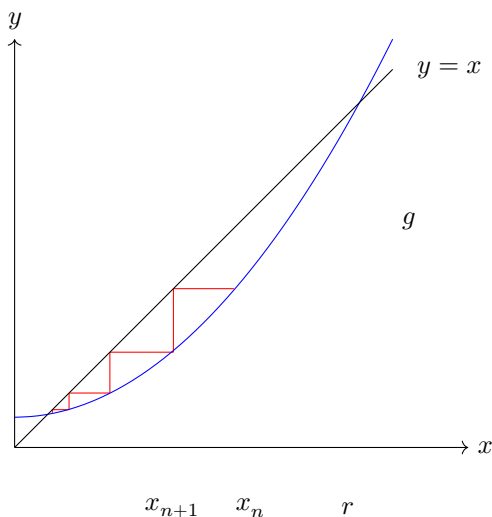
produserer følgende tabell, dersom vi setter  $x_0 = 1$ :

|       |                    |
|-------|--------------------|
| $x_0$ | 1.0000000000000000 |
| $x_1$ | 0.925407858840463  |
| $x_2$ | 0.831243009591302  |
| $x_3$ | 0.741886011422627  |
| $x_4$ | 0.678246107990755  |
| $x_5$ | 0.642116945705959  |
| $x_6$ | 0.624352444102666  |
| $x_7$ | 0.616263059398898  |

Det gikk ikke i det hele tatt.  $\triangle$



I det siste eksemplet fant ikke fikspunktiterasjonen roten vi ville ha, men en annen. Figuren under illustrerer hvorfor. Fikspunktiterasjonen finner aldri  $r$  dersom  $|g'(r)| > 1$ .



**Eksempel 3.61.** Vi løser polynomlikningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

Dette polynommet kan spaltes i

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}),$$

og vi skal se hvordan fikspunktmotoden leter etter de forskjellige løsningene. Likningen kan skrives om til  $x = g(x)$  på flere måter, men vi skal begynne med å skrive

$$x = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 - 3),$$

slik at

$$g(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 - 3),$$

og

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^3 + x_n^2 - 3).$$

Vi prøver å finne løsningen  $r = \sqrt{3} \approx 1.732050807568877$ , og starter derfor en kjøring i  $x_0 = 1.5$ . Vi får:

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $x_0$    | 1.5000000000000000  |
| $x_5$    | -0.995705356719772  |
| $x_{10}$ | -0.999982551541273  |
| $x_{15}$ | -0.99999928199386   |
| $x_{20}$ | -0.99999999704524   |
| $x_{25}$ | -0.99999999998784   |
| $x_{30}$ | -0.99999999999995   |
| $x_{35}$ | -1.0000000000000000 |

Også nå ønsker metoden heller å finne  $r = -1$ .  $\triangle$

Fikspunktiterasjonen i forrige eksempel viste en sterk preferanse på hvilken rot den hadde lyst til å finne. Men man kan skrive om likningen til  $x = g(x)$  på mange måter.

**Eksempel 3.62.** Vi skriver nå om likningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

til

$$x = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

Starter vi i  $x_0 = -1.5$ , får vi

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $x_0$    | -1.5000000000000000 |
| $x_5$    | -1.732004423011461  |
| $x_{10}$ | -1.732050803458349  |
| $x_{15}$ | -1.732050807568513  |
| $x_{20}$ | -1.732050807568878  |
| $x_{25}$ | -1.732050807568877  |

Denne fikspunktiterasjonen klarte fint å finne roten  $r = -\sqrt{3}$ .  $\triangle$

Som vi ser av de to foregående eksemplene, kan fikspunktiterasjonen konvergere mot forskjellige røtter avhengig av hvordan vi skriver om likningen. Den kan også ikke konvergere i det hele tatt.

**Eksempel 3.63.** Vi prøver igjen

$$x = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

Starter vi i  $x_0 = 1.5$ , i håp om å finne  $r = \sqrt{3}$ , får vi

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $x_0$    | -1.5000000000000000 |
| $x_1$    | 2.333333333333333   |
| $x_2$    | 0.836734693877551   |
| $x_3$    | 6.870315288518744   |
| $x_4$    | -0.499781154362809  |
| $x_5$    | 5.007884193672099   |
| $x_6$    | -0.281322161800267  |
| $x_7$    | 26.242541136990940  |
| $x_8$    | -0.881325585764740  |
| $x_9$    | -0.541641177723142  |
| $x_{10}$ | 3.687092259260734   |

Denne fikspunktiterasjonen klarte ikke å finne noe som helst når vi startet i  $x_0 = 1.5$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.64.** I eksemplene over er

$$g(x) = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

og

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3}{3}.$$

Hvis du deriverer disse og evaluerer i røttene til polynommet  $x^3 + x^2 - 3x - 3$ , vil du se et tydelig mønster. fikspunktiterasjonen greier ikke finne  $r$  dersom  $|g'(r)| > 1$ .  $\triangle$

Vi kan også se på Newtons metode. Vi bruker Taylors teorem (husk at  $f(r) = 0$ )

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2$$

for  $s$  mellom  $x_n$  og  $r$ . Newtons metode er

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Trekker vi disse likningene fra hverandre, får vi

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2.$$

Her står det at

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

som sier at Newtons metode i mange situasjoner har kvadratisk konvergens. Det går an å sette opp presise kriterier for når dette skjer, men det skal vi ikke gjøre.

**Eksempel 3.65.** Vi søker løsningene til

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Som Ingrid Espelid Hovig har vi jukset litt, og valgt et polynom som faktoriseres pent:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Newtons metode blir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n^3 + 35x_n^2 - 50x_n + 24}{4x_n^3 - 30x_n^2 + 70x_n - 50}$$

La oss lete etter  $r = 1$ . Vi starter i  $x_0 = 0.5$ , og får:

|       |                    |
|-------|--------------------|
| $x_0$ | 0.5000000000000000 |
| $x_1$ | 0.798295454545455  |
| $x_2$ | 0.950817599863883  |
| $x_3$ | 0.996063283034122  |
| $x_4$ | 0.999971872651984  |
| $x_5$ | 0.99999998549667   |
| $x_6$ | 1.0000000000000000 |

Konvergerer fort dette her.  $\triangle$

Som du ser i eksemplet over, doubles antall korrekte desimaler etter hver iterasjon.

**Eksempel 3.66.** Nå prøver vi å finne løsningene til

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = 0.$$

Nok en gang er det et lettfaktorisert polynom:

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x-1)^2(x-3)(x-4)$$

Newtons metode blir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 9x_n^3 + 27x_n^2 - 31x_n + 12}{4x_n^3 - 27x_n^2 + 54x_n - 31}$$

Nok en gang leter vi etter  $r = 1$ , ved å starte i  $x_0 = 0.5$ :

|          |                    |
|----------|--------------------|
| $x_0$    | 0.5000000000000000 |
| $x_1$    | 0.713414634146341  |
| $x_2$    | 0.842942878437971  |
| $x_3$    | 0.916937117337936  |
| $x_4$    | 0.957125910632705  |
| $x_5$    | 0.978193460613942  |
| $x_6$    | 0.988999465124112  |
| $x_7$    | 0.994474755305802  |
| $x_8$    | 0.997231047313292  |
| $x_9$    | 0.998613930094898  |
| $x_{10}$ | 0.999306565270834  |

Det ser ut til å konvergere, men mye saktere enn i sted. Hva skjedde?  $\triangle$

I eksemplet over er  $f'(1) = 0$ . Dette betyr at

$$g'(1) = -\frac{f(1)f''(1)}{(f'(1))^2}$$

ikke er definert. Grensen

$$\lim_{x \rightarrow 1} g'(x)$$

trenger ikke være null, og eksemplet demonstrerer tydelig at den kvadratiske konvergens ikke kan garanteres dersom  $f'(r) = 0$ .

## Polynominterpolasjon

Dersom  $x_i$  er  $n+1$  er forskjellige punkter på  $x$ -aksen med korresponderende  $y$ -verdier  $y_i$ , finnes det et entydig polynom av maksimal grad  $n$  som interpolerer punktene  $(x_i, y_i)$ . I dette kapitlet skal vi sette opp to forskjellige formler for dette polynomet.

### Lagranges interpolasjon

La  $x_i$  være  $n+1$  forskjellige punkter på intervallet  $[a, b]$ , med  $x_0 = a$  og  $x_n = b$ . For hvert punkt  $x_i$ , definerer vi et polynom:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

Polynomet  $l_i(x)$  har orden  $n$ , og tilfredsstiller

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{for } i = k \\ 0 & \text{for } i \neq k \end{cases}.$$

La  $f$  være en funksjon, med funksjonsverdier  $f(x_i) = f_i$ . Det er lett å se at

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x).$$

tilfredsstiller  $p_n(x_i) = f(x_i)$  for alle  $i$ .

**Teorem 3.67.** La  $x_i$  være  $n+1$  forskjellige punkter på intervallet  $[a, b]$ , og  $f$  en funksjon med funksjonsverdier  $f(x_i) = f_i$ . Det finnes et entydig polynom som tilfredsstiller  $p_n(x_i) = f(x_i)$  for alle  $i$ .

*Bevis.* Konstruksjonen av Lagranges interpolasjon viser at det for en tabell med  $n+1$  punkter eksisterer et interpolasjonspolynom av maksimal grad  $n$ ; vi har jo nettopp konstruert det. Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer  $p_n$  og  $q_n$  av grad  $n$  som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen  $p_n - q_n$  i punktene  $x_i$ , ser vi at

$$p_n(x_i) - q_n(x_i) = 0 \quad 0 \leq i \leq n.$$

Men polynomet  $p - q$  har maksimal grad  $n$ , og kan følgelig ha maksimalt  $n$  nullpunkter, så den eneste muligheten her er  $p = q$ , som betyr at interpolasjonspolynomet er entydig.  $\square$

**Eksempel 3.68.** En funksjon har følgende verdier:

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $i$   | 0 | 1 | 2 |
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $f_i$ | 4 | 5 | 6 |

Vi setter opp

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x-1)(x-3)$$

og

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Det andre ordens polynomet som interpolerer denne tabellen er:

$$\begin{aligned} p(x) &= 4l_0(x) + 5l_1(x) + 6l_2(x) \\ &= 2(x-2)(x-3) - 5(x-1)(x-3) \\ &\quad + 3(x-1)(x-2). \end{aligned} \quad \triangle$$

I gamle dager sto det i numerikkbøkene at lagrange-polynomene ikke måtte brukes i numeriske beregninger, fordi det koster for mange flyttalsoperasjoner å evaluere dem. Dette er bare tull dersom man bruker de rette interpolasjonspunktene og evaluerer polynomene på rett måte, se Trefethens bok om approksimasjonsteori og approksimasjonspraksis.

