SLIK SKAL DET GJØRES

Triks bran burde lære før de blir sivingstudenter på Gløs

Noen plusstykker er lette, for eksempel $3 + 4 = 7$. Men hva med $357 + 419$? Det ser vanskelig ut. Her er det viktigste trikset i alle realfag. Det kalles **reduksjonisme:**

Når noe er vanskelig, deler vi det opp i små biter som er lette.

Vi regner ut de lette bitene én om gangen, og setter dem sammen til slutt.

Tall er bygd av biter

Tallet 357 er satt sammen av tre hundrere, fem tiere og sju enere. Tallet 419 er fire hundrere, én tier og ni enere:

$$357 = 300 + 50 + 7$$
$$419 = 400 + 10 + 9$$

Én linje om gangen

Nå skriver vi regnestykket på nytt, linje for linje. Hver ny linje begynner med et likhetstegn. Likhetstegnet betyr: Det som står her, er akkurat like mye som linjen over – bare skrevet på en ny måte. Svaret forandrer seg aldri underveis. Det er bare måten vi skriver det på som forandrer seg. Til høyre står det hva vi gjør i hver linje.

$$\begin{aligned}
357 + 419 &= 300 + 50 + 7 + 400 + 10 + 9 && \text{del opp begge tallene} \\
&= 300 + 400 + 50 + 10 + 7 + 9 && \text{samle hundrere, tiere og enere} \\
&= 700 + 60 + 16 && \text{legg sammen hver for seg} \\
&= 700 + 60 + 10 + 6 && \text{16 er en tier og seks enere} \\
&= 700 + 70 + 6 && 60 + 10 \text{ er } 70 \\
&= 776 && \text{ferdig!}
\end{aligned}$$

Hvorfor kan vi bytte om på rekkefølgen i den andre linjen? Når vi bare legger sammen, spiller rekkefølgen ingen rolle: $7 + 9$ er like mye som $9 + 7$. Derfor kan vi samle hundrerne for seg, tierne for seg og enerne for seg.

Når du blir flink, kan du hoppe over noen av linjene. Men i begynnelsen er det lurt å skrive alle sammen, så du ser hva som skjer.

Ett til

Noen ganger blir det for mange tiere også. Da deler vi opp en gang til:

$$
\begin{aligned}
268 + 375 &= 200 + 60 + 8 + 300 + 70 + 5 && \text{del opp} \\
&= 200 + 300 + 60 + 70 + 8 + 5 && \text{samle} \\
&= 500 + 130 + 13 && \text{legg sammen hver for seg} \\
&= 500 + 100 + 30 + 10 + 3 && \text{130 er 100 + 30, og 13 er 10 + 3} \\
&= 600 + 40 + 3 && \text{legg sammen en gang til} \\
&= 643
\end{aligned}
$$

Ser du hva som skjer? Vanskelige tall blir til lette tall, og lette tall kan du regne i hodet. Trikset virker ikke bare på plusstykker - nesten alt som er vanskelig, kan deles opp i små biter som er lette. Det er sånn matematikere jobber.

Prøv selv

Skriv alle linjene, akkurat som i eksemplene. Hver ny linje begynner med et likhetstegn. Noen av stykkene har tre tall, og noen har tusenere – trikset er akkurat det samme.

1. $123 + 456$
2. $245 + 138$
3. $471 + 265$
4. $386 + 547$
5. $609 + 295$
6. $148 + 148$
7. $555 + 445$
8. $777 + 333$
9. $125 + 240 + 318$
10. $111 + 222 + 333$
11. $1234 + 4321$
12. $2468 + 1357$
13. $999 + 1$ (morsomt!)
14. $9999 + 1$ (enda morsommere!)

Fasit: 579, 383, 736, 933, 904, 296, 1000, 1110, 683, 666, 5555, 3825, 1000 og 10000.

