

OPPGAVER TIL UKE 2-5

De første fire ukene i dette emnet handler om **flervariabel kalkulus**.¹ Vi skal begynne med funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Vi skriver

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

for den variabelen som skal inn i funksjonen og y for den variabelen som kommer ut, slik at

$$y = f(x).$$

I begynnelsen bør du tenke på f som et terreng og x som gps-koordinatene i punktet der du står. Funksjonsverdien $f(x)$ angir høyden over havet, mens x_1 er lengdegrad (altså hvor langt øst) og x_2 breddegrad (hvor langt nord).²

1 Et generelt førsteordens polynom gitt ved

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0.$$

der a_1 , a_2 og a_0 er konstante parametre. Grafen til denne blir alltid et plan i $\mathbb{R}^3$. Hva er normalvektoren til planet? Hvor skjærer planet y -aksen? Hvor skjærer det x -planet?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable_calculus

²Noen foretrekker å la koordinatene hete (x, y) og høyden over havet z og så skrive

$$z = f(x, y),$$

men viktige formler blir stort sett noe mer klønete å skrive ned på denne måten.

NIVÅKURVER

Den ideelle gasslov kan tenkes på som et andreordens polynom. Lover er en utledet regel i statistisk mekanikk,⁶ og sier at i en ideell gass følger trykket p , temperaturen T og volumet V formelen

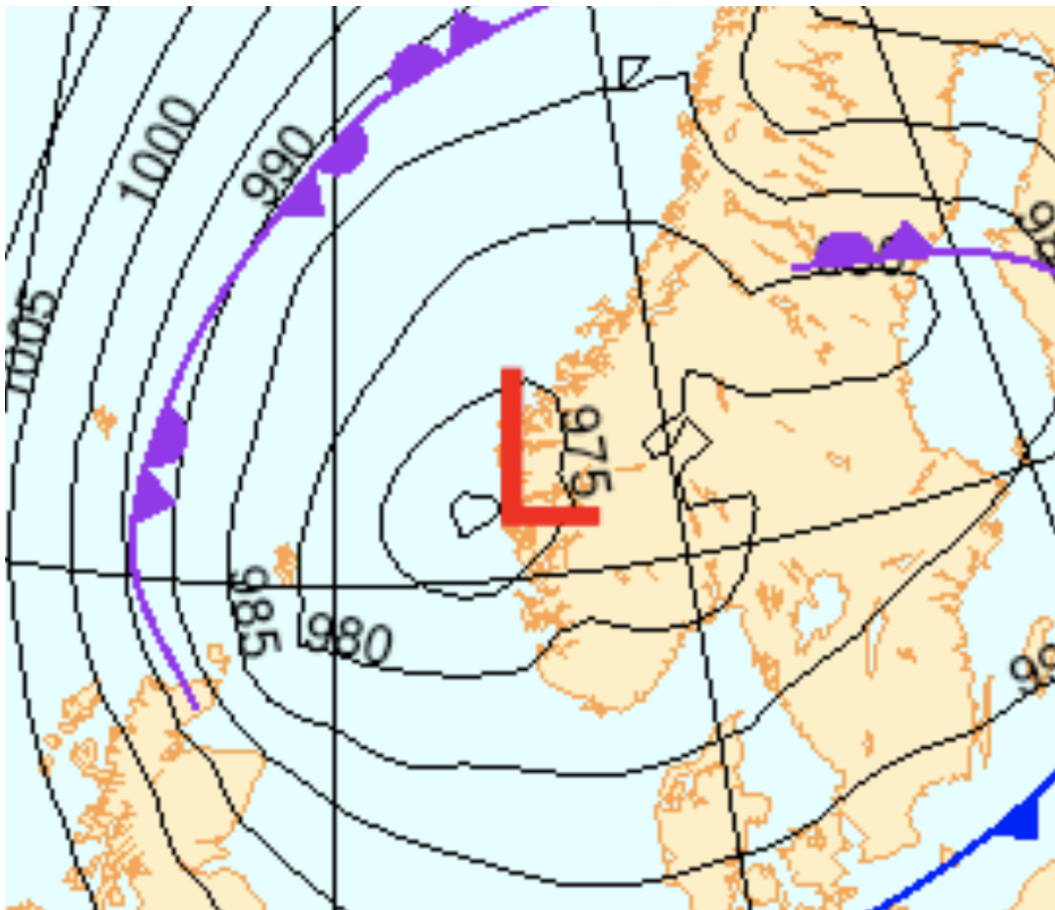
$$pV = NkT,$$

der $k = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmanns konstant⁷ og N er antall gassmolekyler.⁸ La oss for enkelhets skyld sette $Nk = 1$ og skrive den ideelle gasslov slik:

$$T = f(p, V) = pV$$

Siden både trykk og volum ikke kan være negative størrelser, er det naturlig å tenke at f er en funksjon fra $(0, \infty) \times (0, \infty)$ til $(0, \infty)$. I termodynamikk kalles nivåkurvene til T **isoterm**er siden T er konstant på dem.