## Newton's interpolasjon

For å konstruere Newton's interpolasjon trenger vi å beregne de *dividerte differansene*. De defineres rekursivt:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

$$f[x_i, \dots, x_{i-k}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{i-k+1}] - f[x_{i-1}, \dots, x_{i-k}]}{x_i - x_{i-k}}$$

Newton's interpolasjonspolynom er:

$$p_n(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k).$$

Merk også at Lagranges og Newton's interpolasjon er bare to forskjellige formler for å sette opp det samme polynomet, siden interpolasjonspolynomet er entydig.

**Eksempel 3.69.** Polynomet

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \\ &f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \\ &\quad + \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} (x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

interpolerer tabellen

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ f_0 & f_1 & f_2 \end{array}$$

så lenge  $x_0 \neq x_1 \neq x_2$ .  $\triangle$

Det er vanlig å sette opp følgende tableau for å illustrere de dividerte differansene:

|       |          |               |                    |                         |
|-------|----------|---------------|--------------------|-------------------------|
| $x_0$ | $f[x_0]$ |               |                    |                         |
|       |          | $f[x_0, x_1]$ |                    |                         |
| $x_1$ | $f[x_1]$ |               | $f[x_0, x_1, x_2]$ |                         |
|       |          | $f[x_1, x_2]$ |                    | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |
| $x_2$ | $f[x_2]$ |               | $f[x_1, x_2, x_3]$ |                         |
|       |          | $f[x_2, x_3]$ |                    |                         |
| $x_3$ | $f[x_3]$ |               |                    |                         |

**Eksempel 3.70.** La igjen

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $i$   | 0 | 1 | 2 |
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $f_i$ | 4 | 5 | 6 |

Tableauet blir

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 |   |   |
|   |   | 1 |   |
| 2 | 5 |   | 0 |
|   |   | 1 |   |
| 3 | 6 |   |   |

og interpolasjonspolynomet blir

$$p(x) = 4 + x - 1 = 3 + x.$$

Dette er selvfølgelig det samme polynomet som i forrige eksempel. Merk at polynomet er av første grad, siden punktene tilfeldigvis ligger på en rett linje.  $\triangle$

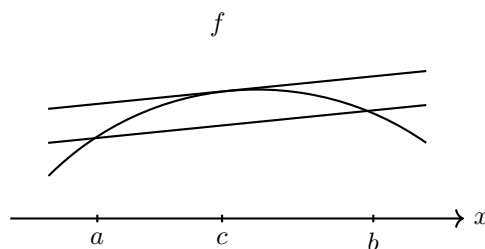
## Interpolasjonsfeilen

Det sier seg selv at et interpolasjonspolynom ikke kan være lik funksjonen som interpoleres med mindre denne funksjonen er et polynom av ikke høyere grad enn interpolanten. Nå er vi kommet til steg to i den generelle oppskriften for numeriske metoder, nemlig analyse av feilen. Da må vi begynne med en generalisering av middelverdisatsen.

Middelverdisatsen sier at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f[a, b]$$

for en funksjon som er deriverbar på  $[a, b]$ .



En generalisert variant for dividerte differenser går som følger.

**Teorem 3.71.** Dersom  $f$  er  $n+1$  ganger deriverbar på  $[a, b]$ , og alle punktene  $x_i$  er forskjellige, er

$$f[x_n, \dots, x_0] = \frac{f^n(s)}{n!}$$

for en eller annen  $s$  i intervallet  $(a, b)$ .

*Bevis.* Siden  $p_n$  interpolerer  $f$ , må funksjonen  $g = f - p_n$  ha minst  $n+1$  nullpunkt på intervallet  $(a, b)$ . Gjentatt anvendelse av middelverdisatsen forteller oss at  $g'$  har minst  $n$  nullpunkt, at  $g''$  har minst  $n-1$  nullpunkt, og videre at  $g^{n+1}$  har minst ett nullpunkt på  $(a, b)$ . Vi kaller dette  $s$ . Siden

$$\frac{d^n}{dx^n} p_n(x) = n! f[x_n, \dots, x_0],$$

må

$$f^n(s) = n! f[x_n, \dots, x_0]. \quad \square$$

Vi kan nå utlede et uttrykk for interpolasjonsfeilen.

**Teorem 3.72.** La  $f$  være en  $n+1$  ganger deriverbar funksjon på  $[a, b]$ , interpolert i punktene  $x_i$ . Det finnes en  $s \in (a, b)$  slik at

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

*Bevis.* Vi skriver opp Newtons interpolasjonspolynom

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \\ & + f[x_n, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k), \end{aligned}$$

det siste leddet er skrevet ut kun av pedagogiske hensyn. Nå bytter vi ut  $x_n$  med  $x$  i uttrykket over (tenk på  $x$  som et nytt interpolasjonspunkt), og får

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f[x_i, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \\ & + f[x, \dots, x_0] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k). \end{aligned}$$

Merk den snedige måten å skrive om  $f$  på. Trekker vi de to foregående uttrykkene fra hverandre, får vi

$$\begin{aligned} f(x) - p_n(x) = & (f[x, x_{n-1}, \dots, x_0] - f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ = & f[x, x_n, \dots, x_0] (x - x_n) \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ = & f[x, x_n, \dots, x_0] \prod_{k=0}^n (x - x_k), \end{aligned}$$

og bruker vi den generaliserte middelverdisatsen over, får vi

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k),$$

for en eller annen  $s \in [a, b]$ . Merk at  $s$  avhenger av  $x$ , akkurat som i Taylors teorem fra M1.  $\square$

## Punktfordeling

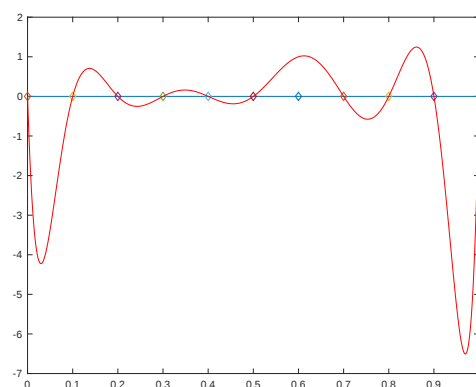
Steg tre i oppskriften på numeriskemetoder, er å finne ut om metoden kan ha noen gode egenskaper utover høy presisjon. I interpolasjonsfaget er det en relativt kjapp måte å avgjøre om en interpolasjonsmetode er god eller ikke: Det er avgjørende for kvaliteten på interpolasjonen at punktene står riktig fordelt på intervallet  $[a, b]$ .

Men hvordan skal vi finne gode punkter for polynominterpolasjon, og hva skiller de gode fra de dårlige punktene? Dette spørsmålet kan besvares på mange måter, og vi skal vende tilbake til spørsmålet i kapitlet om numerisk integrasjon. La oss begynne med å ta for oss en god og en dårlig punktmengde.

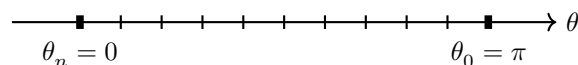
**Eksempel 3.73.** Den dårlige punktmengden er den kjente og kjære *ekvidistante* punktmengden. Et ekvidistant gitter med  $n$  punkter på intervallet  $[a, b]$  er gitt ved

$$x_i = a + hi$$

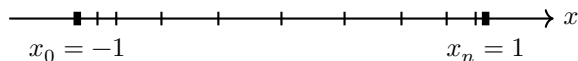
der  $0 \leq i \leq n$  og  $h = (b - a)/n$ . I figuren under er et plot av en lagrangefunksjon på et ekvidistant gitter med elleve punkt. Merk oscillasjonene polynomet gjør mellom interpolasjonspunktene.  $\triangle$



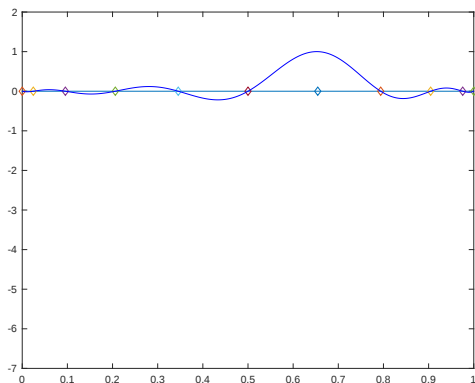
**Eksempel 3.74.** La  $\theta_i$  være et ekvidistant gitter på  $[0, \pi]$ , med  $\theta_n = 0$  og  $\theta_0 = \pi$ .



Nå definerer vi  $x_i = \cos \theta_i$ . Dette gitteret ligger på  $[-1, 1]$ .



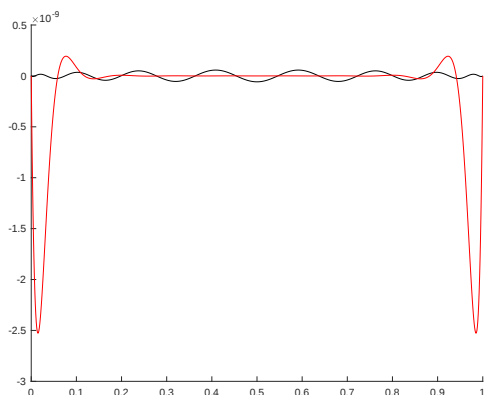
Det gitteret egner seg skikkelig godt for polynominterpolasjon. Under er et tilsvarende plot av en lagrange-funksjon på dette gitteret. Merk hvordan interpolasjonspolynomet ikke oscillerer særlig mellom interpolasjonspunktene.  $\triangle$



Man finner gode punkter for interpolasjon ved å plassere dem slik at de minimerer utslaget til polynomet

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

i interpolasjonsfeilen, og alle gode punktmengder for polynominterpolasjon klumper seg i endene av intervallet. For ekvidistante gitre har feilpolynomet stort utslag i endepunktene, og det forklarer hvorfor lagrange-funksjonen i figuren over har størst utslag fra funksjonsverdiene der. Vi skal nå ta for oss noen forskjellige gode punktmengder.



Vi skal gjøre alt på intervallet  $[-1, 1]$ . Dersom man har en punktfordeling  $x_i$  på dette intervallet, kan man flytte fordelingen til intervallet  $[a, b]$  med formelen gitt i eksempel 3.77 under.

## Chebyshev-punkter

For å prøve å forklare hva som skjedde i figuren må vi introdusere noen polynomer.

