

4 - 1 - TRIPPELINTEGRALER

TMA4121 skal handle om de store partielle differensiallikningsmodellene som ligger i bønn for klassisk fysikk. F  r vi kan gå lø  s på dette, må vi ha noen versjoner av analysens fundamentalteorem i tre romlige variable, og f  r vi kan gjøre det, har vi et integral vi må ta unna - **trippelintegralet**¹. Vi integrerer $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ over et område $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, og vi tenker på f som massetetthet og på Ω utstrekningen til en ting du ønsker    finne den totale massen til. Fysikere skriver

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV$$

men matematikere liker bedre    skrive

$$\iiint_{\Omega} f(x) \, dx \quad \text{eller} \quad \iiint_{\Omega} f \quad \text{eller bare} \quad \int_{\Omega} f$$

Det enkleste er    integrere over en rektangulær boks, og integralene utføres fra innerst til ytterst slik som med dobbeltintegraler. La $f(x) = x_1^2 x_2 + x_3$.

1 Regn ut

$$\iiint_{\Omega} f(x) \, dx = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1.$$

Dersom f er massetetthet, hvordan tolkes det innerste integralet? Hva med de to innerste?

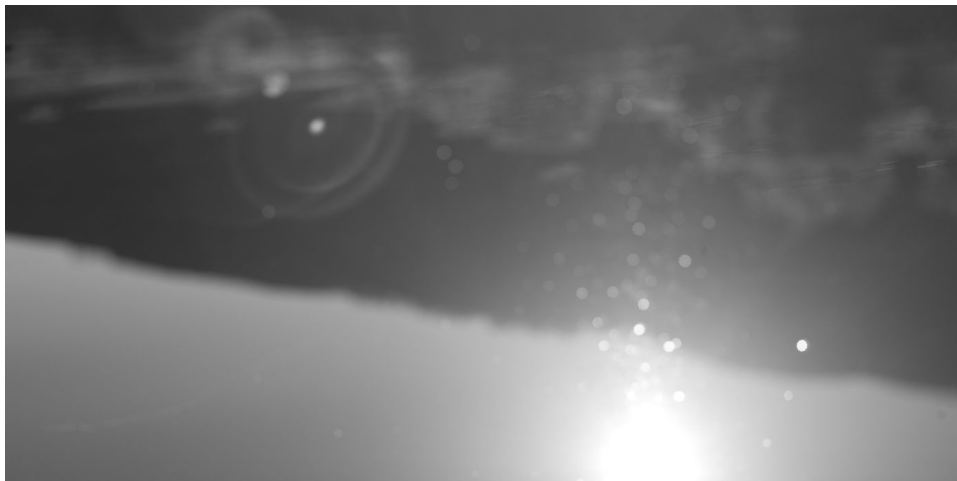
Forhåpentligvis ser du at integrasjonsrekkef  lgen kan gjøres på seks forskjellige måter.

2 Regn ut integralet på de fem andre m  tene.

Trippelintegraler blir hårete om integrasjonsdomenet er uggent. La oss prøve.

3 Gjenta n  r Ω er et tetraeder med hjørner i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$.

4 Hva om Ω er definert ved ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1 - |x_1| - |x_2|$?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Volume_integral

Hvis $\rho(x)$ er massetetthet i vekt per volum og Ω er en klump med masse, er trippelintegralet til ρ over Ω klumpens totale masse. Massesenteret er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) \, dx \end{pmatrix}$$

Dersom ρ er konstant, er massesenteret en geometrisk egenskap ved Ω som kalles **sentroiden**.²

- 5 Finn sentroidene til Ω i oppgave 3 og oppgave 4.

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene Ω som ikke er rektangulært, kan det fort bli noe svineri.

- 6 Sett opp formelen for massesenteret til en halv enhetskule i kartesiske koordinater.

Heldigvis finnes det koordinatskift. Trikset er det samme som for dobbeltintegraler - man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet Ω hvis definisjonsmengde D er en rektangulær boks eller noe annet enkelt, og så kompenserer man for volumendringen med parametriseringens jacobideterminant. La $g : D \rightarrow \Omega$ være en koordinatavbildning gitt ved $y = g(x)$. Volumet til Ω er

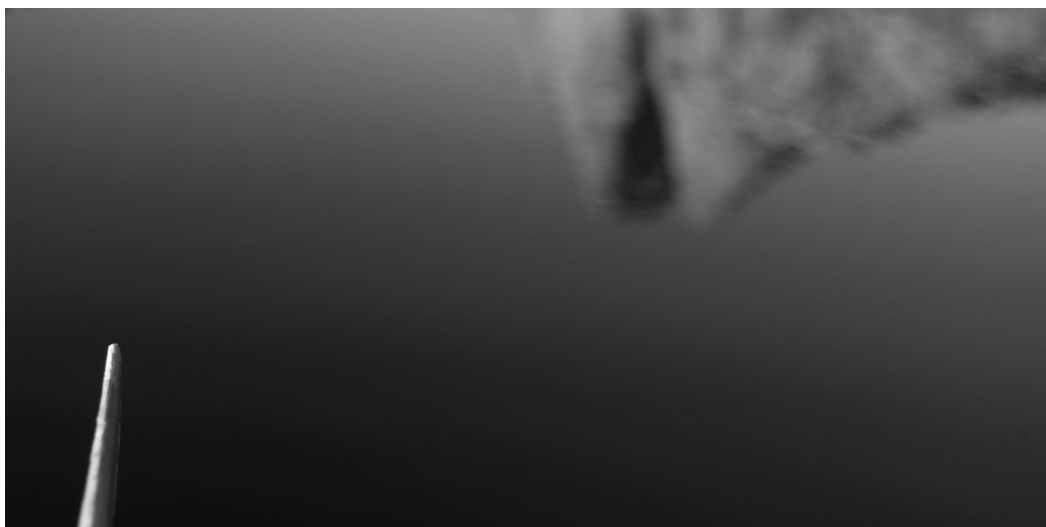
$$\int_{\Omega} 1 \, dy = \int_D |g'(x)| \, dx$$

der $|g'(x)|$ er determinanten til jacobimatrisen til g .

- 7 En koordinatavbildning $g : D \rightarrow \Omega$ er gitt ved

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Finn volumet av $g(D)$ dersom D er enhetskuben.



²https://en.wikipedia.org/wiki/Center_of_mass

Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z -aksen, bruker man **sylinderkoordinater**.³

$$x = g(s, \theta, z) = \begin{pmatrix} s \cos \theta \\ s \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Det er selvfølgelig ikke noe problem å legge sylindren parallell med de andre koordinataksene. Variabelen s er den samme som r i polarkoordinater, men på neste side trenger vi r til radien i tre dimensjoner, så det er bedre å bruke s .

8 Finn jacobideterminanten.

Jeg kunne bedt deg om å finne massesenteret til en sylinder som var kappet på langs eller noe sånt, men du har allerede funnet massesenteret til et kakestykke, så det er ikke nødvendig. Vi får heller ta noen klassikere fra TMA4105.

9 Regn ut

$$\iiint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx$$

der $\Omega = \{x : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9 \text{ og } 0 \leq x_3 \leq 5\}$.

10 Finn volumet av den delen av kjeglen

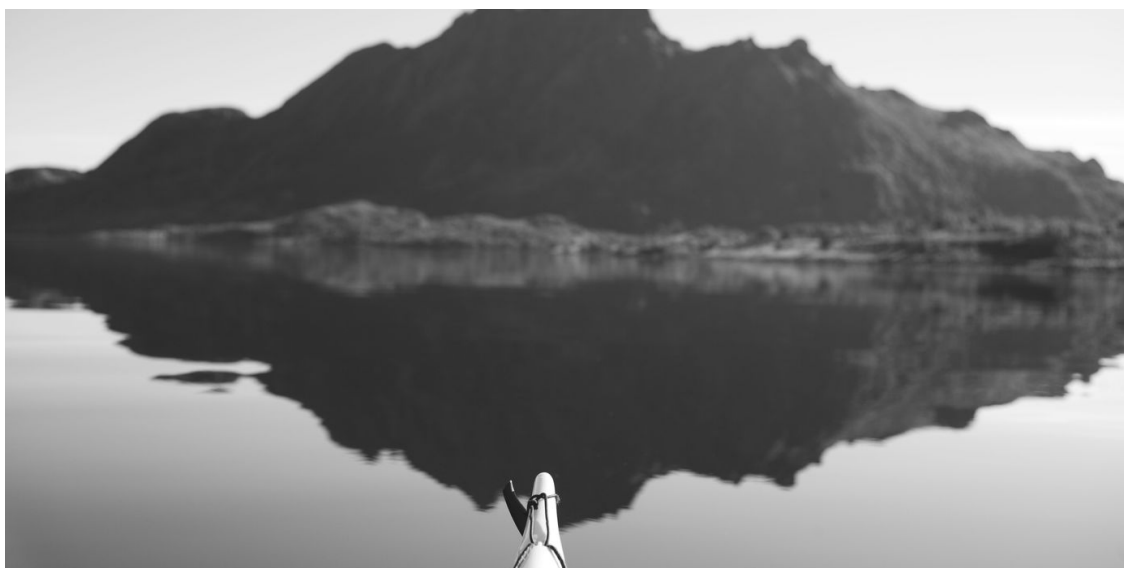
$$x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

11 Regn ut

$$\iiint_{\Omega} x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dx$$

der legemet Ω er gitt ved $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_2 \geq 0$.



³https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system

Den andre viktige transformasjonen er **kulekoordinater**:⁴

$$y = g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

Her er r avstanden til origo, θ vinkelen med x_1 -aksen (altså den samme som i polarkoordinater), og ϕ vinkelen med x_3 -aksen (altså en ny vinkel du antagelig ikke har sett før).

12 Finn jacobideterminanten.

13 Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

Også her får vi ta noen klassikere fra TMA4105.

15 La Ω være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 4$ samt planene $x_3 = 0$ og $x_3 = \sqrt{5}$. Regn ut volumet av Ω .

16 Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system

4 - 2 - NABLAOPERATOREN I

Jacobimatrisen til $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Fordelen med denne er at mange formler du lærte på skolen, for eksempel kjerneregelen

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$$

eller ettpunktsformelen

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

er identiske for funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ så lenge du tolker produktene som matriseprodukter.

Gradienten¹ til skalarfeltet $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skrives

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

og tar vi gradienten på $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mener vi den transponerte av jacobimatrisen. Nablasymbolet alene kalles en **operator**:²

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Fordelen med å tenke på nablaoperatoren som en operator er at den kan settes sammen med prikk- og kryssproduktet.