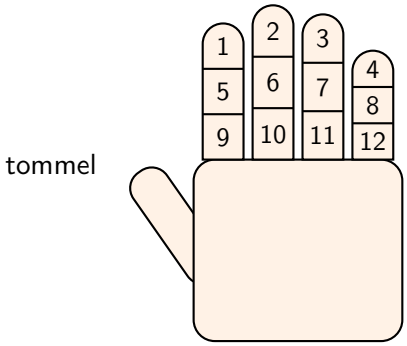
FINGRE OG PRIKKER

Gange er å legge sammen mange like

$4 \cdot 5$ betyr fire femmere: $5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Og $3 \cdot 12$ betyr tre tolvere: $12 + 12 + 12 = 36$. Å gange er altså bare å legge sammen mange like tall. Det går fortest å telle i hopp: 5, 10, 15, 20. Men da må du holde styr på hvor mange hopp du har tatt – og det kan fingrene gjøre.

Tell til 12 på én hånd

I mange land i Asia teller de ikke på fingrene, men på fingerleddene. Hver av de fire fingrene har tre ledd, og $4 \cdot 3 = 12$. Tommelen er pekeren: Den hopper fra ledd til ledd og teller. Begynn på fingertuppene: pekefinger, langfinger, ringfinger, lillefinger – det er 1, 2, 3, 4. Så tar du de midterste leddene, 5 til 8, og til slutt de nederste, 9 til 12:



Når hånden er full, flytter du tommelen på den andre hånden ett ledd og begynner på nytt. Den andre hånden teller altså tolvere. Med begge hendene kan du telle helt til $12 \cdot 12 = 144$.

Gange på fingrene

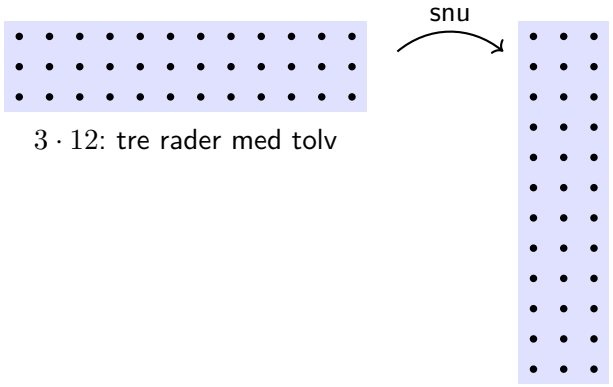
$7 \cdot 8$ er sju åttere. Tell i åttere, og flytt tommelen ett ledd for hver åtter du sier:

tommelen på ledd	1	2	3	4	5	6	7
du sier	8	16	24	32	40	48	56

Når tommelen står på ledd 7, er du ferdig: $7 \cdot 8 = 56$. Du har 12 ledd, så dette virker helt opp til $12 \cdot 12$. Da trenger du ikke huske hele gangetabellen – du kan alltid telle deg fram.

Snu bildet

$3 \cdot 12$ er tre tolvere. Tegner vi det som prikker, blir det tre rader med tolv prikker i hver. Snur vi bildet på siden, blir det tolv rader med tre prikker i hver – altså $12 \cdot 3$. Men det er jo akkurat de samme prikkene!



$3 \cdot 12$: tre rader med tolv

$12 \cdot 3$: tolv rader med tre

Så $3 \cdot 12 = 12 \cdot 3$. Du kan gange i den rekkefølgen du vil. Det er nyttig: $12 \cdot 3$ er tolv treere – tolv hopp på fingrene. $3 \cdot 12$ er tre tolvere – bare tre hopp: 12, 24, 36. Velg den rekkefølgen som gir færrest hopp!

Prøv selv

Bruk fingrene. Snu gjerne rekkefølgen først, så du får færre hopp.

1. $6 \cdot 4$
2. $9 \cdot 3$
3. $8 \cdot 5$
4. $4 \cdot 9$
5. $5 \cdot 6$
6. $10 \cdot 7$
7. $12 \cdot 2$
8. $7 \cdot 7$
9. $9 \cdot 9$
10. $8 \cdot 12$
11. $11 \cdot 11$ (ser du mønsteret?)
12. $12 \cdot 12$ (så langt du kan telle!)

Fasit: 24, 27, 40, 36, 30, 70, 24, 49, 81, 96, 121 og 144.