**Teorem 3.75.** *Funksjonen*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

*er et polynom når  $n$  er et naturlig tall.*

*Bevis.* La  $T_n(\theta) = \cos(n\theta)$ . Da har vi

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= \cos \theta \\ T_2 &= \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

Merk at alle disse er polynomer i  $\cos \theta$ . Dette er en sentral observasjon, for når man gjør variabelskiftet  $x = \cos \theta$  vil man få polynomer i  $x$ .

Vi fortsetter med et induksjonsbevis for at  $\cos n\theta$  er et polynom i  $\cos \theta$  for alle naturlige tall  $n$ . Legg sammen

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

og

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

slik at

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta.$$

Dersom vi antar at  $\cos n\theta$  og  $\cos(n-1)\theta$  er polynomer i  $\cos \theta$ , må

$$2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta$$

være et polynom i  $\cos \theta$ , og følgelig må også

$$\cos(n+1)\theta$$

være et polynom i  $\cos \theta$ . Siden  $T_0 = 1$  og  $T_1 = \cos \theta$  (og  $T_2 = 2 \cos^2 \theta - 1$ ) er polynomer i  $\cos \theta$ , må  $\cos n\theta$  være det for alle naturlige  $n$ . Dersom  $\cos n\theta$  er et polynom i  $\cos \theta$ , må  $\cos(n \arccos x)$  være et polynom i  $x$ .  $\square$

Polynomene  $T_n$  kalles *Chebyshev-polynomer*. Disse kan beregnes ved rekursjonen

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1},$$

som er likningen

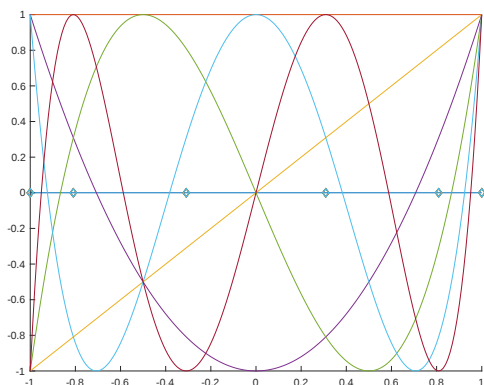
$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta.$$

fra forrige bevis, skrevet ut i form av  $T_n$ . De første er

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2x^2 - 1 \\ T_3 &= 4x^3 - 3x \\ T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Gitteret i eksempel 3.74 kalles Chebyshevs ekstremalgitter, for punktene er ekstremalpunktene til et chebyshevpolytom. Det  $n$ -te ordens polynomet  $T_n$  gir opphav til et gitter med  $n + 1$  punkter, der  $n - 1$  av dem er  $T_n$ s stasjonære punkter, og to er endepunktene i intervallet. De første seks polynomene er plottet under, sammen med 6-punktsgitteret som er ekstremalpunktene til  $T_5$ . En formel for gitterpunktene er:

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{n} \quad 0 \leq i \leq n.$$



**Eksempel 3.76.** Gitteret i figuren over er gitt ved

|       |                     |
|-------|---------------------|
| $x_0$ | -1.0000000000000000 |
| $x_1$ | -0.809016994374947  |
| $x_2$ | -0.309016994374947  |
| $x_3$ | 0.309016994374947   |
| $x_4$ | 0.809016994374947   |
| $x_5$ | 1.0000000000000000  |

Merk at endepunktene er en annen type ekstremalpunkt enn de andre; det er der  $T_5$  er klippet av intervallgrensene.  $\triangle$

**Eksempel 3.77.** Hvis vi ønsker å sette opp gitteret fra  $T_5$  på et intervall  $[a, b]$ , bruker vi bare formelen

$$y_i = a + (b - a) \frac{x_i + 1}{2},$$

der  $x_i$  er punktene på  $[-1, 1]$  og  $y_i$  er punktene på  $[a, b]$ . På intervallet  $[1, 4]$  blir punktene

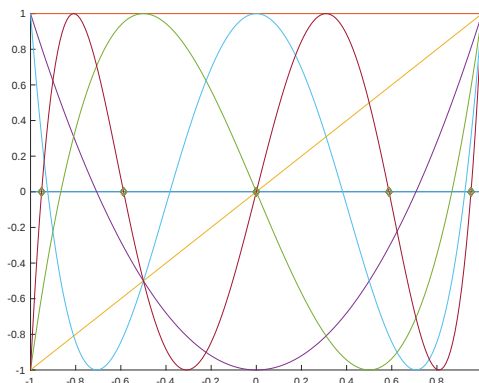
|       |                    |
|-------|--------------------|
| $x_0$ | 1.0000000000000000 |
| $x_1$ | 1.286474508437579  |
| $x_2$ | 2.036474508437579  |
| $x_3$ | 2.963525491562421  |
| $x_4$ | 3.713525491562421  |
| $x_5$ | 4.0000000000000000 |

Det er viktig å forstå at det hvordan punktene er fordelt på intervallet som har noe å si for kvaliteten på interpolasjonen.  $\triangle$

Chebyshevpolytomens nullpunkter gir opphav til en annen punktmengde som kalles *Chebyshevs nullpunktgitter*. Dette gitteret er på papiret enda bedre enn Chebyshevs ekstremalgitter, men noe mindre praktisk, siden det ikke inneholder endepunktene. Polynomet  $T_{n+1}$  gir opphav til et gitter med  $n + 1$  punkter, gitt ved

$$x_i = \cos \frac{\pi(2i + 1)}{2n + 2} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Under er et nok et plot av de første par chebyshevpolytomene, med nullpunktgitteret til  $T_5$ . Vi tar med



et teorem om interpolasjonsfeilen til Chebyshevs nullpunktgitter, men lar det stå ubevist.

**Teorem 3.78.** La  $f$  være en  $n + 1$  ganger deriverbar funksjon. Interpolasjonsfeil for interpolanten på chebyshevs nullpunktgitter på  $[a, b]$  er:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b - a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \max_{x \in [a, b]} |f^{n+1}(x)|$$

Under er et plot av feilpolynomet

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

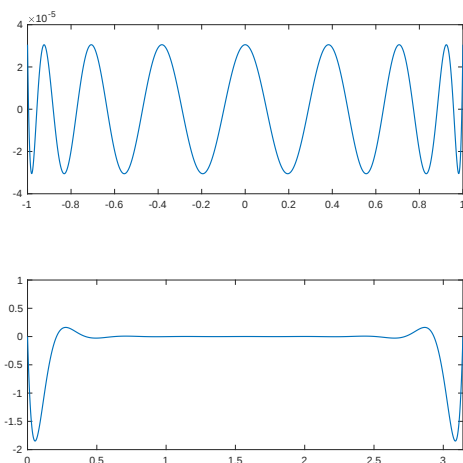
for chebyshevs nullpunktgitter og  $n = 16$ . Dette polynomet har maksimalt utslag

$$\frac{(b - a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \approx 1.525878906250000e - 05.$$

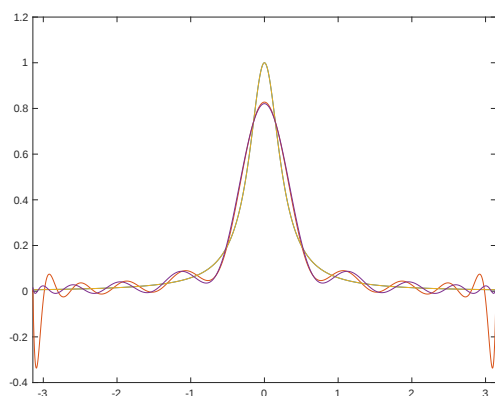
Vi tar med et plot av tilsvarende feilpolynom for ekvidistant gitter med  $n = 16$ .

**Eksempel 3.79.** Nedenfor er en figur av 20. ordens interpolanter av Runges funksjon

$$f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2}$$



på ekvidistant og chebyshevgitte. Denne funksjonen er kjent for sine patologisk store  $n$ -te deriverte. Dette er en størrelse vi ikke har kontroll på, merk nok en gang hvordan feilpolynomet illustrerer hvorfor ekvidistant tinærmer vesentlig dårligere enn chebyshev i endene.  $\triangle$



## Gauss-punkter

En punktmengde som likner på Chebyshev, og klumper seg i endene av intervallet, kalles Gauss-punkter. Akkurat som for Chebyshev, kommer disse i to varianter, som er henholdsvis null- og ekstremalpunkter til en følge av polynomer, som kalles Gauss-Legendre-polynomene. Legendre-polynomene er gitt ved rekursjonen

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Vi skal ikke utlede disse, men i kapitlet om numerisk integrasjon skal vi vise en metode for å produsere nullpunktene.

Nullpunktgitrene til Legendre-polynomene kalles Gauss-Legendre-punkter. Her er en tabell med et par lavere ordens punktfordelinger på intervallet  $[-1, 1]$

| $n$ | $x_i$                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------------|
| 2   | $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$                                   |
| 3   | $0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$                                |
| 4   | $\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ |
| 5   | $0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5 \pm 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$      |

Gauss-Legendre-punktene er på papiret enda bedre enn chebyshevpunktene, men mindre praktisk i bruk.

Ekstremalpunktene til Legendre-polynomene kalles Gauss-Lobatto-punkter. Vi hoster opp nok en tabell med et par lavere ordens punktfordelinger på intervallet  $[-1, 1]$

| $n$ | $x_i$                                                                 |
|-----|-----------------------------------------------------------------------|
| 3   | $0, \pm 1$                                                            |
| 4   | $\pm\sqrt{\frac{1}{5}}, \pm 1$                                        |
| 5   | $0, \pm\sqrt{\frac{3}{7}}, \pm 1$                                     |
| 6   | $\pm\sqrt{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}}}, \pm 1$         |
| 7   | $0, \pm\sqrt{\frac{5}{11} \pm \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \pm 1$ |

Gauss-Lobatto er på papiret noe dårligere enn Gauss-Legendre, men er noe mer praktisk i bruk, for de inneholder intervallets endepunkter. Fremdeles mindre praktisk enn Chebyshev.

## Andre typer polynominterpolasjon

Til slutt kan nevnes at man trenger ikke nøye seg med å kreve at interpolanten  $p$  skal ta  $f$  sine verdier i interpolasjonspunktene. Man kan også skru opp graden på polynomet, og i tillegg kreve at  $p$  skal ha samme stigningstall som  $f$  i punktene. I dette tilfellet kalles det *Hermite-interpolasjon*.

Dersom man krever at  $p$  skal ha samme verdi som  $f$  sine  $n+1$  første deriverte i et enkelt punkt, er vi tilbake i Taylorpolynomene du kjenner fra M1.

Man kan også, istedet for å lage et interpolasjonspolynom som interpolerer  $f$  i alle punktene, for eksempel sortere interpolasjonspunktene i grupper på fire og fire etterfølgende punkter, interpolere hver gruppe med et tredjeordens polynom, og så sette sammen en stykkvis kontinuerlig deriverbar polynominterpolant. Dette kalles *spline-interpolasjon*.