0 La $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Finn $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$.



¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>

²I funksjonalanalyse er de veldig opptatt av om operatoren er glatt.
(<https://www.youtube.com/watch?v=4TYv2PhG89A>).

Divergensen³ til et vektorfelt er sporet⁴ til jacobimatrisen:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Denne forteller oss noe om vektorfeltets ekspansjon i punktet x . **Rotasjonen**⁵ er:

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

I dette kurset skal vi bli bedre kjent med disse. Finn ∇f , $\nabla \cdot f$ og $\nabla \times f$ når $f(x)$ er

1 $(x_1, x_2, x_3)^T$.

2 $(x_2, x_3, x_1)^T$

3 $(x_3, x_1, x_2)^T$.

4 $(x_3, x_2, x_1)^T$.

5 den laminære vannstrømmen $(x_3, 0, 0)^T$

6 coulombfeltet.

I de klassiske fysikkmodellene dukker det gjerne opp kombinasjoner av gradient, divergens og rotasjon.

La $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Regn ut:

7 $\nabla \cdot (\nabla f)$

8 $\nabla \times (\nabla f)$

9 $\nabla(\nabla \cdot g)$

10 $\nabla \cdot (\nabla \times g)$

11 $\nabla \times (\nabla \times g)$

Den første av disse kjenner du fra før, nemlig **laplaceoperatoren**:

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

og dersom $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ skriver vi

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}.$$



³<https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence>

⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_\(linear_algebra\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Trace_(linear_algebra))

⁵[https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics))

I fysikk-literatur er det tre basiser for $\mathbb{R}^3$ som brukes jevnlig - den kartesiske du er vant til, samt **syylinderkoordinatbasisen** og **kulekoordinatbasisen**. Basisvektorene i de to siste peker i bestemte retninger knyttet til radiene og vinklene i de sylinder- og kulekoordinatsystemene, og de kan være litt forvirrende i starten siden basisvektorene endres etter hvor i $\mathbb{R}^3$ man befinner seg.⁶ Det finnes også mer avanserte koordinatsystemer, men de får ikke vi bruk for.⁷ I dette kurset skal vi bruke e med en subskript for å indikere forskjellige enhetsvektorer:

e_k : Standardbasiselement k i $\mathbb{R}^3$.

e_φ : Rett sør på en kuleflate sentert i origo.

e_θ : Rett øst på samme kuleflate.

e_r : Sett θ og φ og gå kulekoordinatradielt ut fra origo.

e_s : Sett θ og gå sylinderkoordinatradielt ut fra e_3 .

e_n : Normalvektor til en flate, utnormal om flaten er lukket.

- 12 Sett opp eksplisitte uttrykk for disse.
(Hint: Bruk jacobimatrissene til kule- og sylinderkoordinattransformasjonene.)

- 13 Fordelen med disse alternative basisene er at noen ting blir lettere å skrive opp. Skriv opp coulombfeltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

i kulekoordinatbasisen.

Det er praktisk med notasjon for alle disse vektorene, for vi får kompakt notasjon. For eksempel kan rotasjonen skrives

$$\nabla \times f = \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3)$$



⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_coordinate_system

Til slutt et viktig poeng om notasjon under koordinatskift. La oss ta det elektriske feltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

fra en punktladning som eksempel. Til nå har jeg slurvet litt og brukt bokstaven E både for den elektriske feltstyrken og for den matematiske funksjonen som gir den elektriske feltstyrken gitt x . Hvis vi er interessert i å finne hvordan E varierer med r , θ eller ϕ er det fristende å skrive

$$E(r, \theta, \phi) \quad \frac{\partial E}{\partial r} \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad \frac{\partial E}{\partial \phi}.$$

Men dette er litt skummelt, for strengt tatt er

$$E(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{r^2 + \theta^2 + \phi^2})^3} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

men det vi åpenbart er ute etter, er jo

$$E(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

som er noe helt annet. Det helt klart ryddigste er å reservere E til den elektriske feltstyrken, som er en målbar fysisk størrelse, og så bruke egne bokstaver for de forskjellige matematiske funksjonene:

$$E = f(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} \quad E = f(g(r, \theta, \phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

Dette gjøres nesten aldri i praksis, og i en fysikkbok vil det typisk bare stå

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} \quad \frac{\partial E}{\partial x_3} \quad \frac{\partial E}{\partial r} \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} \quad \frac{\partial E}{\partial \phi}$$

om hverandre. Dette er nok én av hovedgrunnene til at elmag og termo og annen fysikk med flere uavhengige variable er vanskelig å forstå i starten. I termo kan de fint skrive både

$$U = U(S, V) \quad \text{og så plutselig} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_p$$

på neste linje. Det glade vanvidd spør du meg. Men skulle man alltid vært nøye på å gi de forskjellige funksjonene hver sin bokstav hadde det også blitt forferdelig mange bokstaver å holde styr på, så derfor har man endt opp med å bruke samme bokstav til både den fysiske størrelsen og virvaret av funksjoner mellom den og andre fysiske størrelser. Dette er viktig å vite om i starten, slik at man kan holde tungen beint i munnen. La oss ta en treningsoppgave.

14 Du har tidligere funnet

$$E'(x) = \left(\frac{\partial E}{\partial x_1}, \frac{\partial E}{\partial x_2}, \frac{\partial E}{\partial x_3} \right).$$

Finn

$$E'(r, \theta, \phi) = \left(\frac{\partial E}{\partial r}, \frac{\partial E}{\partial \theta}, \frac{\partial E}{\partial \phi} \right).$$

Nå har jeg bevisst misbrukt notasjon. Bruk kjerneregelen på

$$E = h(r, \theta, \phi) = f(g(r, \theta, \phi)).$$

der g er kulekoordinatfunksjonen. Sett også inn og ta det på direkten og dobbeltsjekk svaret.

4 - 3 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM IV

Hvis du slår opp i en typisk formelsamling, ¹ vil du finne uttrykket

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial f}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

for laplaceoperatoren i polarkoordinater. Vi utledet denne i TMA4111 og det er for å sitere min svigerfar "en helvetes prosedyre" - antagelig har du fortrenget det. Å utlede den tilsvarende formelen

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)$$

i kulekoordinater er selvfølgelig enda verre. Med mindre du kan noen lure triks. La f være et skalarfelt. Vi skriver

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla_v f(x) = v \cdot \nabla f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

for den retningsderiverte i retningen gitt av enhetsvektoren v .²

1 Deriver

$$h(r, \theta, \varphi) = f(g(r, \theta, \varphi)),$$

og utled at

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial e_r} \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial e_\theta} \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = r \frac{\partial f}{\partial e_\varphi}$$

og at

$$\nabla f = \left(e_r \quad \frac{1}{r \sin \varphi} e_\theta \quad \frac{1}{r} e_\varphi \right) \nabla h.$$



¹For eksempel her: https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates

²Se her for andre skrivemåter: https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

Hvis du slår opp i en typisk formelsamling, står gradienten i kulekoordinater skrevet slik:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} e_\varphi$$

Dette er samme typen slurv som beskrevet på tampen av forrige økt, men vanlig notasjon, og selvfølgelig ok dersom man vet hva man driver med. Oppgaven utleder det samme, men på en ryddigere måte. Nå skal vi gå videre og gjøre det samme for divergensen til et vektorfelt, men da skal vi angripe det litt annerledes. Et sentralt verktøy i klassisk fysikk er **kontrollvolumet**.³ Dette er et fiktivt volum som er bitte lite og som brukes til å utlede relasjoner på integral- eller differensialform i flervariabel kalkulus. Vi skal introdusere tankegangen gjennom å skrive opp den korrekte definisjonen av divergens. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ med volum $|\Omega|$ og f et vektorfelt. Divergensen til f er:

$$\nabla \cdot f = \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

Her er det underforstått at $\nabla \cdot f$ på venstre side er evaluert i det punktet x som Ω skrumper inn til. Fra definisjonen ser vi tydelig at divergens er **utstrømning per volum**.

2] Bruk definisjonen og et kontrollvolum til å utlede at

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

i kartesiske koordinater.

La oss nå si at du har et vektorfelt f som er gitt i kulekoordinatbasen:

$$f = f_r e_r + f_\theta e_\theta + f_\varphi e_\varphi.$$

Her betyr f_r vektorfeltets komponent i retningen e_r , og komponentene er funksjoner av (r, θ, φ) , og det er underforstått at

$$f_r = f(g(r, \theta, \varphi)) \cdot e_r(r, \theta, \varphi) \quad f_\theta = f(g(r, \theta, \varphi)) \cdot e_\theta(r, \theta, \varphi) \quad f_\varphi = f(g(r, \theta, \varphi)) \cdot e_\varphi(r, \theta, \varphi).$$

Divergensen i kulekoordinater er gitt ved

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f_\varphi \sin \varphi) \right)$$

Denne kan også utledes fra kjerneregelen ved å ta sporet til jacobimatrisen i kulekoordinater, men det er mye mer arbeid.

3] Utled uttrykket for divergensen i kulekoordinater ved å se på et rektangulært kontrollvolum i (r, θ, φ) .

4] Nå kan du få tak i laplaceoperatoren i kulekoordinater for $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ved å huske at

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f.$$

5] Utled uttrykket for divergensen i sylinderkoordinater.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Control_volume

Analysens fundamentalteorem kommer i mange varianter. Vi har lært fem stykker, og alle fem relaterer hva en funksjon gjør på randen av et område til hva funksjonens deriverte gjør inne på området. Den første

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

lærte du på gymnasen - her er bare $[a, b]$ et intervall på $\mathbb{R}$ og f en deriverbar funksjon. Den neste

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot ds = f(x(b)) - f(x(a))$$

sier at arbeidet et konservativt kraftfelt ∇f gjør på en partikkel som reiser langs Γ parametrisert ved $x(t)$ kun avhenger av potensialet f i endepunktene $x(b)$ og $x(a)$. De tre siste er alle varianter av Greens teorem:

$$\iint_{\Omega} \nabla \times f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds \quad \iint_{\Omega} \nabla \cdot f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, ds \quad \iint_{\Omega} \Delta f \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial e_n} \, ds$$

og disse sier noe om forholdet mellom verdiene til jacobimatrisen til f inne på $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ og verdiene til f på $\partial\Omega$. Når man setter opp differensiallikningsmodeller i fysikk, er det en vanlig strategi å relatere det som skjer inne på Ω til hva som skjer på $\partial\Omega$, og det er i forbindelse med dette at analysens fundamentalteorem kommer til nytte. Dette har vi sett konturene av når vi har utledet bølge- og varmelikningen, men i TMA4121 skal vi dra dette mye lenger og herje vilt i tre romlige dimensjoner - derfor trenger vi et par versjoner til av analysens fundamentalteorem. Kontrollvolumideen brukes også til å utlede en tredimensjonal variant av analysens fundamentalteorem som kalles **divergensteoremet**.⁴ Denne er analog til den midterste versjonen av Greens teorem over. La $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ og anta $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er glatt og alt det der, da er

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot f = \iint_{\partial\Omega} f \cdot dS.$$

Dette utsagnet sier at f sin netto utstrømning fra Ω skal være lik f sin ekspansjon inne på Ω .