PARENTESER

Et triks for store gangestykker

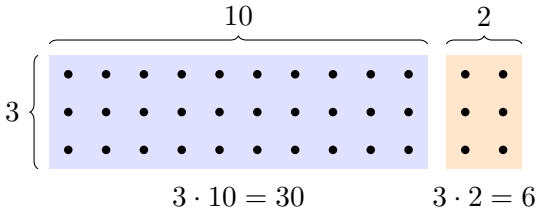
En parentes er en pose

En parentes er en pose rundt noen tall. Det som ligger i posen, hører sammen, og vi regner ut posen for seg. Husker du at vi samlet hundrere, tiere og enere? Med poser kan vi vise akkurat hva vi samlet:

$$357 + 419 = (300 + 400) + (50 + 10) + (7 + 9) = 700 + 60 + 16$$

Del opp det store tallet

Husker du at $3 \cdot 12$ er tre tolvere? Det er like mange som tre rader med tolv prikker:



Tolv er et stort tall. Men $12 = 10 + 2$, og både 10 og 2 er lette! Se på bildet: Tre rader med 10 prikker er $3 \cdot 10 = 30$, og tre rader med 2 prikker er $3 \cdot 2 = 6$. Til sammen 36. Med en pose skriver vi det slik:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 12 &= 3 \cdot (10 + 2) && \text{del opp 12 i en pose} \\ &= 3 \cdot 10 + 3 \cdot 2 && \text{gang 3 med alt i posen} \\ &= 30 + 6 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Når du ganger et tall med en pose, ganger du tallet med alt som ligger i posen.

Ett til:

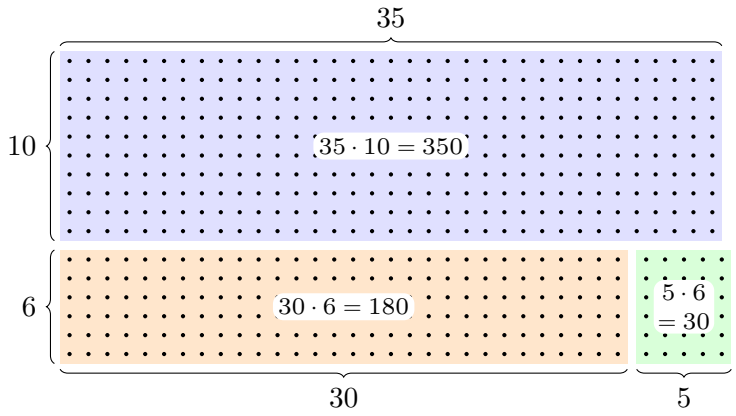
$$\begin{aligned} 4 \cdot 23 &= 4 \cdot (20 + 3) && \text{del opp 23 i en pose} \\ &= 4 \cdot 20 + 4 \cdot 3 && \text{gang 4 med alt i posen} \\ &= 80 + 12 \\ &= 92 \end{aligned}$$

Et stort et: $35 \cdot 16$

Nå er begge tallene vanskelige. Da deler vi opp ett om gangen – og er det fortsatt vanskelig, deler vi opp igjen:

$$
\begin{aligned}
35 \cdot 16 &= 35 \cdot (10 + 6) && \text{del opp 16 i en pose} \\
&= 35 \cdot 10 + 35 \cdot 6 && \text{gang 35 med alt i posen} \\
&= 350 + 35 \cdot 6 && \text{ti-gangen er lett} \\
&= 350 + (30 + 5) \cdot 6 && 35 \cdot 6 \text{ er fortsatt vanskelig: del opp 35} \\
&= 350 + 30 \cdot 6 + 5 \cdot 6 && \text{gang alt i posen med 6} \\
&= 350 + 180 + 30 && 3 \cdot 6 = 18, \text{ så } 30 \cdot 6 = 180 \\
&= 560
\end{aligned}
$$

Her er en skjematisk prikkeversjon:



Prøv selv

Skriv alle linjene. Er et gangestykke fortsatt vanskelig, deler du opp igjen.

1 $4 \cdot 13$

2 $6 \cdot 25$

3 $12 \cdot 12$

4 $35 \cdot 21$

5 $25 \cdot 44$ Del opp begge!

Fasit: 52, 150, 144, 735 og 1100.