## Eulers formel

Med komplekse tall kan man belyse forholdet mellom eksponensialfunksjonen og de trigonometriske funksjonene. Dette forholdet er ikke mulig å få øye på dersom man kun har reelle tall til rådighet.

Brøken

$$\frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}}$$

må være konstant, siden

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}} \right) = -ie^{-ix} (\cos x + i \sin x) + e^{-ix} (-\sin x + i \cos x) = 0$$

og setter vi inn  $x = 0$  får vi åpenbart 1, så

$$\frac{\cos x + i \sin x}{e^{ix}} = 1.$$

Richard Feynman kalte bare denne “vår juvel”.

Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Med Eulers formel kan vi skrive komplekse tall veldig kompakt:

Polar form

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Hvis vi aksepterer Eulers formel, kan vi sette opp noen pene regneregler:

Regneregler for polar form

La  $z = re^{i\theta}$  og  $w = se^{i\alpha}$ .

Da gjelder:

$$z \cdot w = rse^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta-\alpha)}$$

**Eksempel 3.80.** Polar form er praktisk når man skal gange og dele komplekse tall for hånd. La  $z = 1 + i$  og  $w = 1 + \sqrt{3}i$ , slik at

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

og

$$w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vi beregner

$$z \cdot w = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

og

$$\frac{z}{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}}. \quad \triangle$$

Nå er det imidlertid sjelden at noen ganger sammen komplekse tall for hånd etter at de har landet sin første jobb. Men de geometriske tolkningene som Eulers formel gir oss, og sammenhengen med de trigonometriske funksjonene, er viktig, spesielt om du skal drive på med signalbehandling eller liknende.

**Eksempel 3.81.** Eulers formel gir at  $e^{\pi i/2} = i$ ,  $e^{\pi i} = -1$ ,  $e^{3\pi i/2} = -i$  og  $e^{2\pi i} = 1$ . Merk at det å gange med  $i$  er det samme som å rotere et tall nitti grader (pi halve radianer) mot klokken.  $\triangle$

**Eksempel 3.82.** Bytter vi  $x$  med  $-x$  i Eulers formel, får vi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Hvis vi legger denne sammen med Eulers formel, ser vi at

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og trekker vi dem fra hverandre, ser vi at

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.83.** Dersom  $z = re^{i\theta}$  gir Eulers formel  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ .  $\triangle$

Husk ellers at

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

og

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Det er nå lett å se at

$$\cosh(ix) = \cos x$$

og

$$\sinh(ix) = i \sin x.$$

Dette kan vi bruke til å finne real- og imaginærdelen til sinus og cosinus:

Trigonometriske funksjoner på kartesisk form

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$

$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$

Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i algebra eller kompleks analyse, er det bevist følgende teorem et eller annet sted. Teoremet heter algebraens fundamentalteorem.

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der  $z_i \in \mathbb{C}$  er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

**Merk.** I teoremet over er polynomet monisk, altså at  $a_n = 1$ . Det er for å slippe å luke ut tilfellet  $a_n = 0$ . Dersom  $a_n \neq 0$ , og noe annet enn 1, blir faktoriseringen

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i).$$

Dersom en faktor  $(z - z_k)$  forekommer  $m$  ganger i faktoriseringen, sier vi at  $z_k$  har *multiplisitet*  $m$ .

**Eksempel 3.84.** Polynomet

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z - 1)^3$$

har en rot ( $z = 1$ ) med multiplisitet 3.  $\triangle$

**Eksempel 3.85.** Polynomet

$$z^2 - 2z + 2$$

har to røtter

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i,$$

begge med multiplisitet 1, slik at

$$z^2 - 2z + 2 = (z - 1 - i)(z - 1 + i). \quad \triangle$$

Vi skal ikke bevise algebraens fundamentalteorem, men et spesialtilfelle kan vi analysere med det vi kjenner til så langt, nemlig løsninger av polynomlikningen

$$z^n = w$$

for et vilkårlig komplekst tall  $w$ . Vi skal se med egne øyne at denne likningen alltid har  $n$  løsninger. Vi begynner med å skrive  $w$  på polar form med valgfritt antall omdreininger rundt origo

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2m\pi)}.$$

Dersom vi skriver

$$w^{1/n} = (re^{i(\theta + 2m\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n + 2m\pi/n)},$$

ser vi at det nå finnes  $n$  potensielle verdier for  $\sqrt[n]{w}$ , alle sammen gyldige løsninger av  $z^n = w$ . Hvis du velger  $0 \leq m \leq n - 1$  får du ut alle sammen. Vi definerer den prinsipale  $n$ -te roten av  $w$  som

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n},$$

og så kan vi skrive de andre røttene som

$$\sqrt[n]{w} \cdot e^{2m\pi i/n}$$

for  $1 \leq m \leq n - 1$ . Dette er analogt til hvordan man i det reelle tilfellet har to løsninger av ligningen

$$x^2 = 4,$$

definerer kvadratroten som den positive løsningen

$$\sqrt{4} = 2,$$

og skriver den andre løsningen som  $-\sqrt{4}$ .

**Eksempel 3.86.** Vi finner alle løsninger av ligningen

$$z^5 = -1.$$

Siden

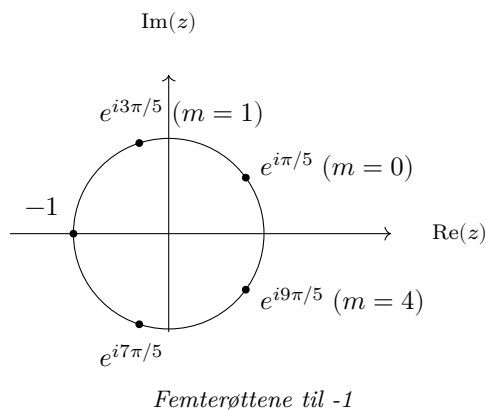
$$-1 = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5 + 2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for  $0 \leq m \leq 4$ :

$$e^{i\pi/5} (= \sqrt[5]{-1}), e^{i3\pi/5}, e^{i5\pi/5} (= -1), e^{i7\pi/5} \text{ og } e^{i9\pi/5}$$



Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Merk også at om vi lar  $m > 4$  eller  $m < 0$ , får vi røtter som allerede er listet opp.  $\triangle$

Vi skal få bruk for algebraens fundamentalteorem senere i semesteret, når vi skal lære om egenverdier og egenvektorer.

## Integralet

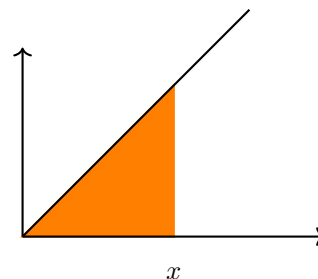
Integrasjon er som ketsjup. Det kan brukes til alt. Vi kan beregne areal, volum, arbeid, kraft, trykk, masse-senter, væskeflyt og elektrisk ladning.

La  $f$  være en begrenset funksjon på et intervall  $[a, b]$ . Det store spørsmålet er å finne arealet under grafen til  $f$ . Det går an å ta en lang diskusjon om hva areal egentlig er, sette opp aksiomer for areal, og så utlede integrasjonsteorien fra dem. Dette er imidlertid en litt langdryg prosess, så vi skal basere relasjonen mellom integralet og arealet under grafen på geometrisk intuisjon.

Alternative kilder:

- Adams kap. 5-7
- Lindstrøms I kap. ??

**Eksempel 3.87.** Noen integraler kan vi enkelt beregne geometrisk. La  $f(x) = x$ . En rask titt på grafen forteller at arealet under denne grafen og mellom 0 og  $x$  er  $\frac{1}{2}x^2$ , siden dette er en rettvinklet trekant der høyde og bredde er  $x$ .  $\triangle$

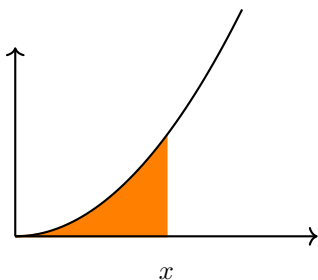


**Eksempel 3.88.** La  $(x) = x^2$ . Arealet under grafen er  $\frac{1}{3}x^3$ . Dette ble oppdaget geometrisk av Arkimedes for over to tusen år siden. Han oppdaget det ved å dele inn området i bitte små trapeser, og bruke at

$$1 + 4 + 9 + \dots = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

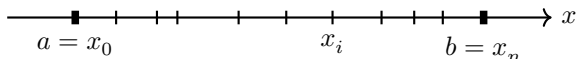
Vi skal gjøre en liknende beregning litt lenger ned.

△

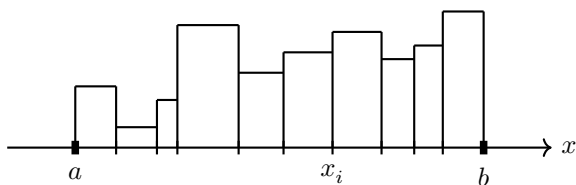


For å bygge opp integralteorien er det essensielt å starte med begrensede funksjoner på lukkede intervaller. Det går an å utvide integrasjonsteorien til ubegrensede funksjoner og ubegrensede intervaller, og det skal vi se på så vidt til slutt i kapitlet.

**Definisjon.** En *partisjon*  $P$  av intervallet  $[a, b]$ , er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi  $x_i$ , der  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .



**Definisjon.** En *stegfunksjon* er en stykkvis konstant funksjon, som tar verdien  $f_i$  på intervallet  $[x_{i-1}, x_i]$ .



Merk at vi kan skrive en stegfunksjon som en lineærkombinasjon av enhetssprangfunksjoner. Dette er som oftest ikke en hensiktsmessig notasjon, og det er enklere å bruke delt forskrift.

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in [x_0, x_1) \\ f_2 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ f_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Forbundet med en stegfunksjon er summen

$$s = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f_i$$

som beskriver arealet under grafen til stegfunksjonen.

**Definisjon.** La  $f$  være en begrenset funksjon, og  $P$  en partisjon av intervallet  $[a, b]$ . La

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

og

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

En *øvre riemannsum* er

$$U(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i,$$

og en *nedre riemannsum* er

$$L(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i.$$

Det er ikke veldig vanskelig å vise at

$$U(P) - L(P) \geq 0$$

for alle partisjoner  $P$ , og at

$$U(P') \leq U(P) \quad \text{og} \quad L(P') \geq L(P)$$

dersom  $P \subset P'$ , altså at  $P'$  inneholder alle punktene i  $P$ , og minst ett ekstra punkt. Vi sier da at  $P'$  er en finere partisjon enn  $P$ .