6 Gjenta oppgave 4 fra økt 3-9 i tre dimensjoner.

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem

TMA4101/4106/4111/4121



Den viktigste anvendelsen er at den lar oss sjonglere mellom fysiske lover på integral- og differensialform - dette kommer vi tilbake til. La oss først ta noen klassikere fra TMA4105 sånn mest for kosens skyld. Disse er designet for å teste om en typisk sivingstudent har skjønnet divergensteoremet.⁵

- 7 La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av paraboloidene

$$x_3 = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \quad \text{og} \quad x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

og la Γ betegne skjæringskurven mellom disse to paraboloidene. La vektorfeltet $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)$$

og regn ut

$$\iint_{\partial T} f \cdot dS$$

der ∂T er randen til T og enhetsnormalen N peker ut fra T .

- 8 La T være området i $\mathbb{R}^3$ begrenset av flatene $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 7}$, $x_3 = 0$ og $x_3 = 2$. La vektorfeltet $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, x_3 + 1).$$

Hva er fluksen ut av den krumme delen til randen til T ?

Å utlede divergensteoremet er noe for hardt for oss, men sett fra et fysikkperspektiv er det nesten innlysende. Masse kan ikke forsvinne eller oppstå og hva som går ut av $\partial\Omega$ må stå i forhold til ekspansjonen inne på Ω . Fra divergensteoremet følger en del andre nyttige formler vi kommer til å få bruk for. La e_{nk} være komponent k i enhetsnormalvektoren ut av $\partial\Omega$ og anta at $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er en glatt funksjon og la $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ være et enkeltssammenhengende område med glatt rand. Bruk divergensteoremet til å utlede⁶

9
$$\iiint_{\Omega} \Delta u \, dx = \iint_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

10 gaussgreenteoremet
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \iint_{\partial\Omega} u e_{nk} \, dS$$

11 den lille delvisintegrasjonsformelen
$$\iiint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} + \iiint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} = \iint_{\partial\Omega} u v e_{nk} \, dS$$

12 den store delvisintegrasjonsformelen
$$\iiint_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \iint_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot dS$$

13 enda en formel
$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v \, dx = \iint_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot dS$$

⁵I praksis tester den ikke det, men heller om en sivingstudent har trent masse på en bestemt type regneoppgave som er designet for å teste om en sivingstudent har skjønnet divergensteoremet. Jf. Goodharts lov: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7901608/>

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Green%27s_identities

4 - 4 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM V

For å forstå rotasjonen til et vektorfelt, kan det være gunstig å ha litt peiling på hva som skjer med ting som opplever rotasjon.

- 1 En partikkel reiser langs en sirkulær trajektorie $x(t) = e_1 r \cos \theta(t) + e_2 r \sin \theta(t)$ og påvirkes av kraften F . Sett opp arbeidet mellom to punkter på trajektorien. Dersom du gjør det riktig, skal du få en integrand som er lengden av kryssproduktet mellom to størrelser.

Størrelsen

$$\tau = x \times F$$

kalles **dreiemomentet** til F om x .¹ Dersom en partikkel reiser langs en sirkulær trajektorie i tre dimensjoner, kan du med litt mer komplisert regning utlede at den tilsvarende størrelsen er

$$\tau = x \times F \cdot y$$

der y er en enhetsvektor som indikerer rotasjonsaksen. Bevegelsesmengde er $p = mv$. **Dreieimpulsen** er²

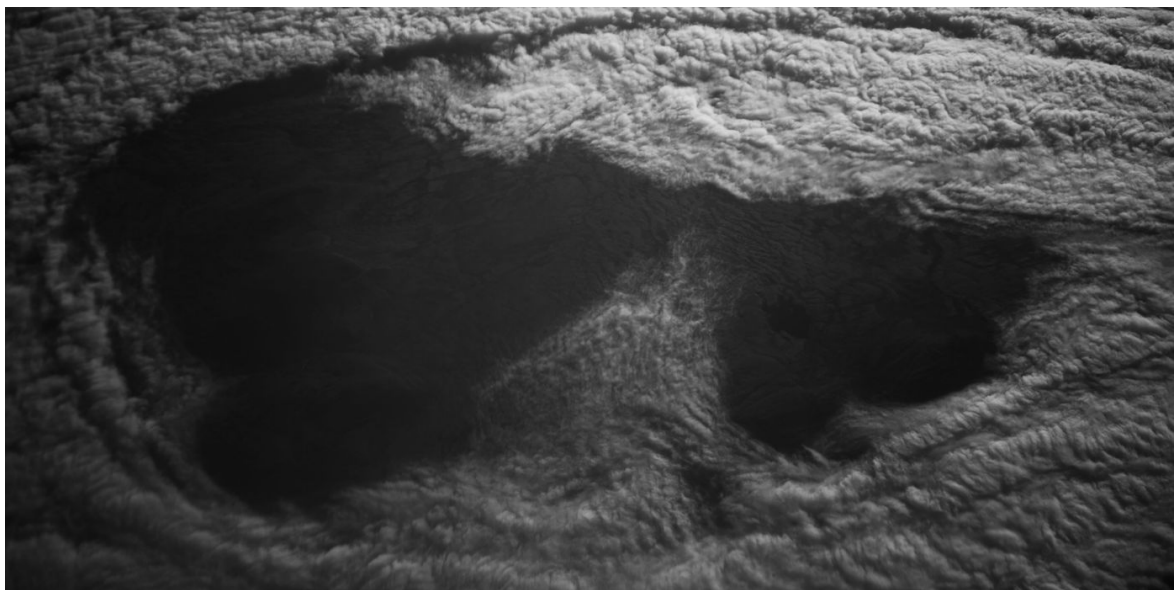
$$L = x \times p.$$

- 2 Vis at dreieimpulsen for partikkelen over er gitt ved $mr^2\dot{\theta}e_3$.

Newtons andre lov er $F = \dot{p}$ og versjonen for angulært moment lyder slik:

$$\tau = \dot{L}$$

- 3 Utled og forklar hvorfor en snurrende kunstsøyteløper spinner forttere om vedkommende fordeler massen sin tettere på rotasjonsaksen.



¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Torque>

²https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum

Nå kan vi gå litt videre og se på en roterende skive, for eksempel kappeskiven på en vinkelsliper eller sagbladet på en sirkelsag. La oss si at origo sitter fast i rommet og i sentrum av den roterende skiven. Skiven roterer med vinkelhastigheten ω og har radius r .

- 4 Sett opp en funksjon som beskriver hastigheten på hvert punkt på skiven, både i kartesiske koordinater og i polarkoordinater. Hva er rotasjonen?

Den vanlige tolkningen av oppgaven over er noe sånt som at dersom du slipper en liten kork ned i hastighetsfeltet f , vil den rotere med hastigheten $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times f$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for denne størrelsen, men på engelsk kalles den "rotation". Det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl". La oss nå beregne rotasjonen til noen andre hastighetsfelter:

5 $f(s, \theta) = se_\theta$ 6 $f(s, \theta) = e_\theta$ 7 $f(s, \theta) = e_\theta/s$ 8 $f(s, \theta) = e_\theta/s^2$

På samme måte som for divergensen, kan vi sette opp en teknisk vanskeligere men mer intuitiv definisjon av rotasjonen til et vektorfelt. La Σ være en plan flate i $\mathbb{R}^3$ med areal $|\Sigma|$ og enhetsnormal vektor v og la f være et vektorfelt. rotasjonen til f langs v i punktet Σ skrumper inn til er

$$(\nabla \times f) \cdot v = \lim_{|\Sigma| \rightarrow 0} \frac{1}{|\Sigma|} \oint_{\partial \Sigma} f \cdot ds.$$

- 9 Bruk kontrollvolumtankegangen til å utlede at

$$\nabla \times f = e_1 \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) + e_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) + e_3 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

Kontrollvolumtankegangen kan brukes til å utlede uttrykk for rotasjonen i kule- og sylinderkoordinater. Hvis du syntes det var klønete å konvertere til kartesiske koordinater i oppgave 5-8, vil du kanskje sette pris på disse formlene. Her er rotasjon i sylinderkoordinater:

$$\nabla \times f = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z} \right) e_s + \left(\frac{\partial f_s}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial s} \right) e_\theta + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial s f_\theta}{\partial s} - \frac{\partial f_s}{\partial \theta} \right) e_z$$

- 10 Gjør 5-8 på nytt i sylinderkoordinater dersom du ikke gjorde det i stad.

Merk ellers at når vi sier at vektorfeltet er gitt i "sylinderkoordinater", betyr dette både at de uavhengige variablene er (s, θ, z) , altså at vi har laget en funksjon h på formen

$$h(s, \theta, z) = f(g(s, \theta, z))$$

der g er sylinderkoordinattransformasjonen, men det betyr også at vektorfeltet er dekomponert i sylinderkoordinatbasisen:

$$f = f_s e_s + f_\theta e_\theta + f_z e_z$$

og ikke i standardbasisen. Det er ingenting prinsipielt i veien for å la de uavhengige variablene være (s, θ, z) , men dekomponere f i standardbasisen:

$$h(s, \theta, z) = h_1(s, \theta, z) e_1 + h_2(s, \theta, z) e_2 + h_3(s, \theta, z) e_3$$

men dette er ikke så vanlig.

I økt 4-2 lærte vi at divergensen til rotasjonen er null og at rotasjonen til gradienten er null:

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0 \qquad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

De motsatte implikasjonene holder også under noen milde betingelser. La f være et glatt vektorfelt. Da impliserer

$$\nabla \cdot f = 0 \qquad \text{at} \qquad f = \nabla \times g$$

for et vektorfelt g , og

$$\nabla \times f = 0 \qquad \text{at} \qquad f = \nabla h$$

for et skalarfelt h . Disse kalles henholdsvis **vektorpotensialet** og **skalarpotensialet**. Dersom $\nabla \times f = 0$ sier vi at f er **rotasjonsfritt**, og dersom $\nabla \cdot f = 0$ sier vi at f er **divergensfritt**.