MINUS

Det motsatte av pluss

Minus er å telle baklengs

$12 - 5$ betyr: Start på 12, og tell fem baklengs: 11, 10, 9, 8, 7. På fingrene setter du tommelen på ledd 12 og hopper fem ledd tilbake. Du kan hoppe baklengs i tiere også: $100 - 30$ er tre hopp: 90, 80, 70.

Minus er det motsatte av pluss. $7 + 5 = 12$, så $12 - 5 = 7$. Derfor kan du alltid sjekke et minusstykke med pluss: Svaret pluss det du trakk fra, skal bli tallet du startet med.

Del opp det du trekker fra

Å trekke fra 178 er det samme som å trekke fra 100, så 70, så 8. Ta én bit om gangen:

$$
\begin{aligned}
452 - 178 &= 452 - 100 - 70 - 8 && \text{del opp 178} \\
&= 352 - 70 - 8 && \text{hundreren først} \\
&= 282 - 8 && \text{sju tier-hopp baklengs} \\
&= 274 && \text{ned til 280 først, så 6 til}
\end{aligned}
$$

Sjekk med pluss: $274 + 178 = 452$. Det stemmer!

Trekk fra for mye, og legg tilbake

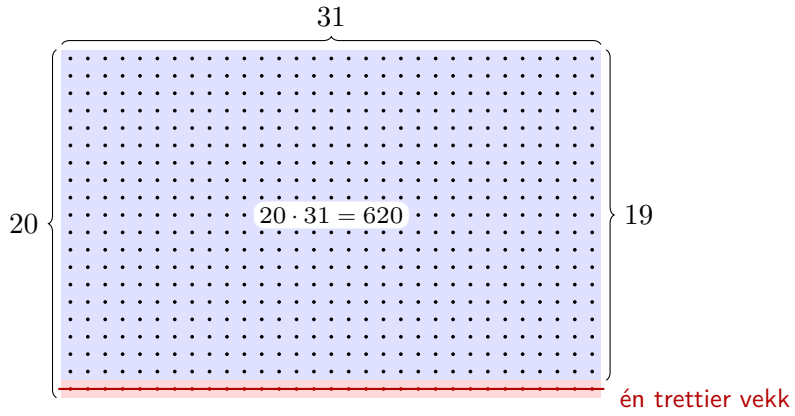
178 er nesten 200, og 200 er lett å trekke fra. Så trekk fra 200 i stedet! Da har du trukket fra 22 for mye, og dem må du legge tilbake. Med en pose rundt $200 - 22$ skriver vi det slik:

$$
\begin{aligned}
452 - 178 &= 452 - (200 - 22) && \text{178 er 200 minus 22} \\
&= 452 - 200 + 22 && \text{trekk fra 200, legg tilbake 22} \\
&= 252 + 22 \\
&= 274
\end{aligned}
$$

Samme svar som i stad. Begge veier er riktige – du velger den som er lettest. Se hva som skjedde med posen: Minus foran posen snudde minusen inni posen til pluss. De 22 skulle jo ikke trekkes fra likevel.

Gange med minus

$19 \cdot 31$ er nitten trettiere. Det er mye å telle. Men tjue trettiere er lett: $20 \cdot 31 = 620$, for $2 \cdot 31 = 62$. Og nitten trettiere er bare én trettier mindre:



$$
\begin{aligned}
19 \cdot 31 &= (20 - 1) \cdot 31 && \text{19 er 20 minus 1} \\
&= 20 \cdot 31 - 1 \cdot 31 && \text{tjue trettiere minus én trettier} \\
&= 620 - 31 \\
&= 589
\end{aligned}
$$

Så ni-gangen, nitten-gangen og nittini-gangen er lette: Gå opp til ti, tjue eller hundre, og trekk fra én.

$$9 \cdot 46 = (10 - 1) \cdot 46 = 460 - 46 = 414$$
$$99 \cdot 7 = (100 - 1) \cdot 7 = 700 - 7 = 693$$

Prøv selv

Tell baklengs, del opp, eller trekk fra for mye og legg tilbake – velg det som er lettest.

1. $15 - 8$
2. $468 - 235$
3. $352 - 167$
4. $500 - 198$
5. $1000 - 1$ (morsomt!)
6. $9 \cdot 12$
7. $19 \cdot 5$
8. $99 \cdot 8$
9. $19 \cdot 21$
10. $999 \cdot 2$

Fasit: 7, 233, 185, 302, 999, 108, 95, 792, 399 og 1998.