**Definisjon.** La  $f$  være en begrenset funksjon på  $[a, b]$ . Dersom det for hver  $\epsilon > 0$  finnes en partisjon  $P$  av intervallet  $[a, b]$  slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at  $f$  er integrerbar.

Dersom  $f$  er begrenset, er det klart at mengden av alle nedre riemannsummer må ha en minste øvre skranke, og at mengden av alle nedre riemannsummer må ha en største nedre skranke. Dersom  $f$  er integrerbar, er det heller ikke så vanskelig å se at disse må være like. Dette tallet skriver vi

$$\int_a^b f(x) dx,$$

og vi har at

$$L(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(P)$$

for alle partisjoner  $P$ . Noen ganger ønsker man å uttrykke seg mer konsist, og da skriver man bare

$$\int_a^b f.$$

Det kan være ganske vanskelig å avgjøre hvilke funksjoner som er integrerbare direkte fra definisjonen, men noen eksempler er mulig å regne ut.

**Eksempel 3.89.** La  $f$  være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Denne er diskontinuerlig overalt, og ikke integrerbar. Siden  $m_i = 0$  og  $M_i = 1$  for alle  $i$  og alle partisjoner, er det klart at det ikke finnes partisjoner slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon$$

dersom  $\epsilon < 1$ . Dette eksemplet kan fremstå som noe patologisk, men vi skal se i et senere kapittel at denne funksjonen kan konstrueres ved hjelp av cosinusfunksjonen og to grenseverdi prosesser.  $\triangle$

Dette er ikke mulig å gjøre for mange funksjoner, og i neste avsnitt skal vi se at vi kan bruke antiderivasjon istedet. Men det er viktig å forstå riemannsummer når man skal igang med fysiske anvendelser av integrasjon, så vi tar med et eksempel.

**Eksempel 3.90.** Vi beregner

$$\int_0^b x \, dx.$$

La oss ta en jevn partisjon, der punktene er gitt ved:

$$x_k = \frac{bk}{n}.$$

Vi beregner en typisk nedre riemannsum:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k &= \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{(n-1)}{n} \end{aligned}$$

Her er en øvre:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{(n+1)}{n} \end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at  $f(x) = x$  er integrerbar. Velg  $\epsilon > 0$ . En rask kikk på

$$U(P) - L(P) = \frac{b^2}{2} \left( \frac{(n+1)}{n} - \frac{(n-1)}{n} \right) = \frac{b^2}{n}$$

forteller at dersom vi velger

$$n > \frac{b^2}{\epsilon}$$

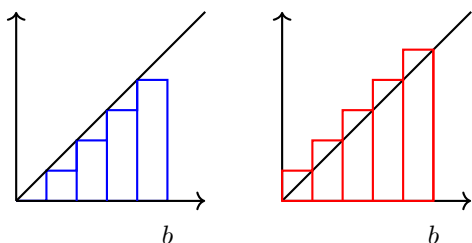
har vi

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

og siden

$$\frac{b^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \frac{b^2}{2}$$

ser det ut til at integralet blir  $\frac{b^2}{2}$ .  $\triangle$



**Eksempel 3.91.** Vi beregner

$$\int_0^b x^2 \, dx.$$

på samme vis. La partisjonen være

$$x_k = \frac{bk}{n}.$$

Vi beregner en typisk nedre riemannsum:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 &= \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^2 k^2}{n^2} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} \end{aligned}$$

Her er en øvre:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{b}{n} \sum_{k=1}^n \frac{b^2 k^2}{n^2} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at  $f(x) = x^2$  er integrerbar. Velg  $\epsilon > 0$ . En rask kikk på

$$\begin{aligned} U(P) - L(P) &= \frac{b^3}{6} \left( \frac{2n^3 + n^2 + n}{n^3} - \frac{2n^3 - n^2 + n}{n^3} \right) \\ &= \frac{b^3}{6} \frac{2n^2}{n^3} = \frac{b^3}{3n} \end{aligned}$$

forteller at dersom vi velger

$$n > \frac{b^3}{3\epsilon}$$

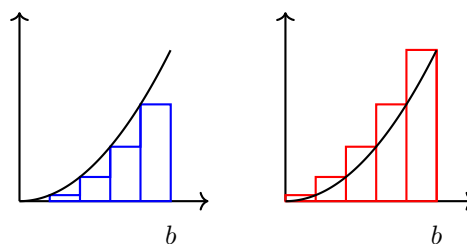
har vi

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

og siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \frac{2n^3 + n^2 + n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \frac{2n^3 - n^2 + n}{n^3} = \frac{b^3}{3}$$

ser det ut til at integralet blir  $\frac{b^3}{3}$ .  $\triangle$



Nå er det viktig å ikke fortvile. Det er ingen som beregner integraler på denne måten, men beregningen over er interessant, fordi den ble gjort av Arkimedes omtrent to tusen år før Newton og Leibniz oppfant integralregningen. Nå kommer en serie med små teoremer.

**Teorem 3.92.** For integralet gjelder følgende:

- 1 Dersom  $f$  er begrenset og stykkvis kontinuerlig på  $[a, b]$  med et endelig antall diskontinuiteter, er  $f$  integrerbar på  $[a, b]$ .
- 2 Dersom  $f$  er kontinuerlig på  $[a, b]$ , finnes en  $c \in [a, b]$  slik at

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \, ds.$$

- 3 Dersom  $f_1$  og  $f_2$  er integrerbare funksjoner, og  $c_1$  og  $c_2$  vilkårlige konstanter, er

$$\int_a^b c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \, dx = c_1 \int_a^b f_1(x) \, dx + c_2 \int_a^b f_2(x) \, dx.$$

- 4 Dersom  $f_1$  og  $f_2$  er integrerbare funksjoner og  $f_1 \leq f_2$ , er

$$\int_a^b f_1(x) \, dx \leq \int_a^b f_2(x) \, dx.$$

- 5 Dersom  $|f| \leq M$  på  $[a, b]$ , er

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq M(b-a).$$

- 6 Dersom  $f$  er integrerbar, er  $|f|$  integrerbar, og

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx.$$

- 7 Dersom  $f$  er integrerbar og  $c \in (a, b)$ , er

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

- 8 Dersom  $f$  er integrerbar, er

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

Bevisene for disse teoremene er enten så lette at de ikke er spesielt interessante å lese, eller så vanskelige at vi ikke kan gjøre dem i dette kurset.

Egenskap 1 er ikke mulig å vise med det vi har gjort til nå i kurset. Man må bevise at en begrenset og kontinuerlig funksjon er såkalt uniformt kontinuerlig, og ta det derfra. En funksjon er uniformt kontinuerlig på  $[a, b]$  dersom det for hver  $\epsilon > 0$  finnes en  $\delta$  slik at

$$0 < |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

for alle  $x, y \in [a, b]$ .

Egenskap 2 er en versjon av sekantsetningen, men for integraler. Den kalles gjerne *middelverdisatsen*.

Navnet kommer av at uttrykket

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f \, ds$$

gir middelverdien  $f$ , i den forstand at dersom  $f$  byttes ut med en konstant funksjon med denne verdien, får integralet den samme verdien. Middelverdisatsen sier at  $f$  må innom denne verdien på vei fra  $a$  til  $b$ . Denne er ikke så vanskelig å bevise, og følger av skjæringssetningen. Prøv selv!

Egenskap 3-7 følger av en serie litt kjedelige resonnerer basert på riemannsummer. Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i envariabel funksjonsteori, vil du finne dem der.

Egenskap 8 handler egentlig om konvensjon. Dersom vi tillater  $b < a$  i definisjonen av partisjoner, blir

$$x_i - x_{i-1} < 0$$

for alle  $i$ , slik at riemannsummene bytter fortegn i forhold til  $f$ . Dette kan vi bruke til å definere presist hva vi mener med

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

når  $b < a$ . Det blir da relativt enkelt å bevise egenskap 8.

## Integrasjon og derivasjon

**Teorem 3.93.** Dersom  $f$  er integrerbar på  $[a, b]$ , er

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds$$

en kontinuerlig funksjon på  $[a, b]$ .

*Bevis.* Velg  $\epsilon > 0$ , og anta  $|f| \leq M$ . Da er

$$|F(x)| \leq M(b-a)$$

og følgelig er

$$|F(x) - F(y)| \leq \left| \int_x^y f \, ds \right| \leq M|x - y|.$$

Dersom vi velger

$$|x - y| < \frac{\epsilon}{M},$$

er

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y| < \epsilon,$$

slik at  $F$  er kontinuerlig i  $x$ .  $\square$

Integrasjon og derivasjon er på sett og vis inverse operasjoner, og det finnes en stor klasse av integrerbare funksjoner som har en antiderivert. Når man lærer integrasjon på skolen, blir man egentlig oppdratt til å tro at integrasjon er det samme som antiderivasjon. Dette er et forenklet bilde av virkeligheten, for integrasjon er mye mer enn bare antiderivasjon. Men det

er allikevel praktisk å kunne beregne integraler ved å antiderivere.

**Teorem 3.94.** La  $f$  være en kontinuerlig i  $x = c \in [a, b]$ . Da er

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds$$

deriverbar i  $x = c$ , og

$$F'(c) = f(c).$$

*Bevis.* Vi beregner

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(s) \, ds - \int_a^x f(s) \, ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) \, ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x) \end{aligned}$$

siden det for hver  $h$  må finnes en  $c \in [x, x+h]$  slik at

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) \, ds = f(c). \quad \square$$

Det neste teoremet kalles gjerne *analysens fundamentalteorem*.

**Teorem 3.95.** La  $f$  være integrerbar på  $[a, b]$ . Dersom det finnes en funksjon  $F$  slik at  $F' = f$ , er

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

*Bevis.* Velg en partisjon  $P$ . Hvis vi bruker sekantsetningen på hvert delintervall, kan vi for hvert intervall finne en  $y_i$  slik at

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(y_i)((x_i - x_{i-1})),$$

og dersom vi legger sammen alle disse likningene, får vi

$$F(b) - F(a) = \sum_i f(y_i)((x_i - x_{i-1})).$$

Siden  $m_i \leq f(y_i) \leq M_i$  for alle  $i$ , må

$$L(P) \leq \sum_i f(y_i)((x_i - x_{i-1})) \leq U(P)$$

og følgelig er også

$$L(P) \leq F(b) - F(a) \leq U(P).$$

Dette gjelder altså for alle partisjoner  $P$ . Nå er det kun ett tall som er større enn  $L(P)$  og mindre enn  $U(P)$  for alle  $P$ , nemlig

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

så dersom  $F(b) - F(a)$  også skal ha denne egenskapen, må

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

**Eksempel 3.96.** Siden polynomer er kontinuerlige, må åpenbart

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

siden

$$\frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n.$$

Dette gjelder også for  $n \in \mathbb{R}$ , men dette er litt mer jobb å vise.  $\triangle$

**Eksempel 3.97.** Siden

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x,$$

må

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.98.** Det finnes funksjoner som ikke har noen antiderivert som er enkel å skrive opp, for eksempel

$$f(x) = \exp(x^2),$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x},$$

og

$$h(x) = \sqrt{1+x^4}.$$

Disse er integrerbare på alle lukkede intervaller. De antideriverte kan skrives som uendelige rekker, som vi skal se i kapitlet om rekkeutvikling.  $\triangle$

Vi tar med to regneregler for integrasjon som er umiddelbare konsekvenser av analysens fundamentalteorem.