- 11 Finn skalar- og/eller vektorpotensialer til vektorfeltene i de foregående øktene. Hva skjer om f er både rotasjonsfritt og divergensfritt?

Den første varianten av Greens teorem generaliseres til noe som kalles **Stokes teorem**.³ La Σ være en flate i rommet, med randkurve $\partial\Sigma$, og f er glatt og så videre:

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

Dette er også en generalisering av analysens fundamentalteorem, og sier at arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt $\partial\Sigma$ er det samme som fluksen til rotasjonen til f gjennom Σ . Akkurat som med divergensteoremet bruker vi Stokes' teorem primært til å håndtere overgangen mellom fysiske lover på differensial- og integralform. Men la oss også her ta noen goodhartklassikere fra TMA4105.

- 12 La $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ være begrenset av paraboloidene $x_3 = x_1^2 + (x_2 + 1)^2$ og $x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$. La Γ betegne skjæringskurven mellom dem og la $f(x) = (x_1 + x_2, x_2 - x_1, x_1^2 + x_2^2)^T$. Regn ut

$$\oint_{\Gamma} f \cdot ds$$

der Γ er orientert mot klokken sett ovenfra.

- 13 La Σ være den delen av ellipsoideskallet $x_1^2 + x_2^2 + 8(x_3 - 1)^2 = 9$ hvor $x_3 \geq 0$, og la vektorfeltet $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$f(x) = (x_1 x_3 - 5x_2 \cos x_3, 5x_1 e^{x_3}, 6x_1 x_2 e^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

Regn ut $\iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$ når Σ har normalvektor som peker oppover.

- 14 Hvordan kan du se at rotasjonsfrihet impliserer at f er konservativt?

- 15 Det er noen flater som ikke går å bruke Stokes' teorem på. Finn en slik.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'_theorem

Til slutt litt om integraltegn. Jeg har skrevet divergensteoremet slik:

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot f = \oint_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

og Stokes' teorem slik:

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \iint_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

I begge disse likningene er det en del overflødig notasjon. Dersom vi har spesifisert Ω og Σ , er det ikke egentlig nødvendig med sirklene på linje- og fluksintegralene, og det er egentlig ikke nødvendig med doble og triple integraltegn, for vi vet at Ω er et område i $\mathbb{R}^3$ og at Σ er en flate i $\mathbb{R}^3$. Her er en litt mer minimalistisk notasjon:

- Arbeid: $\int_{\Gamma} g \cdot ds$
- Fluksintegral: $\int_{\Sigma} g \cdot dS$
- Flateintegral: $\int_{\Sigma} f \, dS$
- Trippelintegral: $\int_{\Omega} f \, dx$

Denne notasjonen er vanlig i avansert faglitteratur, og ser du nøye på integralene, ser du at de er *akkurat* forskjellige nok til at du vet hva som er hva, så lenge du vet at Ω er et område i $\mathbb{R}^3$, at Σ er en flate i $\mathbb{R}^3$ og at Γ er en kurve i $\mathbb{R}^3$. At $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ er implisert hvis du vet hva integralene betyr.

16 Skriv divergensteoremet og Stokes' teorem med denne notasjonen.

Synes du dette er gøy, kan du sjekke ut **generalisert stokes**⁴ og **ytredrivert**.⁵



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Stokes_theorem

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Exterior_derivative

4 - 5 - ELEKTROMAGNETISME

Matematisk sett er det ikke forskjell på posisjonen $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ og tiden t , men vi må skille dem på grunn av fysikken. For å indikere tidsderivert, kommer jeg til å bruke den gode gamle newtonprikk

$$\dot{f}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}$$

og ∇ -operatoren tar vi kun på de romlige koordinatene.

0 La $f(x, t) = x_1 x_2 + x_3 t$. Finn $\dot{f}$ og ∇f .

James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme.¹ Han formulerte det som noen og tyve forskjellige regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til dette inhomogene differensiallikningssystemet noen år etter Maxwells originale publisasjon:

Gauss' lov: $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Gauss' lov for magnetisme: $\nabla \cdot B = 0$

Faradays lov: $\nabla \times E = -\dot{B}$

Amperes lov: $c^2 \nabla \times B = \dot{E} + \frac{J}{\epsilon_0}$

De elektriske og magnetiske feltene er ukjente funksjoner fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$ (feltstyrke), Ω er et område i $\mathbb{R}^3$ med rand $\partial\Omega$, og Σ er en flate i $\mathbb{R}^3$ med randkurve $\partial\Sigma$. Ladningstettheten er en gitt funksjon fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}$, mens strømtettheten går fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$.

Det elektriske feltet E og **det magnetiske feltet** B er de ukjente, mens **ladningstettheten** ρ og **strømtettheten** J er gitte funksjoner. Permittiviteten i vakuum ϵ_0 kjenner vi fra før, og c er lyshastigheten i vakuum. Vi skal utlede forskjellige konsekvenser av Maxwells lover. La oss begynne med en viktig anvendelse av teoremene vi har lært i begynnelsen av semesteret.

1 La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$ og Σ en flate i $\mathbb{R}^3$. Utled Maxwells lover på integralform:

$$\int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\int_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} B \cdot dS$$

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} E \cdot dS$$

Hvis du ikke har vendt deg til den nye minimalistiske notasjonen for kurve-, flate- og trippelintegraler, kan du skrive Maxwells lover slik:

$$\iiint_{\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\iiint_{\Omega} B \cdot dS = 0$$

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS$$

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

Det er en god strategi å alltid starte med å gjøre så mange forenklinger som mulig når man skal studere noe nytt og komplisert. I elmag pleier man å begynne med to forenklende antakelser for å komme igang. Den første er at feltene er **statiske**, altså at de ikke avhenger av t :

$$\dot{E} = 0 \qquad \dot{B} = 0$$

Den andre antagelsen er at vi er i **tomt rom**, altså ingen ladnings- eller strømtetthet:

$$\rho = 0 \qquad J = 0$$

La oss anta statiske felter men ikke tomt rom. Da får vi et dekket likningssett:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= 0 & c^2 \nabla \times B &= \frac{J}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Studiet av de to likningene for E kalles **elektrostatikk**,² mens studiet av de to for B kalles **magnetostatikk**.³ Det elektriske feltet er et sirkulasjonsfritt vektorfelt med en gitt divergens, mens magnetfeltet er et divergensfritt felt med en gitt sirkulasjon. La oss begynne med E .

- 3 Forklar at det elektriske feltet er konservativt og at potensialet tilfredsstiller Poissons likning.

Det er faktisk slik at Gauss' lov og antagelsen om sfærisk symmetri impliserer Coulombs uttrykk for det elektriske feltet fra en punktladning.

- 4 Utlede at feltstyrken til en punktladning må gå som $1/r^2$ fra Gauss' lov på integralform.

Nå ser vi litt på B . Dette er noe mer komplisert. Så vidt man vet, finnes det ingen magnetisk monopol,⁴ altså ingen magnetisk punktladning.

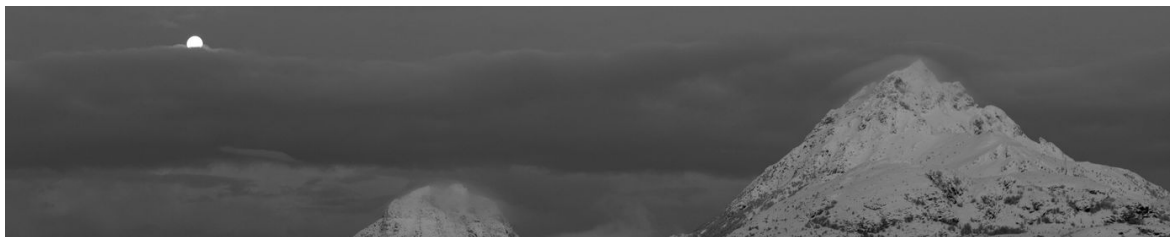
- 5 Vis dette.

På samme måte som for den elektriske punktladningen, kan vi utlede at den magnetiske feltstyrken rundt en lang strømførende ledning med konstant strømstyrke må gå som $1/s$.

- 6 Vis dette ut fra Amperes lov på integralform og antagelsen om radiell symmetri.

Elektrostatiske felter er harmoniske funksjoner i tomt rom. En liknende påstand er sann for magnetostatiske felter, men det er litt mer komplisert siden det er divergensen og ikke sirkulasjonen som er null.

- 7 Vis at B har divergensfritt vektorpotensiale der komponentene tilfredsstiller Poissons likning.



²<https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics>

³<https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetostatics>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_monopole

Så vidt jeg vet var det omtrent slik Maxwell oppdaget at synlig lys er elektromagnetiske bølger. Han visste ikke i utgangspunktet at c var lyshastigheten i disse likningene, men eksperimentelle målinger gav verdier som lå påfallende nært til lyshastigheten.⁵ La oss nå skru på tomt rom, men av antagelsen om statiske felter:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0 & \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\dot{B} & c^2 \nabla \times B &= \dot{E}\end{aligned}$$

Tar vi laplaceoperatoren på et vektorfelt, mener vi på hver komponent slik: $\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$

[8] Utled bølgelikningene $\ddot{E} = c^2 \Delta E$ og $\ddot{B} = c^2 \Delta B$.

Når man skal overføre elektrisk energi med høy frekvens er det upraktisk å bruke ledninger, for man søler den elektriske energien ut i rommet og så lages det returstrømmer og fandens oldemor. Derfor er det vanlig å overføre elektrisk energi på høy frekvens gjennom hule kanaler med stående elektriske bølger. Disse kalles **bølgeledere**.⁶ I populærvitenskapelige fremstillinger av elektromagnetiske bølger er E - og B - feltene tegnet som ortogonale på hverandre og på propagasjonsretningen. Dette gjelder kun i tomt rom.

[9] Vis at dersom bølgefunksjonene $E(x, t) = E_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ og $B(x, t) = B_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ skal tilfredsstille Maxwells likninger, må de konstante vektorene E_0 , B_0 og k være innbyrdes ortogonale.

Forresten er Maxwells lover et overbestemt system - to av likningene er overflødige.

[10] Hvilke? Hvorfor?

