46 - LF

La Ω være kulen sentrert i x og med radius r, og la z være parametrisering til kuleskallet.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\; dS\right) =& \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(x_1 + r\cos\theta\sin\phi, x_2 + r\sin\theta\sin\phi, x_3 + r\cos\phi)\sin\phi\; d\phi d\theta\right)\\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_1 + r\cos\theta\sin\phi, x_2 + r\sin\theta\sin\phi, x_3 + r\cos\phi)\sin\phi\; d\phi d\theta\\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \nabla u\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\sin\phi\; d\phi d\theta\\
=& \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\Omega} \nabla u\cdot dS = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\Omega} \nabla\cdot(\nabla u)\, dy = 0
\end{aligned}$$

Siden

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\; dS$$

er konstant som funksjon av r, kan vi ta

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\; dS = u(x)$$

Så er det bare å beregne

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} u\; dx =& \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(x_1 + s\cos\theta\sin\phi, x_2 + s\sin\theta\sin\phi, x_3 + s\cos\phi)\sin\phi\; d\phi d\theta ds\\
=& \int_0^r u(x)4\pi s^2\; ds = \frac{4\pi r^3}{3}u(x)
\end{aligned}$$