**Teorem 3.99.** La  $F = f'$  og  $G = g'$  på  $[a, b]$ . Dersom  $f$  og  $g$  er integrerbare, er

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)g(x) \, dx &= \\ &= F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) \, dx. \end{aligned}$$

*Bevis.* Dette følger av analysens fundamentalteorem og produktregelen for derivasjon:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x)G(x) &= F(x)G'(x) + F'(x)G(x) \\ &= F(x)g(x) + f(x)G(x). \quad \square \end{aligned}$$

**Teorem 3.100.** Anta at  $f$  er kontinuertlig på  $[c, d]$ , at  $F' = f$  på  $[c, d]$  og at  $u$  er deriverbar på  $[a, b]$ , med  $u(a) = c$  og  $u(b) = d$ . Da er

$$\begin{aligned} F(u(b)) - F(u(a)) &= \int_a^b f(u(x))u'(x) dx \\ &= \int_c^d f(u) du. \end{aligned}$$

*Bevis.* Dette følger av analysens fundamentalteorem og kjerneregelen for derivasjon:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = f(u(x))u'(x). \quad \square$$

Til slutt tar vi med en variant som kalles *taylors teorem*.

**Teorem 3.101.** La  $f$  være en  $n + 1$  ganger kontinuertlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder  $a$  og  $x$ . Da er

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \\ & + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-s)^n f^{n+1}(s) ds \end{aligned}$$

**Eksempel 3.102.** En ellipse med halvaksler  $a$  og  $b$  er mengden av alle punkter som tilfredsstiller likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vi kan bruke integrasjon til å vise at arealet til ellipsen er gitt ved  $\pi ab$ . Den øvre delen av ellipsen er grafen til funksjonen  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

og ved hjelp av substitusjonen  $x = a \sin \theta$  kan vi beregne arealet:

$$\begin{aligned} A &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^2}} a \cos \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

Dersom  $a = b = r$  er dette en sirkel med radius  $r$ , og arealet blir  $\pi r^2$ .  $\triangle$

# Uegentlige integral

Et integral definerer en funksjon

$$F(x) = \int_a^x f$$

og det er ingenting i veien for å beregne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_a^x f.$$

Dersom

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty,$$

kan vi også beregne

$$\lim_{x \rightarrow c} \int_a^x f.$$

Disse kalles *uegentlige integraler*. Dersom grenseverdiene eksisterer, sier vi at integralene konvergerer.

**Eksempel 3.103.**

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \log a = \infty \triangle$$

**Eksempel 3.104.**

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{a} = 1 \triangle$$

**Eksempel 3.105.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\log a = \infty \triangle$$

**Eksempel 3.106.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} - 1 = \infty \triangle$$

**Eksempel 3.107.**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2 \triangle$$

**Definisjon.** Vi sier at  $\int_a^b f$  er absolutt konvergent dersom  $\int_a^b |f|$  er konvergent.

**Eksempel 3.108.** Integralet

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

er absolutt konvergent, siden

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1. \quad \triangle$$

Uegentlige integraler åpner opp for noe som kalles integraltesten. Det er en test for å avgjøre om et integral og en korresponderende rekke konvergerer.

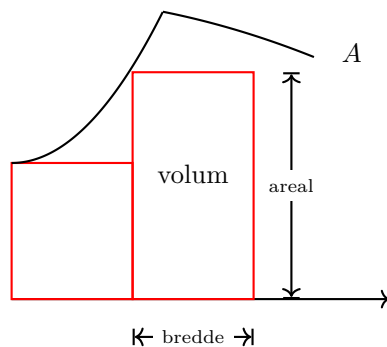
**Teorem 3.109.** La  $f$  være en begrenset funksjon. Integralet

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

og rekken

$$\sum_{n=a}^\infty f(n)$$

er enten begge konvergente, eller begge divergente.



**Eksempel 3.111.** En pyramide har et kvadratisk tverrsnitt med sidekant gitt ved

$$s(x) = b - x,$$

der  $x$  er høyden til tverrsnittet, og  $b$  er den totale høyden til pyramiden. Arealet til tverrsnittet er

$$A(x) = (b - x)^2,$$

og volumet blir

$$V = \int_0^b (b - x)^2 dx = \left( -\frac{(b - x)^3}{3} \right)_0^b = \frac{b^3}{3}. \quad \triangle$$

Et av de enkleste eksemplene å visualisere, kalles omdreiningslegemer. Anta at du har en funksjon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , og dreier grafen en gang rundt  $x$ -aksen. Da vil du få et legeme med sirkulært tverrsnitt. Arealet av tverrsnittet for en gitt  $x$ -verdi er gitt ved

$$A(x) = \pi (f(x))^2 = \pi f^2(x).$$

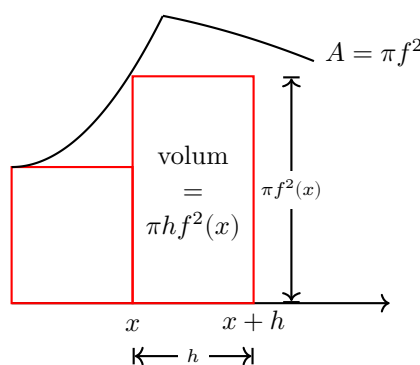
Man kan da tenke at dette er høyden i en riemannsum. Et rektangel i en riemannsum blir

$$\pi h f^2(x),$$

og dette representerer nå et volum. Totalvolumet til omdreiningslegemet er gitt ved

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

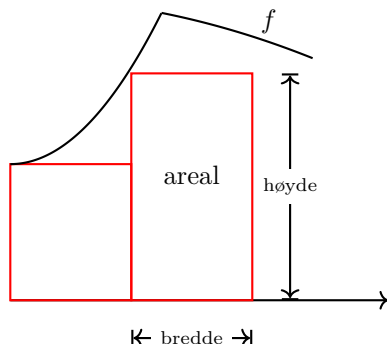
Her er en figur som illustrerer riemannsummene:



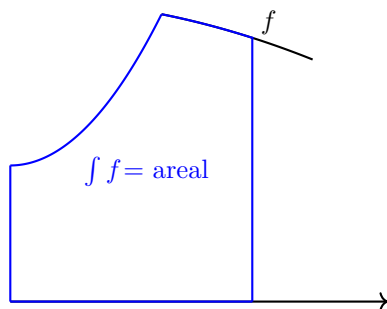
For å illustrere hvordan volumet kan se ut i virkeligheten, er her omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie funksjonen  $f(x) = x$  på intervallet  $[0, b]$ :

## Volum

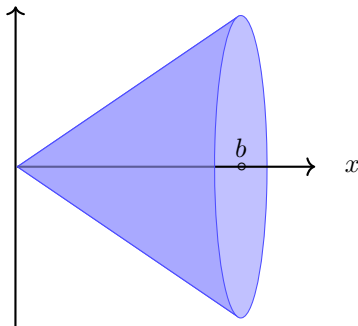
Til nå har vi brukt integralet til å beregne areal. I et bestemt rektangel i en riemannsum, representerer bredden bredden i et rektangel, og høyden høyden i et rektangel. Arealet til rektangel representerer da nettopp arealet til et rektangel:



Dermed vil  $\int f$  representere et areal:



Men en av integralets mange styrker, er at de to lengdene som har representert høyde og bredde til nå, fint kan representere helt andre ting. I dette avsnittet skal vi tenke at man har en funksjon  $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  der funksjonsverdiene beskriver areal, og  $x$ -aksen beskriver lengde. Da vil både riemannsummene og  $\int A$  representere volum:



**Eksempel 3.112.** Omdreiningslegmet i figuren over har volum gitt ved

$$V = \pi \int_0^b x^2 dx = \frac{\pi b^3}{3}.$$

Dette kjenner vi igjen som volumet til en kjegle. Alle pyramider og kjegler har volum på formen  $\frac{1}{3}Ah$ , der  $h$  er høyden, og  $A$  er grunnflatens areal.  $\triangle$

**Eksempel 3.113.** Et artig eksempel kalles *Gabriels trompet*. Vi roterer funksjonen  $f : [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om  $x$ -aksen. Volumet av dette legemet er

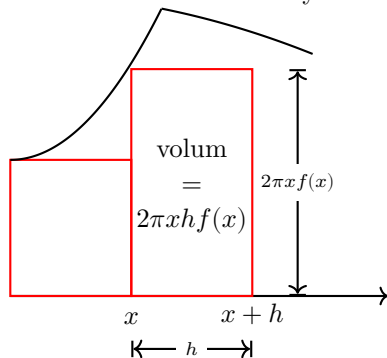
$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi.$$

Eksemplet kalles Gabriels trompet fordi rotasjonslegemet ser ut som en uendelig lang trompet.  $\triangle$

Dersom vi roterer  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rundt  $y$ -aksen, får vi et annet omdreiningslegeme, hvis areal kan beregnes ved noe som kalles sylinderskallmetoden. Man tenker at høyden i riemannsummen beskriver arealet av et sylinderskall

$$A(x) = 2\pi x f(x)$$

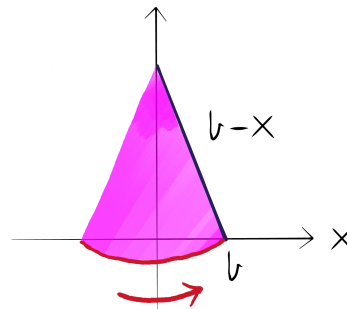
mens bredden beskriver tykkelsen av sylinderskallet:



Volumet blir

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Her er en illustrasjon av hvordan dette ser ut. Den roterte funksjonen er  $f(x) = b-x$  på intervallet  $[0, b]$ .