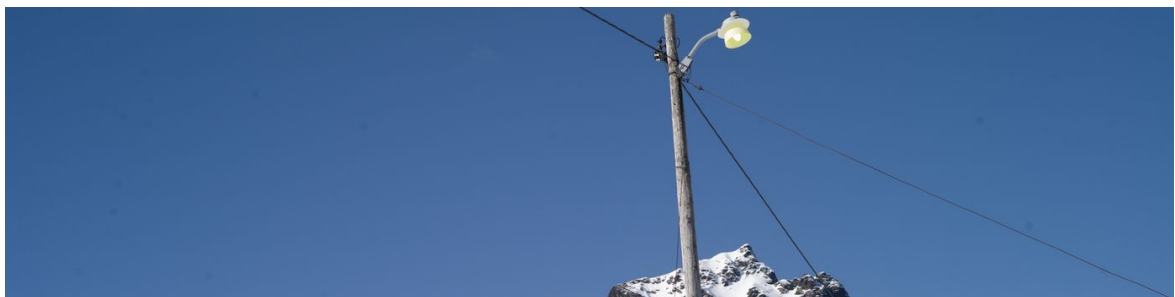
Kraften på en partikkel med ladning q som reiser med farten v er

$$F = q(E + v \times B).$$

Dette uttrykket kalles **Lorentzkraften**.⁷

[11] Vis at det magnetiske feltet aldri kan gjøre arbeid på en partikkel.

Rosinen i pølsen hadde nå vært å utlede elementlovene for spole- og kondensator fra Maxwells lover, men jeg har ikke funnet noen enkel måte å gjøre det på - det er en del arbeid med å vise at det ikke kan være elektriske felter inni perfekte ledere og sånne ting. Så det får vi la ligge.



⁵Første gang målt av Ole Rømer ved å studere rare avvik i tabellene for når Jupiters måner kommer ut av Jupiters skygge.

⁶Se her: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html

Du kan faktisk lage en kondensator av en hul sylinder: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_23.html

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force

4 - 6 - LAPLACEOPERATOREN II

Coulomb oppdaget at det elektriske feltet fra en statisk punktladning q plassert i origo er

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mens Maxwells lover for elektrostatikk sier at

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times E = 0.$$

Alt dette er oppdaget eksperimentelt og kan så vidt vi vet ikke utledes fra mer grunnleggende prinsipper. Men om du starter elektrostatikken med Maxwell eller Coulomb er irrelevant for en fysiker. Nå skal vi se på hvorfor.

- 1 Det første man gjør med harmoniske funksjoner er å finne alle harmoniske funksjoner på $\mathbb{R}^3$ som kun avhenger av kulekoordinatradien r . Dette kan du gjøre ved å løse

$$\Delta u = 0$$

i kulekoordinater og anta

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

Gjorde du det riktig, fant du noe som kalles **fundamentalløsningen** til Laplaces likning. Du kjenner denne godt fra før. Kulekoordinatene er jo litt annerledes i og med at om du setter $r = 0$ kan θ og φ være hva som helst. Dette gir av og til utslag i rare subtiliteter når vi bruker dem.

- 2 Forklar at det du egentlig fant i forrige oppgave, var løsningen til

$$-\Delta u = \delta$$

der δ er diracpulsen, og foreslå en formel for løsningen til Poissons likning

$$\Delta u = -f.$$



Fundamentalløsningen vi fant på forrige side er (opp til konstanter) den eneste harmoniske funksjonen på $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ som kun avhenger av r . Men det finnes mange andre harmoniske funksjoner på $\mathbb{R}^3$, for eksempel

$$u(x) = x_1^2 - x_2^2$$

eller

$$v(x) = x_1 x_2$$

så likningen $\Delta u = 0$ i seg selv har ikke entydig løsning på $\mathbb{R}^3$. Men strekker du et trommeskinn over en ramme er det klart at det finnes bare én fysisk løsning, og spesifiserer du temperaturen på kanten av et område og lar tiden gå til varmeklyten er stasjonær, er det én temperaturfordeling som er korrekt. Dette er eksempler på noe som kalles **dirichletproblemer**, og de ser ut som følger. La Ω være et område i $\mathbb{R}^n$, og la $\partial\Omega$ være randen. Trommeskinnet eller varmeklyten er en funksjon u som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{på } \Omega \\ u &= g && \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

- 3 Nå kan vi vise entydighet.
(Hint: Anta det finnes to løsninger. Hva slags randverdi problem løser differansen?)

For en harmonisk funksjon er fluksen til gradientfeltet ut av et vilkårlig område alltid null.

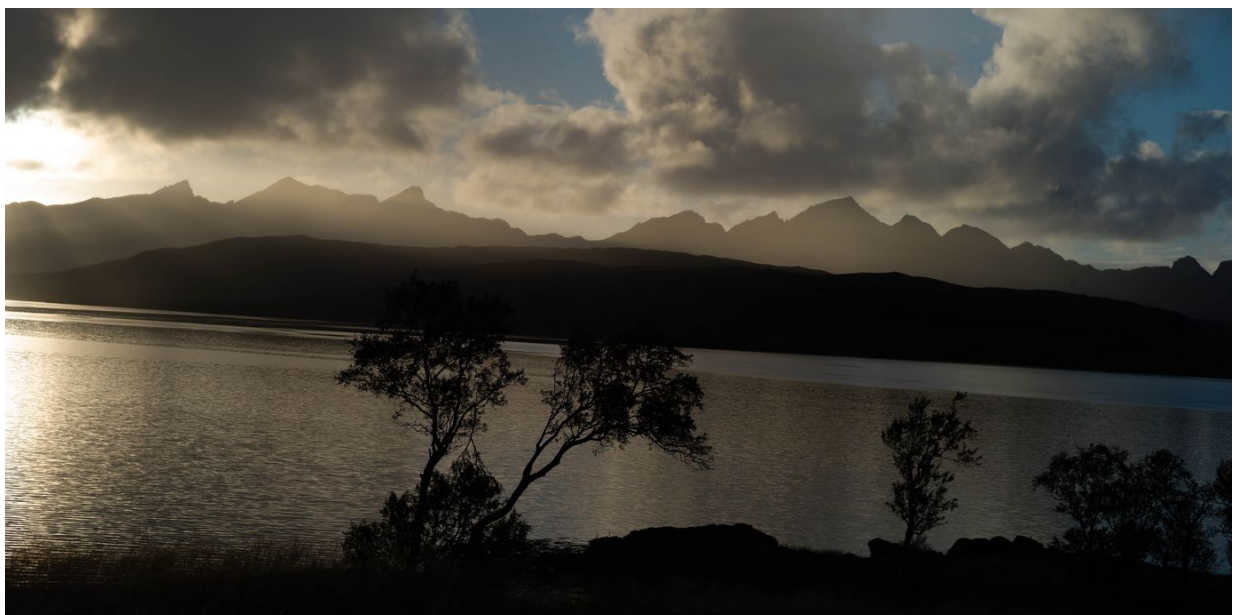
- 4 Vis dette.

Det er også sann at av alle funksjoner som tilfredsstiller $u = g$ på $\partial\Omega$, er det den harmoniske funksjonen som minimerer dirichletenergien

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \quad (1)$$

Dette kalles **Dirichlets prinsipp**.

- 5 Vis dette.



Egenskapene under kalles “middelverdisatsene for harmoniske funksjoner”.

- 6 Vis at for harmoniske funksjoner gjelder at

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r .

- 7 Bruk oppgaven over til å vise at også

$$u(x) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_{\Omega} u \, dx$$

der $x \in \mathbb{R}^3$ og Ω er en kule sentrert i x og med vilkårlig radius r .

Tilsvarende resultater gjelder i $\mathbb{R}^2$, men bevisene er penest i $\mathbb{R}^3$. Av middelverdisatsene følger maksverdisatsen, som sier at en funksjon som er harmonisk på Ω alltid tar maksimums- og minimumsverdier på $\partial\Omega$.

- 8 Utled dette.

(Dette kan være greit å vite om, i tilfelle du noensinne skulle få den ikke spesielt geniale ide å spikre opp noen ladde gjenstander på rommet ditt og så forvente et lokalt spenningsmaksimum et eller annet sted midt i rommet.)

Laplaceoperatoren er ellers rotasjonsinvariant. Dette betyr at om du roterer koordinatsystemet ditt, vil de rene andrederiverte i det nye koordinatsystemet summere til det samme som i det gamle. Dette kan vi vise ved en totrinnsprosess.

- 9 Vis at laplaceoperatoren er rotasjonsinvariant.



4 - 7 - FLUIDMEKANIKK

En fotball som lobbes svakt slik at luftmotstanden er neglisjerbar, går sann omtrent i en parabel. Dersom det er bitte litt skru, går ingen av de individuelle atomene i fotballen i en parabel, men det er noe som går i en slags parabel.

- 1 La oss si at ballen er sammensatt av n partikler med posisjon $x_k(t)$ og masse m_k . Det er klart at

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k = \sum_l F_l$$

der telleren l på høyre side løper over alle eksterne krefter - alle interne krefter mellom partiklene må summere til null på grunn av Newtons tredje lov. Vis at punktet $x(t)$ som går i en parabel må tilfredsstill

$$x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

der

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

er den totale massen.

Det er fra dette resonnementet ideen om massesenteret $\bar{x}$ kommer fra - det er et punkt som oppfører seg som om tingen med utstrekning var en punktpartikkel utsatt for alle de eksterne kreftene. Dersom du har en ting med en kontinuerlig massefordeling, blir formelen

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

gitt ved et integral, og hvilket, kommer an på tingens utstrekning. Med den pene notasjonen for integral vi lærte i 4-4, kan vi skrive

$$\bar{x} = \frac{\int_{\Omega} x \rho(x) dx}{\int_{\Omega} \rho(x) dx}$$

og så er det Ω som forteller oss hva det er snakk om - en endimensjonal ting langs x -aksen (vanlig integral) eller langs en kurve i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ (linjeintegral), en todimensjonal ting i $\mathbb{R}^2$ (dobbeltintegral) eller i $\mathbb{R}^3$ (flateintegral) eller en tredimensjonal ting i $\mathbb{R}^3$ (trippelintegral).

Et **førsteprinsipp**¹ er fysikkens svar på aksiom. Det kalles også postulat. I TMA4121 skal vi kombinere analysens fundamentalteorem med tre ting som i sin tid ble tenkt på som førsteprinsipper - i forrige uke var det Maxwells likninger, i denne uken Newtons lover,² og i neste uke er det konservering. Utledningen av massesenteret over har jeg tatt med fordi argumentet forbereder oss på hvordan vi skal håndtere Newtons lover for legemer med utstrekning. La oss ta en ny titt på utledningen av bølgelikningen for en vibrerende membran fra TMA4111. Etter litt resonnering kom vi frem til at den vertikale kraften på en bit Ω av trommeskinnet var gitt ved

$$F = T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds = T \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx \approx T|\Omega| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Når jeg argumenterte for det første steget, refererte jeg til noe som kalles Eulers bevegelseslikninger³ og tilnærmingen der jeg bytta ut dobbeltintegralet med en riemannskyskraper med grunnflate $|\Omega|$ var også litt fishy. La oss rydde.