- 4 Skisser isotermene til den ideelle gasslov, og plot $T(p, V)$ i python.
- 5 Nivåkurvene til trykk kalles **isobarer**. Hva er trykket på Steinkjer denne dagen?⁹



⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant

⁸Hvis man liker bedre statistisk mekanikk, kan man skrive

$$\frac{3}{2} \frac{pV}{N} = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} mv^2$$

der v er forventningsverdien til den χ -fordelte partikkelhastigheten.

https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution

⁹<https://www.met.no/vaer-og-klima/meteorologens-prognosekart>

GRADIENTEN

Vi har to uavhengige variable, og det er interessant å vite hvordan f endres med hensyn på begge. Derfor finnes det to deriverte. De er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

og uttales henholdsvis " f derivert med hensyn på x_1 og x_2 ". Å partiellderivere er enkelt; man finner $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ved å betrakte x_2 som en konstant, og så derivere i vei med hensyn på x_1 . Samme for x_2 . Finn de partiellderivate til

$$\boxed{6} \quad f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2.$$

$$\boxed{7} \quad T(p, V) = pV$$

Vi setter de partiellderivate sammen i enten en radvektor eller en søylevektor:

$$f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \quad \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Denne vektoren kalles **gradientvektoren**.^{10 11} Det er lettest å forstå gradientvektoren om man liker å gå på ski, for de partiellderivate angir stigningen i koordinatreningene.¹² Står du i et punkt og peker skiene rett øst er stigningen gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ og peker du dem rett nord er den gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x_2}$.

$\boxed{8}$ Finn gradientvektoren til funksjonene i oppgave 6 og 7.

Dersom du peker skiene i en annen retning enn øst eller nord, finner du stigningen ved å prikke gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen til skiene; dette kalles **retningsderivert**.¹³

$\boxed{9}$ Finn stigningen på fjellsiden $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ når du står i punktet $(1, 2)$ og skiene peker rett nordvest.

$\boxed{10}$ Hvilken vei må du peke skiene dersom du vil gå langs med en ekvidistanselinje? Hva om du vil kjøre rett utfor så bratt som mulig?

Hvis du skal peke skiene i en retning som maksimerer stigningen, må du peke den i samme retning som gradienten, siden stigningen er skalarproduktet mellom gradienten og retningen på skiene. Så evaluerer gradienten i et punkt i x -planet, får du altså både stigningen i koordinatreningene og den retningen i x -planet der stigningen er brattest.



¹⁰<https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>

¹¹OBS. Det er ikke alle tekster som er like nøye på å skille mellom gradienten som rad og gradienten som kolonne.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Del>

¹²Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tøys og tull. Ski er en kinesisk oppfinnelse:
<https://snl.no/ski>

<https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/>

<https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/>

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

Tangentplanet¹⁴ til f i a er analogt til tangentlinjen du lærte på skolen og har likning

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Husk at $f'(a)$ er en radvektor og $x - a$ en kolonnevektor, så $f'(a)(x - a)$ er et matriseprodukt.

10 Finn tangentplanene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \quad \text{og} \quad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

i punktet $(1, 1)^T$. Tangentplanenes nullnivåkurver skjærer hverandre i ett punkt. Hvilket?

KOMPLISERTE TING SOM IKKE ER PENSUM

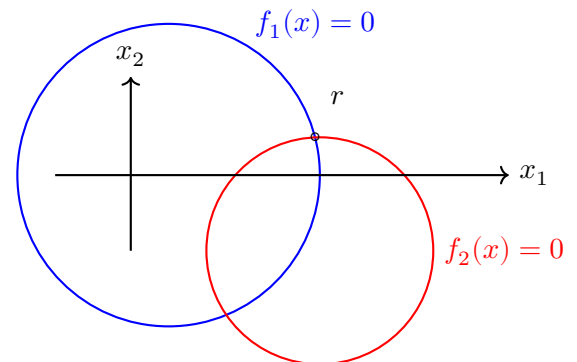
Har du skjønnet tangentplanene, har du i prinsippet alt som trengs for å forstå **Newtons metode**¹⁵

$$x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k)$$

for løsning av det ikkelineære likningssettet

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Her betyr x_k iterasjon k , altså en vektor i $\mathbb{R}^{2 \times 1}$.



13 Utled rekursjonen fra tangentplanformelen.

14 I oppgave 10 over regnet du faktisk ut et newtonsteg fra initialgjetningen $x_0 = (1, 1)^T$ når du fant skjæringspunktet mellom nullnivåkurvene til tangentplanene. Finn skjæringspunktene mellom sirklene numerisk.

15 Finn skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{og} \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 = 1.$$

¹⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent#Plane>

¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method#Multidimensional_formulations