TIERPOTENSER

Slipp å telle nuller

Ti, hundre, tusen

Hver gang du ganger med 10, får tallet en null til:

$$10 = 10 = 10^1$$
$$10 \cdot 10 = 100 = 10^2$$
$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 = 10^3$$
$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000 = 10^6$$

Tallene 10, 100, 1000 og så videre kaller vi *tierpotenser*. Det lille tallet oppe i hjørnet heter *eksponent*, og det teller hvor mange tiere vi ganger sammen. 10^3 leser vi *ti i tredje*. Eksponenten teller også nullene: 10^6 er et ettall med seks nuller, altså en million. Sånn slipper vi å skrive lange rekker med tiere – eller nuller.

10^3	tusen
10^6	million
10^9	milliard
10^{12}	billion
10^{15}	billiard
10^{100}	googol

En googol er et ettall med hundre nuller. Det er flere enn det finnes atomer i hele universet!

Gange tiere med tiere

$1000 \cdot 100$ er tre tiere ganger to tiere. Det blir fem tiere til sammen:

$$\begin{aligned} 10^3 \cdot 10^2 &= (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) \\ &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 10^5 \end{aligned}$$

Vi trenger ikke skrive opp tierne. Vi bare legger sammen eksponentene: $3 + 2 = 5$.

Når du ganger tierpotenser, legger du sammen eksponentene.

$$10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$$

Det er det samme som å telle nuller, men mye tryggere. Prøv å telle nullene i $1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000\,000$! Med eksponenter er det lett: $10^6 \cdot 10^9 = 10^{15}$, en billiard.

Del opp store tall

Et stort tall er et lite tall ganger en tierpotens:

$$3600 = 36 \cdot 100 = 36 \cdot 10^2 \qquad 5000 = 5 \cdot 10^3 \qquad 40 = 4 \cdot 10$$

Da blir store gangestykker små. Gang de små tallene for seg, og legg sammen eksponentene for seg:

$$\begin{aligned} 200 \cdot 3000 &= 2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^3 && \text{del opp begge} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 10^3 && \text{samle} \\ &= 6 \cdot 10^5 && 2 \cdot 3 = 6, \text{ og } 2 + 3 = 5 \\ &= 600\,000 \end{aligned}$$

Desimaltall

Desimaltall kjenner du fra butikken, som 24,90 kr – og fra nyhetene: 3,6 millioner kroner. I Norge skriver vi komma, men forskere over hele verden skriver punktum: 3.6. Det gjør vi her også. 3.6 millioner betyr 3 millioner og litt til, 600 000 for å være nøyaktig. Altså er $3\,600\,000 = 3.6 \cdot 10^6$. Ganger du et desimaltall med 10, flytter punktumet ett hakk til høyre: $3.6 \cdot 10 = 36$. Ganger du med 10^3, flytter det tre hakk: $3.6 \cdot 10^3 = 3600$. Motsatt vei setter du punktumet etter det første sifferet og teller hakkene:

$$3600 = 3.6 \cdot 10^3 \qquad 45\,000 = 4.5 \cdot 10^4 \qquad 7\,000\,000 = 7 \cdot 10^6$$

Nå kan vi gange store tall uten å telle en eneste null:

$$\begin{aligned} 1000 \cdot 3600 &= 10^3 \cdot 3.6 \cdot 10^3 && \text{del opp 3600} \\ &= 3.6 \cdot 10^3 \cdot 10^3 && \text{samle} \\ &= 3.6 \cdot 10^6 && 3 + 3 = 6 \\ &= 3.6 \text{ millioner} \end{aligned}$$

Sånn skriver forskere alle store tall. Avstanden til sola er $1.5 \cdot 10^8$ km, lyset går $3 \cdot 10^5$ km på ett sekund, og det bor omtrent $8 \cdot 10^9$ mennesker på jorda.

Prøv selv

Del opp, gang de små tallene, og legg sammen eksponentene.