- 2 Med triksene fra massesenterutledningen kan vi rydde i dette resonnementet. La oss likeledes anta at membranen består av n molekyler med høyde u_k over likevekt. Gjenta argumentasjonen og forklar at dersom molekylene kun beveger seg rett opp og ned, må vi ha

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} dx = T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds$$

der Ω er skyggen til et lite stykke av membranen i x_1x_2 -planet.

- 3 Vis at antagelsen om at horisontalspenningen på membranen er Te_n overalt på $\partial\Omega$ impliserer at Ω ikke flytter seg horisontalt.
(Hint: gaussgreenteoremet.)

Dette trikset kan vi bruke i tre dimensjoner og. Arkimedes' lov sier at oppdriften til et legeme nedsenket i vann er lik vekten av det fortrenkte vannet. Det hydrostatiske trykket ved vandedybden x_3 er gitt ved

$$p(x) = ax_3 + b$$

der b er atmosfæretrykket ved vannoverflaten og a er sånn ca ti tusen pascal per meter.

- 4 Vis at det hydrostatiske trykket ikke leverer netto kraft sidelengs i vannmassene og at oppdriften er gitt ved arkimedes' lov.

Når jeg har på meg 7mm våtdrakt og ti kilo bly, flyter jeg som en dupp i havoverflaten, men på ti meters dyp synker jeg, siden trykket komprimerer meg etterhvert som jeg går ned. Et eller annet sted på veien ned er det perfekt balanse mellom oppdriften og tyngden. Dette balansepunktet er et naturlig eksempel på et ustabilt likevektspunkt.

- 5 Kroppen består mest av vann, og vann er tilnærmet inkompressibelt, så komprimeringen foregår stort sett på lungevolumet, som er omtrent seks liter for et voksent gjennomsnittsmenneske. Tettheten til et menneske ligger på om lag 985 gram per liter og lungene utgjør ca en tiendedel av kroppens totale volum. På hvilken dybde begynner et nakent gjennomsnittsmenneske med fulle lunger å synke?

¹https://en.wikipedia.org/wiki/First_principle

²<https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/26/3/144/1036213/On-the-Classical-Laws-of-Motion>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_laws_of_motion

Vi skiller mellom **kontaktkrefter**, som virker via $\partial\Omega$ og **volumkrefter**,⁴ som virker overalt på Ω - tyngden er en typisk volumkraft, mens oppdriften fra trykket er en kontaktkraft. Kraft per volum kalles også **krafttetthet**. En av de viktigste anvendelsene av divergensteoremet er å stille kontaktkrefter og volumkrefter på like fot. Arkimedes' lov kommer i en mer generell variant på differensialform:

$$\nabla p + \rho g e_3 = 0$$

Her er g tyngdeakselerasjonen og $p(x)$ trykket, og likningen beskriver generell hydrostatisk likevekt.

- 6] Utled denne. Du må se på et kontrollvolum, generalisere utledningen av Arkimedes lov og bruke gaussgreen.

Da vi utleda bølgelikningen for vibrerende streng eller trommeskinn brukte vi Newtons andre lov, men ikke med de dimensjonene du er vant til fra skolen. Bølgelikningen

$$\rho \ddot{u}(x, t) = T u''(x, t)$$

for en vibrerende streng er et regnskap i kraft per lengde, mens den for trommeskinn

$$\rho \ddot{u}(x, t) = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

er et regnskap i kraft per areal. For væsker setter vi opp regnskapet i kraft per volum, så venstresiden i Newtons andre lov er tetthet ganger akselerasjon og ikke masse ganger akselerasjon. Likningen

$$\nabla p + \rho g e_3 = 0$$

beskriver kreftene på et legeme i ro i vannet. Hvis vi sier at "legemet" er et kontrollvolum med væske, og åpner for at kreftene ikke er i perfekt balanse, vil vi få akselerasjon etter Newtons andre lov. Målet med fluidmekanikk er å finne likninger som kan løses for å finne trykk, tetthet, temperatur og væskehastighet. Det vi må lære oss er hvordan vi håndterer krefter og akselerasjon når vi driver med væskeflyt. Da må vi først ta unna noe som kalles **totalderivert**.

- 7] Tenk at du flyr rundt i et fly eller et helikopter og at $f(x, t)$ er temperaturen og $x(t)$ din trajektorie. Finn et uttrykk for din opplevde temperaturforandring

$$\frac{d}{dt} f(x(t), t)$$

og utled likningen for **tørt vann**:⁵

$$\rho (\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p - \rho g e_3$$

En av de tingene som gjør fluidmekanikk komplisert, er at fluidmekanikk må ha med friksjon for å bli realistisk. For å forstå friksjon, må vi først forstå **spenning** og **deformasjon**. Det hydrostatiske trykket p er en skalar med benevnelse kraft per areal. En bitte liten plate nedsenket i et kar med vann vil utsettes for den samme kraften fra vanntrykket uansett hvordan platen er orientert, og kraften virker alltid normalt på platen.⁶ Dette er ikke tilfellet dersom du erstatter vannet med en tyktflytende væske i bevegelse eller et fast stoff som er satt i press. Da vil kraften på den bittelille platen for det første kunne peke i andre retninger enn normalt på platen, og for det andre variere med platens orientering i rommet. **Spenning**⁷ er en generalisering av trykk. Du måler kraft per areal på platen

⁴Det finnes ikke noe godt norsk ord i vanlig bruk; de fleste sier bare "body force". Ellingsen borte på energi- og prosesseteknikk foreslår "kroppspress".

⁵https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_40.html

⁶Et lite volum vil oppleve bittelitt større trykk under enn over dersom du kombinerer trykk med gravitasjon, og derfor får man oppdrift.

⁷[https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_\(mechanics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))

når den er orientert normalt på de kartesiske aksene, og setter opp alt i **spenningstensoren**.⁸

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Dette er en generalisering av trykk. Det vanligste er å sette opp spenningen på hver orientering av flaten som en rad i matrisen, men jeg tror vi skal sette dem opp som kolonner, siden dette er mer i tråd med hva vi er vant til. Spenningskomponentene som virker tangentielt på en flate kalles **skjærspenninger**, og disse gir opphav til **skjærkrefter**.

8 Hva er spenningen på en liten plate med normalvektor e_n ?

Så må vi ha et krasjkurs i hvordan spenningstensoren brukes. Newton skrev opp lovene sine for punktpartikler. Femti år etter generaliserte Euler dem for legemer. Eulers lover ser like ut som Newton sine, men de holder styr på koordinatene inni legemet istedet for på punktpartikler. Forskjellen er at volumkraften på legemet finnes ved å trippelintegrere volumkrafttettheten over legemet, mens kontaktkraften finnes ved å fluksintegrere spenningen over legemets overflate.

9 Måten vi opererer på er å sette opp regnskap over krafttettheter og ikke krefter. Bruk divergensteoremet til å vise at bidraget fra kontaktkreftene er gitt ved divergensen til radene i spenningstensoren.

Det neste vi må ta er deformasjon. La oss gå helt tilbake til første studieår, da vi lærte om odde og jevne funksjoner. Alle funksjoner på intervallet $[-L, L]$ kan skrives som en sum av en odde og en jevn funksjon, og dette er lett å se ved å definere

$$f_j(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{og} \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Det samme trikset funker på matriser slik:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Den første av disse er symmetrisk og den andre er skjevsymmetrisk, og hvis du gjør dette med jacobimatrisen til hastighetsfeltet v , vil den symmetriske delen gi deg deformasjonen og den antisymmetriske rotasjonen.⁹ Newton tok derfor et skritt videre og postulerte relasjonen

$$\sigma = \nu(\partial v + \nabla v)$$

mellom spenning og deformasjon. (Vi kommer tilbake til denne.) Her er det ikke tatt høyde for friksjonen ved ekspansjon, så om du i tillegg har kompressibilitet, er modellen

$$\sigma = \nu_1(\partial v + \nabla v) + \nu_2 I \nabla \cdot v$$

der I er identitetsmatrisen og ν_2 er en ekstra friksjonskoeffisient.

10 Nå skal du i prinsippet ha alt som trengs for å utlede de berømte **Navier-Stokes-likningene**:

$$\rho(\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p - \rho g e_3 + \nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2) \nabla(\nabla \cdot v)$$

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Strain-rate_tensor

Fotballspilleren Eder Aleixo fikk tilnavnet "Kanonen" fordi han angivelig fikk ballen opp i 174 km/t med venstre fot.¹⁰ Han var også kjent for sin kraftige og presise skru. La oss analysere Eder. Et **stivt legeme**¹¹ er et legeme som ikke deformeres når det utsettes for kraft. En fotball er ikke et stivt legeme, men la oss gjøre antakelsen for enkelhets skyld. En fotball i flukt er utsatt for tre krefter - kraften fra foten, luftmotstanden og gravitasjonen. De to første er kontaktkrefter og den siste er en volumkraft.

- 11 La oss anta at ballen roterer med rotasjonshastigheten ω . Legg origo i massesenteret og rotasjonsaksen langs e_3 og finn farten til et punkt på ballens overflate.

Et roterende stivt legeme på reise i et fluid, vil gå i en krum bane på grunn av noe som kalles **magnuseffekten**.¹² I virkeligheten er fysikken komplisert, men tørt vann spår faktisk at dette kommer til å skje - Isaac Newton selv forklarte fenomenet riktig i et brev i 1672 etter å ha stått og sett på noen folk som spilte tennis.