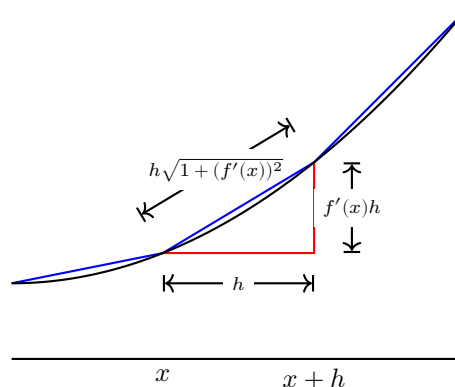


**Eksempel 3.114.** Volumet i figuren over blir

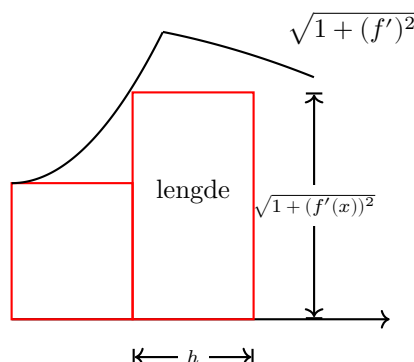
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^b x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^b x(b-x) dx \\ &= 2\pi \left( \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_0^b \\ &= 2\pi \left( \frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{\pi b^3}{3}. \end{aligned} \quad \triangle$$

## Buelengde

Vi kan bruke integralet til å beregne lengden til kurven gitt ved  $y = f(x)$  der  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Trikset er å se på en kurve bestående av sekantbiter til  $f$ :



Hvis du tenker riemannsummer, blir den korresponderende figuren slik:



Lengden av kurven fra  $(a, f(a))$  til  $(b, f(b))$  er

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**Eksempel 3.115.** La  $b > 0$ . Vi beregner lengden til kurven  $y = x^2$ , fra  $(0, 0)$  til  $(b, b^2)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} dx &= 2 \int_0^b \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx = \\ &= b\sqrt{\frac{1}{4} + b^2} + \frac{1}{4} \left( \ln \left( b + \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} \right) + \ln 2 \right). \end{aligned}$$

Dette integralet måtte jeg slå opp i en tabell. Du trenger ikke huske det til eksamen. Å finne buelengden til selv enkle funksjoner, kan være ganske hardt. Slik er livet.  $\triangle$

## Numerisk integrasjon

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen  $e^{-x^2}$  har ingen antiderivert som er enkel å evaluere, mens andre funksjoner har så kompliserte antideriverte at det ikke er vits i å prøve en gang:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)} dx = & - \left( \left( \log(\cos(x)) \right) \left( 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{1}{2} \left( (1+i) - (1-i) \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + \right. \\ & 2 \operatorname{Li}_2 \left( -\tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left( -i \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left( i \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \\ & 2 \operatorname{Li}_2 \left( \left( -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + i \right) \right) + 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{1}{2} \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) \right) - \\ & 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{1}{2} \left( (1-i) \tan \left( \frac{x}{2} \right) + (1+i) \right) \right) - 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{1}{2} \left( (1+i) \tan \left( \frac{x}{2} \right) + (1-i) \right) \right) + \\ & \log^2 \left( 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \log^2 \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) + \\ & \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - i \right) \log \left( \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right) + \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + i \right) \log \left( \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right) + \\ & 4 \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) \log \left( 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \log(4) \log \left( 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \\ & 2 \log \left( 1 - i \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - 2 \log \left( 1 + i \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \\ & 2 \log \left( \left( -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right) \right) \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - i \right) - \\ & 2 \log \left( \left( -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right) \right) \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + i \right) - \\ & 2 \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - i \right) \log \left( \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) \right) - \\ & 2 \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + i \right) \log \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) \right) - \\ & \log(4) \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) + \log \left( \tan^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 1 \right) \log \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) - \\ & 2 \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \log \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) \log \left( \cos(x) \sec^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \\ & \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) - i \right) \log \left( \cos(x) \sec^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \\ & \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + i \right) \log \left( \cos(x) \sec^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) \Big) \Big) / \\ & \left( 4 \left( \log \left( 1 - \tan \left( \frac{x}{2} \right) \right) + \log \left( \tan \left( \frac{x}{2} \right) + 1 \right) + \log \left( \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) \right) + \text{constant} \end{aligned}$$

**Eksempel 3.116.** Man kan bruke riemannsummer til å tilnærme integraler. Dersom en  $f$  er strengt voksende på intervallet  $[a, b]$ , og punktene i en jevn partisjon  $P$  gitt ved

$$a + \frac{b-a}{n}i$$

der  $0 \leq i \leq n$ , er øvre riemannsum gitt ved

$$U(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

og nedre riemannsum gitt ved

$$L(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Dersom  $f$  ikke er strengt voksende på  $[a, b]$ , er uttrykkene over ikke nødvendigvis riemannsummer, men de representerer fremdeles numeriske metoder for å tilnærme integralet:

$$L(P) \approx U(P) \approx \int_a^b f \quad \triangle$$

**Eksempel 3.117.** Dersom man tar gjennomsnittet av uttrykkene i forrige eksempel, får man trapesregelen:

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\approx \frac{1}{2n} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right) \end{aligned}$$

Denne er noe mer nøyaktig enn riemannsummer, og vi skal senere i semesteret se hvorfor.  $\triangle$

**Eksempel 3.118.** Dersom man tar evaluerer  $f$  midt mellom punktene i partisjonen, istedet for i endepunktene, får man midtpunktregelen:

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left( \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right)$$

Denne er også noe mer nøyaktig enn riemannsummer.  $\triangle$

Det går selvfølgelig an å implementere disse metodene med ujevne partisjoner, men det er ikke så viktig for oss i dette semesteret.

Vi kan også finne mer avanserte tilnærminger til integralet

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

ved å interpolere  $f$ , og så integrere interpolasjonspolynomet analytisk. Dette kalles kvadratur, og en bestemt metode kalles gjerne *kvadraturregelen*. La  $x_i$  være interpolasjonspunkter på  $[a, b]$ , og  $l_i$  de korresponderende lagrangefunksjonene, slik at

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x).$$

Vi skriver

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) A_i = Q[f], \end{aligned}$$

der vi har definert  $A_i = \int_a^b l_i(x) dx$ . Disse kalles *kvadraturvektene*, eller bare *vektene*.

**Eksempel 3.119.** En av de aller enkleste kvadraturreglene kjenner du fra M1. Den kalles trapesregelen, er gitt ved

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} \right)$$

og utledes enkelt ved å interpolere  $f$  med et førsteordens polynom i  $x_0 = a$  og  $x_1 = b$  og integrere dette. Vektene er

$$A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.120.** Gauss-Legendre-punktene for  $n = 2$  på intervallet  $[-1, 1]$  er  $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ , og lagrange-funksjoner er

$$l_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( x + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

og

$$l_1(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( x - \sqrt{\frac{1}{3}} \right).$$

Vi beregner

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x + \sqrt{\frac{1}{3}} dx = 1$$

og

$$A_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x - \sqrt{\frac{1}{3}} dx = 1. \quad \triangle$$

**Eksempel 3.121.** Simpsons regel, som du også kjenner fra M1,

$$Q[f] = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

har vektor

$$A_0 = A_2 = \frac{b-a}{6} \quad \text{og} \quad A_1 = \frac{2(b-a)}{3}.$$

Disse utledes ved å interpolere  $f$  med andre ordens polynomer i  $a$ ,  $b$  og  $\frac{a+b}{2}$ , men dette er gjort i M1, så vi dropper det.  $\triangle$

## Feilestimat

Det første vi kan gjøre, er å sette opp en generell regel for kvadraturfeil. Denne setter rett ut av feilestimatet for interpolasjon.

**Teorem 3.122.** La  $Q$  være en  $n+1$ -punkts kvadraturregel på  $[a, b]$ , og anta at  $f$  er  $n+1$  ganger kontinuerlig deriverbar på  $[a, b]$ . En øvre skranke for feilen er

$$|I[f] - Q[f]| = \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i| dx$$

der  $M = \max_{s \in [a, b]} |f^{n+1}(s)|$ .

*Bevis.* Integrer feilestimatet

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

fra  $a$  til  $b$  og bruk at  $|f^{n+1}| \leq M$ .  $\square$

Fordelen med dette teoremet er at det er lett å bevise. Ulempen er at det stort sett er mulig å finne skarpere estimater, men disse er mer grisete å utlede. Vi tar derfor med noen bedre feilestimater for forskjellige kvadraturregler uten bevis.

**Teorem 3.123.** For trapesregelen finnes det en  $s \in (a, b)$  slik at

$$I[f] - Q[f] = \frac{(b-a)^3}{12} f''(s).$$

**Teorem 3.124.** For Simpsons regel finnes det en  $s \in (a, b)$  slik at

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(s).$$

Det går an å skrive opp feilestimater for kvadraturregler basert på Chebyshev-punkter, Gauss-Legendre-punkter og Gauss-Lobatto-punkter, men de er ganske grisete, og bevisen er altfor komplisert for oss. Vi nøyer oss derfor med noen eksempler, der vi sammenlikner med den analytiske verdien til integralet.

**Eksempel 3.125.** Vi tilnærmer

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1} = 2.350402387287603$$

med trapesregelen:

$$Q[f] = e^{-1} + e \approx 3.086161269630488.$$

Feilen er i samme størrelsesorden som svaret. Triste greier.  $\triangle$

**Eksempel 3.126.** Med Simpsons regel går det litt bedre:

$$Q[f] = \frac{1}{3}(e^{-1} + 4e^0 + e) \approx 2.362053756543496$$

Her er feilen  $0.011651369255893 \approx 10^{-2}$ .  $\triangle$

**Eksempel 3.127.** Gauss-Legendre med  $n = 2$  gir

$$Q[f] = e^{-\sqrt{1/3}} + e^{\sqrt{1/3}} \approx 2.342696087909730$$

Her er feilen på  $-0.007706299377873 \approx 10^{-2}$ , og faktisk mindre enn for Simpsons regel, til tross for at kvadraturregelen er basert på en lavere ordens interpolasjon. Dette eksemplet illustrerer at plasseringen av interpolasjonspunktene har mye å si.  $\triangle$

## Presisjonsgrad

Har forskjellige kvadraturregler noen andre gode egenskaper enn høy presisjon? Vi sier at en integrasjonsformel er eksakt for funksjonen  $f$  dersom

$$\int_a^b f dx = \sum_i f(x_i) A_i.$$

Dersom du interpolerer et polynom av grad  $n$  eller lavere med et polynom av grad  $n$ , blir  $f$  og  $p$  identiske. Derfor må det være klart at

$$\int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) A_i,$$

for alle polynomer av grad  $n$  eller lavere. Dersom kvadraturregelen er intelligent designet, kan man oppnå høyere presisjonsgrad enn som så.