1. Skriv $100\,000$ som tierpotens.
2. $10^4 \cdot 10^3$
3. $300 \cdot 2000$
4. $50 \cdot 4000$
5. $1000 \cdot 45\,000$
6. $2000 \cdot 3\,000\,000$
7. $10^6 \cdot 10^9$ (hva heter tallet?)
8. Hvor mange nuller har en googol?

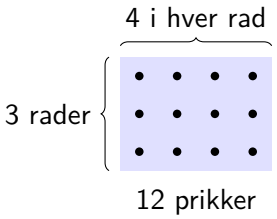
Fasit: 10^5, 10^7, 600 000, 200 000, 45 millioner, 6 milliarder, 10^{15} (en billiard) og 100.

DELING

Gange baklengs

Dele er å gange baklengs

$12 : 3$ betyr: Del 12 prikker i 3 like rader. Hvor mange blir det i hver rad?



Fire. Så $12 : 3 = 4$, og det stemmer fordi $4 \cdot 3 = 12$. Det er det samme som å spørre hvor mange treere det er i 12: $3 + 3 + 3 + 3 = 12$, altså fire. Å dele er å gange baklengs, og derfor kan du alltid sjekke et delestykke med gange.

Tell i hopp

$56 : 8$ spør: Hvor mange åttere er det i 56? Tell i åttere på fingrene til du kommer til 56:

tommelen på ledd	1	2	3	4	5	6	7
du sier	8	16	24	32	40	48	56

Tommelen står på ledd 7, så $56 : 8 = 7$. Noen ganger går det ikke opp: I 30 er det tre åttere (8, 16, 24), og så er det 6 til overs. Vi sier $30 : 8 = 3$ med rest 6. Sjekk: $3 \cdot 8 + 6 = 30$.

Del opp det du skal dele

$84 : 4$ ser vanskelig ut. Men $84 = 80 + 4$, og begge bitene er lette å dele på 4:

$$
\begin{aligned}
84 : 4 &= (80 + 4) : 4 && \text{del opp 84 i en pose} \\
&= 80 : 4 + 4 : 4 && \text{del alt i posen på 4} \\
&= 20 + 1 = 21
\end{aligned}
$$

Når du deler en pose, deler du alt i posen.

Velg biter som går opp:

$$96 : 8 = (80 + 16) : 8 = 10 + 2 = 12 \qquad 132 : 12 = (120 + 12) : 12 = 10 + 1 = 11$$

Dele med tierpotenser

Å dele med 10 tar vekk en null – eller flytter punktumet ett hakk til venstre: $3600 : 10 = 360$, og $36 : 10 = 3.6$. Deler du tierpotenser på hverandre, forsvinner tiere:

$$\begin{aligned} 10^6 : 10^3 &= (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) : (10 \cdot 10 \cdot 10) \\ &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

Tre av tierne går opp i de tre vi deler på, og det blir tre igjen. Vi trekker fra eksponentene: $6 - 3 = 3$.

Når du deler tierpotenser, trekker du fra eksponentene.

$$10^6 : 10^3 = 10^{6-3} = 10^3$$

Store delestykker

Istedenfor å stryke nuller deler du de små tallene for seg, og trekker fra eksponentene for seg:

$$\begin{aligned} 6\,000\,000 : 3000 &= (6 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^3) && \text{del opp begge} \\ &= (6 : 3) \cdot 10^{6-3} && \text{små tall for seg, eksponenter for seg} \\ &= 2 \cdot 10^3 \\ &= 2000 \end{aligned}$$

Det virker med desimaltall også:

$$8\,400\,000 : 2000 = (8.4 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^3) = 4.2 \cdot 10^3 = 4200$$

Sjekk med gange: $4200 \cdot 2000 = 8.4 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 8.4 \cdot 10^6$. Det stemmer!

Prøv selv

Sjekk svarene med gange.

1. $36 : 4$
2. $72 : 8$
3. $29 : 5$ (med rest)
4. $96 : 4$
5. $168 : 12$
6. $7000 : 10$
7. $10^8 : 10^5$
8. $800\,000 : 4000$
9. $9\,000\,000 : 300$
10. $4\,800\,000 : 1200$

Fasit: 9, 9, 5 med rest 4, 24, 14, 700, 10^3, 200, 30 000 og 4000.