- 12 Utled Bernoullis likning

$$\nabla \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) = 0.$$

I en tyktflytende væske i bevegelse er det **viskositeten**¹³ som sørger for at kontaktkreftene generelt ikke står normalt på bitte små plater som nedsenkes i væsken, så vi må ha en kvantitativ beskrivelse av spenningstensorens forhold til skjærkrefter. Dersom du har to parallelle plater med areal A og avstand d , adskilt av et tynt lag viskøs væske og som kan beveges relativt til hverandre, er det et eksperimentelt faktum at

$$\frac{F}{A} = \nu \frac{v}{d}$$

der F er netto kraft på platene, v er den relative farten mellom platene og ν er den viskøse friksjonskoeffisienten. Du trenger ikke viskositet for å forklare magnuseffekten, men du må kjenne til det eksperimentelle faktum at inntil et stivt legeme i et fluid er væskehastigheten null. Dette kalles **no slip**.¹⁴

- 13 Forklar hvordan Eder klarer å få ballen til å gå i bue ved å skru den.¹⁵



¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89der_Aleixo

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Rigid_body

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect

¹³<https://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity>

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/No-slip_condition

¹⁵<https://www.gettyimages.no/detail/79044412>

4 - 8 - BEVARINGSLOVER

I forrige uke så vi på hva Newtons lover har å si om fluider. Men det er et prinsipp i tillegg - nemlig den rimelige antakelse at masse ikke kan oppstå eller forsvinne i løse luften. For å forstå dette, tror jeg det er gunstig å ta en tur helt tilbake til en modell med én romlig variabel. La oss tenke at vi har et kloakkrør med kloakk, og la $v(x, t)$ være væskehastigheten til kloakken i meter per sekund og $\rho(x, t)$ tettheten av E. Coli i antall bakterier per meter. Totalt antall bakterier mellom $x = a$ og $x = b$ er

$$\int_a^b \rho(x, t) dx$$

og **fluksen**¹ av bakterier over punktet x er

$$J(x, t) = \rho(x, t)v(x, t),$$

gitt i antall bakterier per sekund.

- [1] Forklar at dersom ingen bakterier skal forsvinne eller oppstå i løse luften, må vi ha

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = \rho(a, t)v(a, t) - \rho(b, t)v(b, t).$$

Likningen over er et grunnleggende eksempel på noe som kalles en **bevaringslov**² og vi kan spinne videre på den. Husk analysens fundamentalteorem

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

- [2] Bruk analysens fundamentalteorem og vis at vi må ha

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx = 0.$$

Likningen over er gitt på integralform. Dersom integralet skal være null uansett hva slags integrasjonsgrenser vi velger, må integranden være null, slik at

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) = 0.$$

Denne likningen kalles **kontinuitetslikningen**³ og sier også at bakterier ikke kan oppstå eller forsvinne i løse luften, men nå på differensialform. Vi kan utlede videre likninger ved å gjøre antagelser på ρ og v . Vi kan anta konstant hastighet og få **transportlikningen**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Flux>

²https://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_law

³https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation

Denne har mange løsninger, men bare én dersom vi tar med et initialkrav. Det er vanlig å starte med observasjonen at ρ må være konstant på et sett med rette linjer. Disse kalles likningens **karakteristiske kurver**.

3 Finn dem.

Det er vanlig å slenge på et initialkrav:

$$\rho(x, 0) = g(x).$$

Transportlikningen er ikke så interessant - løsningen er bare en konsentrasjonsprofil som beveger seg bortover med den konstante farten v . Det er derfor den heter "transportlikningen".

4 Løs transportlikningen med initialkrav. Det er overraskende enkelt om du bruker de karakteristiske kurvene.

Det er et par andre modeller med litt fysisk relevans som kan løses på liknende vis - vi tar dem med en passant. Dersom ρ er oksygentettheten i blodstrømmen din og denne blir transportert ut gjennom blodåreveggene på en måte som er proporsjonal med konsentrasjonen, er

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho + \gamma \rho = 0.$$

en enkel modell dersom $\gamma > 0$.

5 Løs. Bruk de karakteristiske kurvene fra forrige side.

La oss nå tenke at det kommer en blodåre inn på hovedblodåren og sprøyter blod med en annen oksygenkonsentrasjon inn i åren. Dette kan vi modellere ved å slenge på en innsprøytning f på høyresiden slik:

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = f$$

6 Denne kan du også løse ved å se på hvordan ρ oppfører seg på de karakteristiske kurvene.



Bevaringslover er viktige i fysikk, og de dukker opp overalt der det er noe som ikke kan oppstå eller forsvinne i løse luften. Kontinuitetslikningen kan selvfølgelig utledes i tre romlige dimensjoner, men da må vi ha en forståelse av **flukstetthet**.⁴ La oss si at konsentrasjonen ρ er gitt i antall mol per kubikkmeter. Dersom v har benevnning meter per sekund, har flukstettheten

$$J = \rho v$$

benevnning mol per sekund per kvadratmeter, og fluksintegralet

$$\int_{\Sigma} \rho v \cdot dS$$

benevnning mol per sekund. Dette er altså hvor mange mol som passerer Σ per sekund.

7 Utled kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Hvordan ser kontinuitetslikningen ut dersom væsken er inkompressibel?

Det er derfor et godt tegn at det er en konsekvens av Maxwells lover at ladning ikke kan oppstå eller forsvinne.

8 Utled likningene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dx + \int_{\partial\Omega} J \cdot dS = 0.$$

og

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$$

fra Maxwells lover.

(Her er J strømtettheten, målt i ampere per kvadratmeter. Altså flukstetthet av ladning.)



⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Flux>

Hvis det finnes en eller annen form for drivende kraft, for eksempel fra en trykkgradient eller fra tyngdekraften, kalles det **konveksjon**, og hvis bevegelsen er tilfeldig, kalles det **diffusjon**. **Ficks diffusjonslov** sier at ved diffusjon er flukstettheten proporsjonal med konsentrasjonsgradienten - masse strømmer spontant fra områder med høy konsentrasjon til områder med lav konsentrasjon.

9 Utled diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D\Delta\rho$$

der D er Ficks diffusjonskonstant.⁵

I kroppen din er det mange prosesser for å transportere rundt på molekyler, og karbondioksid transporteres visst i hovedsak gjennom diffusjon.⁶ Karbondioksid produseres i mitokondriene og i cytoplasma, og mekanismen for å få det gjennom interstisiet og ut i blodstrømmen er i hovedsak diffusjon. Så transporteres det med blodstrømmen til lungene der diffusjon nok en gang sørger for å få det ut i luften som skal pustes ut.⁷

10 Varmer kan heller ikke bare oppstå eller forsvinne av seg selv med mindre det er en kjemisk reaksjon et sted som produserer varme. Utled kontinuitetslikningen

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot q = 0$$

der c er den spesifikke varmekapasiteten, målt i joule per kelvin per kilo, T er temperaturen og q er varme flukstettheten, målt i watt per kvadratmeter.

Transport av varmeenergi er for mange materialer proporsjonal med temperaturgradienten. Dette kalles **Fouriers lov**,⁸ og skrives

$$q = -\kappa \nabla T$$

der κ er den termiske konduktiviteten.

11 Utled **varmelikningen**⁹

$$\rho c \dot{T} = \kappa \Delta T.$$



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Mass_diffusivity

⁶<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK532988/>

⁷Hvis du fyller lungene med luft oftere enn nødvendig, sørger du for å ha høy konsentrasjonsgradient over cellemembranen i lungene, og da er det mulig å tappe ut karbondioksid fortere enn resten av kroppen din produserer det. Det er en vanlig misforståelse at hyperventilering øker konsentrasjonen av oksygen i blodet ditt slik at du kan holde pusten lenger. Dette er feil. Sentralnervesystemet ditt monitorerer karbondioksidnivået i blodstrømmen din, ikke oksygennivået, og når du hyperventilerer tapper du blodstrømmen for karbondioksid slik at du komfortabelt kan holde pusten lenge på blodstrømmens normale oksygeninnhold. Det er derfor livsfarlig å hyperventilere når du fridykker - hvis du går tom for oksygen med altfor lite karbondioksid i blodet, kan du besvime uten å ha kjent behovet for å trekke pusten. Med fridykkere skjer dette gjerne rett før de når overflaten:

https://en.wikipedia.org/wiki/Freediving_blackout

Det finnes fersk empirisk evidens for at seler kan følge med på oksygennivået:

<https://www.science.org/doi/10.1126/science.adq4921>

<https://www.nationalgeographic.com/animals/article/seal-dive-drown-blood-oxygen>

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

4 - 9 - BØLGER

Kontinuitetslikningen

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0$$

er sentral i all fysikk. Den sier at ting ikke forsvinner eller oppstår i løse luften. Mange modeller starter med denne og gjør så videre antagelser på J - for eksempel får vi diffusjonslikningen ved å sette Ficks lov for diffusjon

$$J = -D\nabla\rho$$

inn i kontinuitetslikningen. I denne uken skal vi kombinere kontinuitetslikningen med Newtons andre lov for å utlede bølgelikningen¹

$$\ddot{p} = \Delta p$$

for overtrykket i en lydbølge i luft. Det er vanlig å sette

$$p_{\text{faktisk trykk}} = p_0 + p$$

der p_0 er atmosfæretrykket og p er overtrykket under lydforplantning. Vi gjør det samme med tettheten:

$$\rho_{\text{faktisk tetthet}} = \rho_0 + \rho.$$

Dersom hverken p eller ρ fluktuerer veldig mye fra henholdsvis p_0 eller ρ_0 , kan vi anta at p og ρ er proporsjonale. Dette kan argumenteres for på flere måter, for eksempel ved å anta ²

$$p_0 + p = c(\rho_0 + \rho)^\gamma$$

der γ er 5/3 for enatomige gasser og 7/5 for toatomige gasser og så videre. Atmosfæretrykket er på rundt hundre tusen pascal og smertegrensen for lydtrykk pleier å settes til noen titalls pascals overtrykk, så alle barn i barnehagen skjønner at for vanlige lyder er p mange størrelsesordener under p_0 .

1 Utled at

$$1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

og bruk informasjonen om størrelsesordnene til p og p_0 til å se at

$$p \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho.$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation

²https://en.wikipedia.org/wiki/Adiabatic_process

Det samme gjelder for farten v - denne er bitte liten, for luftmolekylene beveger seg ikke særlig langt når lydbølgene får dem til å danse frem og tilbake.

- 2 Sett inn $\rho + \rho_0$ i kontinuitetslikningen og utled at

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot v \approx 0.$$

Newtons andre lov (Eulerlikningen) sier

$$(\rho_0 + \rho)(\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p - (\rho_0 + \rho)ge_3$$

og neglisjerer vi tyngden, får vi

$$(\rho_0 + \rho)(\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p.$$

- 3 Bruker du de samme triksene som i forrige oppgave, bør det være mulig å hste opp at

$$\rho_0 \dot{v} \approx -\nabla p$$

Til slutt kan vi sette proporsjonaliteten mellom p og ρ inn i kontinuitetslikningen og derivere med hensyn på tid og få

$$\ddot{p} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \dot{v}$$

- 4 og da har vi alle ingrediensene til bølgelikningen for akustiske bølger

$$\ddot{p} = c^2 \Delta p$$

der $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ er propagasjonsfarten.³



³https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_wave_equation

Vi skal avslutte denne firesemesters torturen med å sammenfatte litt om dette med tid og rom. Derfor er det lurt å nå løse bølgelikningen på hele $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Dette ble først gjort av Poisson, men av en eller annen grunn kalles løsningen **Kirchhoffs formel**:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x, ct)} f \, dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x, ct)} g \, dS$$

Her er f og g initialkravene, og $B(x, t)$ en kule med radius t , sentrert i x . For å utlede Kirchhoffs formel, må vi gjøre noen andre småting først. Hvis man ikke ønsker å bruke bølgelikningen til å beskrive en oppspennet streng, men heller bølgene fra et steinkast på et endimensjonalt og uendelig langt hav, må vi lete etter en funksjon $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ som tilfredsstiller bare bølgelikningen med de vanlige initialkravene, men med ingen randkrav. La oss begynne med å "løse" bølgelikningen uten noen former for rand- eller initialkrav.