**Eksempel 3.128.** Trapesregelen har presisjonsgrad 1, for

$$Q[1] = (b-a) \left( \frac{1+1}{2} \right) = b-a = \int_a^b dx$$

og

$$Q[x] = (b-a) \left( \frac{a+b}{2} \right) = \frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b x dx,$$

mens

$$\begin{aligned} Q[x^2] &= (b-a) \left( \frac{a^2+b^2}{2} \right) \\ &= \frac{b^3-ab^2+a^2b-a^3}{2} \neq \int_a^b x^2 dx. \end{aligned}$$

Disse beregningene viser at trapesregelen integrerer alle første ordens polynomer riktig, siden

$$Q[cx+d] = cQ[x] + dQ[1].$$

Ingen andre ordens polynomer integreres riktig, siden

$$Q[cx^2+dx+e] = cQ[x^2] + dQ[x] + eQ[1],$$

og  $Q[x^2]$  ikke integreres riktig.  $\triangle$

**Eksempel 3.129.** Gauss-Lobatto  $n=2$  har presisjonsgrad 3. Dette kan vises på samme måte som for trapesregelen, men vi venter litt med å se på det. Det er nemlig ikke så vanskelig å vise generelt at en  $n+1$ -punkts Gauss-Lobatto-regel har presisjonsgrad  $2n+1$ , og dette skal vi gjøre senere.  $\triangle$

**Eksempel 3.130.** Simpsons regel har presisjonsgrad 3. En rask titt på feilestimatet forteller at dersom  $f$  er et tredjegradspolynom, er  $f^4=0$ .  $\triangle$

## Noen forskjellige kvadraturklasser

Kvadraturregler skilles av er punktfordelingen, og hvorvidt man interpolerer med et polynom av høy grad på alle punktene, eller deler opp intervallet og interpolerer med stykkvis kontinuerlige polynombiter, såkalt *sammensatte regler*. Vi skal ta for oss et par klassiske kvadraturregler, og avslutte med en diskusjon rundt sammensatte regler.

### Newton-Cotes

Både trapesregelen og Simpsons metode er eksempler på Newton-Cotes-regler. Dette er regler der interpolasjonen er gjort på ekvidistante gitre. En klassisk lærebok i numerisk analyse vil typisk inneholde en lengre utgreining om Newton-Cotes, men vi vet jo at man skal styre unna polynominterpolasjon på ekvidistante gitre, så derfor lar vi Newton-Cotes ligge.

**Eksempel 3.131.** Trapesregelen og Simpsons regel er Newton-Cotes-regler med henholdsvis  $n=2$  og  $n=3$ .  $\triangle$

### Clenshaw-Curtis

Clenshaw-curtiskvadratur baserer seg på å integrere chebyshevinterpolanten. For chebyshevinterpolasjon er det lett å skrive opp formler for interpolasjonspunktene, og pene formler for kvadraturvektene, men disse formlene er vanskelige å utlede.

**Teorem 3.132.** Dersom  $n$  er et partall, og interpolasjonsgitteret er et  $n$ -punkts chebyshev ekstremalgitter, er vektene til kvadraturregelen gitt ved

$$w_1 = w_n = \frac{1}{(n-1)^2}$$

og

$$w_i = \frac{2}{(n-1)} \left( 1 - \sum_{j=1}^{(n-2)/2} \frac{2}{4j^2-1} \cos \frac{2j(i-1)}{n-1} \pi \right)$$

for  $2 \leq i \leq n-1$ .

### Gauss-Legendre

Vi skal beskrive prosessen som produserer Legendre-polynomene, og vise at denne prosessen produserer kvadraturformler med presisjonsgrad  $2n+1$ .

**Teorem 3.133.** La  $q$  være et polynom av grad  $n+1$  slik at

$$\int_a^b qp dx = 0 \quad (3.1)$$

for alle polynomer  $p$  av grad mindre enn eller lik  $n$ . En kvadraturregel med disse  $n+1$  nullpunktene som noder, vil være eksakt for alle polynomer av grad mindre enn eller lik  $2n+1$ .

*Bevis.* Vi begynner med å vise at polynomet  $q$  har  $n+1$  forskjellige nullpunkter på intervallet  $[a, b]$ . La  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  være de  $r$  punktene der  $q$  bytter fortegn på  $[a, b]$ . Polynomet

$$\prod_{i=0}^{r-1} (x-x_i)$$

har grad  $r$ , og bytter fortegn nøyaktig samtidig som  $q$ , slik at enten

$$q \prod_{i=0}^{r-1} (x-x_i) \leq 0$$

eller

$$q \prod_{i=0}^{r-1} (x-x_i) \geq 0$$

på  $[a, b]$ . Dette betyr at

$$\int_a^b q \prod_{i=0}^{r-1} (x-x_i) dx \neq 0,$$

og siden vi har

$$\int_a^b qp dx = 0 \quad (3.2)$$

for alle polynomer  $p$  av grad mindre enn eller lik  $n$ , impliserer dette at  $r \geq n+1$ . Siden  $r$  åpenbart ikke kan være større enn  $n+1$ , må  $r = n+1$ . Altså bytter

$q$  fortegn  $n+1$  ganger på  $[a, b]$ , og må følgelig ha  $n+1$  nullpunkter på  $[a, b]$ .

La nå  $h$  være et polynom av grad  $2n+1$  eller lavere, og del  $h$  på  $q$  med rest  $r$ :

$$h = qp + r.$$

der  $p$  har grad  $n$ , og  $r$  har maksimal grad  $n$ . Vi evaluerer  $h$  i  $x_i$ , og ser at

$$h(x_i) = q(x_i)p(x_i) + r(x_i) = r(x_i),$$

siden  $q(x_i) = 0$  for alle  $i$ . Siden kvadraturregelen er basert på integrasjon av et  $n$ -te ordens polyom, er den åpenbart eksakt for polynomer av orden  $n$  eller lavere, og vi kan beregne

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) dx &= \int_a^b q(x)p(x) + r(x) dx = \int_a^b r(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n r(x_i)A_i = \sum_{i=0}^n h(x_i)A_i. \quad \square \end{aligned}$$

**Eksempel 3.134.** Vi tar et eksempel der vi konstruerer  $q$  fra grunnen av. La  $n = 1$  og  $[a, b] = [0, 1]$ . Vi må finne

$$q(x) = ax^2 + bx + c.$$

Vi begynner med å kreve at  $q$  skal stå ortogonalt på alle polynomer av grad 1 eller lavere. Dersom

$$\int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

og

$$\int_0^1 xq(x) dx = \int_0^1 ax^3 + bx^2 + cx dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = 0,$$

vil

$$\int_0^1 (ax + b)q(x) dx = 0.$$

Vi ganger den første likningen med seks, den andre med tolv, og får likningssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Litt gausseliminasjon gir

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her står det at  $a + b = 0$ , og at  $2a + 3b + 6c = 0$ . Løsningsrommet er

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix},$$

slik at

$$q(x) = 6x^2 - 6x + 1,$$

er et mulig valg for  $q$ . Andre valg av konstanten  $c$  vil gi andre polynomer, men alle vi ha de samme nullpunktene, og det er dem vi er ute etter. Nullpunktene til  $q$  er

$$x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{og} \quad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Lagrangefunksjonene blir

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \sqrt{3} \left( x - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right)$$

og

$$L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \sqrt{3} \left( x - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right)$$

slik at

$$A_1 = \sqrt{3} \int_0^1 x - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) dx = \frac{1}{2} = A_0.$$

Integrasjonsrutinen vi har laget skal være eksakt for alle polynomer opp til grad 3. Vi tester:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx.$$

Merk at punktene er bare Gauss-Legendre-punktene flyttet til intervallet  $[0, 1]$ . Dette eksemplet illustrerer hvordan Gauss-Legendre-tabellen i interpolasjonskapitlet er konstruert.  $\triangle$

**Kommentar.** Legendrepolyomene er definert på intervallet  $[-1, 1]$ , så eksemplet over laget ikke et legendrepolyom, men derimot et polynom som har nullpunktene til legendrepolyomet

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

flyttet til intervallet  $[0, 1]$ .

Vi kan utvide tabellen fra forrige kapittel med vektorer. Husk at tabellen gjelder for  $[-1, 1]$ , så om du trenger integrasjonsrutine for andre intervaller, må punktene flyttes, og vektene beregnes på nytt.

| $n$ | $x_i$                                                   | $A_i$                         |
|-----|---------------------------------------------------------|-------------------------------|
| 2   | $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$                                 | 1                             |
| 3   | 0                                                       | $\frac{8}{9}$                 |
|     | $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$                                 | $\frac{5}{9}$                 |
| 4   | $\pm\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ | $\frac{18+\sqrt{30}}{36}$     |
|     | $\pm\sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$ | $\frac{18-\sqrt{30}}{36}$     |
| 5   | 0                                                       | $\frac{128}{225}$             |
| 5   | $0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$      | $\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$ |
| 5   | $0, \pm\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$      | $\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$ |

Merk at alle vektene er positive. Kvadraturentusias-ter regner dette som et kvalitetsstempel.

## Gauss-Lobatto

Vi koster på oss en tabell med vektorer for Gauss-Lobatto også.

| $n$ | $x_i$                                                     | $A_i$                        |
|-----|-----------------------------------------------------------|------------------------------|
| 3   | 0                                                         | $\frac{4}{3}$                |
|     | $\pm 1$                                                   | $\frac{1}{3}$                |
| 4   | $\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$                                   | $\frac{5}{6}$                |
|     | $\pm 1$                                                   | $\frac{1}{6}$                |
| 5   | 0                                                         | $\frac{32}{45}$              |
|     | $\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$                                   | $\frac{49}{90}$              |
|     | $\pm 1$                                                   | $\frac{1}{10}$               |
| 6   | $\pm\sqrt{\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}}}$      | $\frac{14+\sqrt{7}}{30}$     |
|     | $\pm\sqrt{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{7}}}}$      | $\frac{14-\sqrt{7}}{30}$     |
|     | $\pm 1$                                                   | $\frac{1}{15}$               |
| 7   | 0                                                         | $\frac{256}{525}$            |
|     | $\pm\sqrt{\frac{5}{11} - \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}$ | $\frac{124+7\sqrt{15}}{350}$ |
|     | $\pm\sqrt{\frac{5}{11} + \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}$ | $\frac{124-7\sqrt{15}}{350}$ |
|     | $\pm 1$                                                   | $\frac{1}{21}$               |

**Eksempel 3.135.** Simpsons regel er også en Gauss-Lobatto-regel med  $n = 3$ .  $\triangle$