5 Sjekk at

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

passer i likningen

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t).$$

uansett hva ϕ og ψ er, så lenge de er to ganger kontinuerlig deriverbare.

Hva er en bølge egentlig? Oppgaven over forteller i bunn og grunn mye om det. Man kan tenke på det som en eller annen profil som flytter seg bortover. Oppgaven over forteller oss at bølgelikningen ikke bryr seg så mye om formen på profilen, den er fornøyd så lenge profilen siger bortetter med farten c , altså at løsningen kun er avhengig av $x + ct$ eller $x - ct$. Dersom du har en bestemt profil gitt av initialkrav, kan vi komme et steg videre.

6 Bruk

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{og} \quad \dot{u}(x, 0) = g(x),$$

til å sette opp et 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ . Gausseliminer og integrer og vis at

bølgelikningen på hele x -aksen, med initialkrav

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x),$$

løses av

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds.$$



Så er det en ting til vi må gjøre, nemlig anta at vi har en uendelig lang streng festa i veggen. Dette kalles **halvlinjeproblemet** og består av den endimensjonale bølgelikningen pluss følgende rand- og initialkrav:

$$u(0, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x) \quad f(0) = g(0) = 0$$

Måten man løser det på er i bunn og grunn enkel, man utvider f og g til odde funksjoner på hele $\mathbb{R}$ og så stapper man alt inn i d'Alemberts formel. Dette virker litt corny i begynnelsen, men er en naturlig ide om man har sett på hvordan en bølge reflekteres fra festet punkt:

<https://www.youtube.com/watch?v=1PsGZq5sLrw>

7 Vis at vi får

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g \quad 0 \leq ct \leq x \\ \frac{1}{2} (f(x+ct) - f(ct-x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g \quad 0 \leq x \leq ct \end{cases}$$

La oss nå bestemme oss for et punkt x og slå en kule $B(x, r)$ rundt. Det neste steget er å studere gjennomsnittet til u på $\partial B(x, r)$:

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x, r)} u \, dS.$$

8 Vis at

$$\partial_{tt} \bar{u} = c^2 \left(\partial_{rr} \bar{u} + \frac{2}{r} \partial_r \bar{u} \right)$$

eller

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \bar{u} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \bar{u} \right)$$

som vi sa i gamle dager.

(Hint: Deriver $\bar{u}$ to ganger og sett sammen høyresiden og bruk bølgelikningen.)



Nå er det faktisk slik at $U = r\bar{u}$ tilfredsstiller halvlinjeproblemet

$$\partial_{tt}U = c^2\partial_{rr}U \quad U(0,t) = 0 \quad U(r,0) = F(r) \quad \dot{U}(r,0) = G(r) \quad F(0) = G(0) = 0$$

der

$$F(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} f \, dS \quad \text{og} \quad G(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B(x,r)} g \, dS.$$

9 Vis dette og utled at

$$u(x,t) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} f \, dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} g \, dS.$$

(Hint: Bruk oppgave 7.)

Denne formelen er interessant fordi den forteller oss noe om hvordan bølger oppfører seg i tre dimensjoner - verdien $u(x,t)$ avhenger kun av f og g på randen av $B(x,ct)$. Dette kalles **Huygens' prinsipp**.⁴ La oss si at du står i punktet x og så står det en fyr i origo og klapper et enkelt klapp ved tiden $t = 0$.

10 Når hører du klippet?

I to dimensjoner ser Kirchhoffs formel slik ut:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \left(\partial_t \int_{B(x,ct)} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} \, dy + \int_{B(x,ct)} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} \, dy \right)$$

og hvis du gjør det samme eksperimentet som i oppgave 10, for eksempel ved å kaste en stein i havet, vil initialkravet fortsette å påvirke u også etter at bølgefronten har passert. Vi sier derfor at Huygens' prinsipp kun gjelder når antall dimensjoner er odde, dette var det Jacques Hadamard som oppdaget.



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Huygens-Fresnel_principle

4 - 10 - NABLAOPERATOREN II

Newtons lov for viskositet

$$\sigma = \nu (\partial v + \nabla v)$$

kan virke trukket litt ut av hatten. For å forstå denne, trenger vi mye av det vi har lært i TMA4106 og TMA4111. Det første er å observere at vi kan skrive

$$\partial v = \frac{1}{2} (\partial v + \nabla v) + \frac{1}{2} (\partial v - \nabla v).$$

Den første matrisen på høyre side er symmetrisk, mens den andre er **skjevsymmetrisk**.¹ Denne dekomponeringen har en pen fysisk tolkning. La oss først skrive opp Taylorutviklingen av første orden til v :

$$\begin{aligned} v(x+h, t) &\approx v(x, t) + (\partial_x v(x, t))h \\ &= v(x, t) + \frac{1}{2} (\partial v + \nabla v) h + \frac{1}{2} (\partial v - \nabla v) h. \end{aligned}$$

De tre leddene på høyre side gir oss ganske god informasjon om hva som skjer i området rundt x , i samme gate som ettpunktsformelen

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

gir oss informasjon om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i nærheten av x . Leddet $v(x, t)$ er "funksjonshøyden" i (x, t) og representerer den konstante delen av hastighetsfeltet som reiser forbi x . For å forstå Newtons viskositetslov må vi forstå den symmetriske delen

$$\frac{1}{2} (\partial v + \nabla v) h$$

og da er det lurt å først forstå den skjevsymmetriske delen

$$\frac{1}{2} (\partial v - \nabla v) h.$$

1 Kryssproduktet mellom to vektorer x og y kan skrives som et matrise-vektorprodukt

$$y \times x = Sx.$$

Hva blir S ?

Vi skriver $S(y)$ for å indikere at det er y vi putter inn på rett måte i S . Rotasjonsmatrisen som roterer vektorer vinkelen θ rundt y kan skrives

$$R = I + S(y) \sin \theta + S^2(y)(1 - \cos \theta)$$

dersom $|y| = 1$.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Skew-symmetric_matrix

- 2] Sjekk dette.
(Hint: Rodrigues formel.)

Hvis jeg sier at n er et heltall, og A en eller annen matrise, blir

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} A \right)^n.$$

Høyresiden her er slik man tenker på en generator for en liegruppe - man kjører et uendelig lite inkrement uendelig mange ganger. Her kommer neste triks. Dersom $S(y)$ er skjevsymmetrisk, kan vi sjekke at

$$e^{\theta S(y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{\theta}{n} S(y) \right)^n$$

er en rotasjon.

- 3] Sjekk at

$$e^{\theta S(y)} = I + S(y) \sin \theta + S^2(y)(1 - \cos \theta)$$

dersom $|y| = 1$.

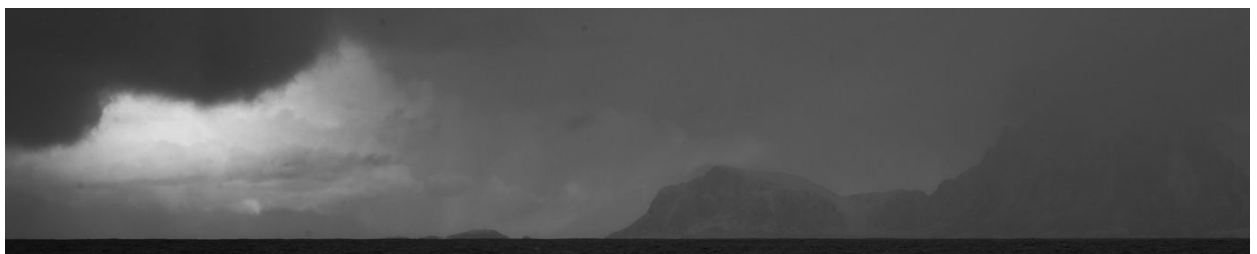
En rotasjon er altså sammensatt av uendelig mange bittesmå lineærtransformasjoner på formen

$$I + \frac{\theta}{n} S(y)$$

og derfor sier folk gjerne slike ting som at "rotasjoner er generert av skjevsymmetriske matriser" når de skal vise at de er en del av det laget i befolkningen som har peiling på **liegruppeteori**.² Liegrupper pleide å være et abstrakt leketøy kun tilgjengelig for de argeste, men er nå et standardverktøy innen reguleringsteknikk og kvantefysikk. Tidligere i semesteret regnet vi ut rotasjonen til hastighetsfeltet til en roterende skive, og fant at denne ble 2ω der ω er rotasjonshastigheten. Derfor skiller de mellom "rotation" og "curl" på engelsk, noe vi også burde gjort på norsk. Med Rodrigues' formel innabords kan vi belyse dette enda mer.

- 4] Hvilken rotasjon genereres av

$$\frac{1}{2} (\partial v - \nabla v) h?$$



²Oppkalt etter den norske matematikeren Sophus Lie:

Sophus Lie
døde i
en alder av nesten femtini.
Han døde av leukemi.
C'est la vie.

For å forstå friksjon i væsker må vi først forstå hva en **rigid avbildning**³ er. Dette er kort og godt en avbildning som ikke endrer avstanden mellom punkter - dersom avstanden mellom to punkter er d før avbildningen, skal den også være d etter avbildningen.

5 Vis at en rotasjon er en rigid avbildning.

Det sier seg selv at det ikke oppstår friksjon i en væske som gjennomgår rigid bevegelse, for eksempel når du roterer et rømmebeger. Væskepartiklene må flytte seg relativt til hverandre. La oss analysere strømlinjene til et vektorfelt på formen

$$v(x) = Ax$$

der A er en matrise.

6 Hva blir strømlinjene dersom A er skjevsymmetrisk?
(Hint: Bruk forrige side.)

Det som gjenstår nå er å forstå hvorfor

$$\frac{1}{2}(\partial v + \nabla v)h$$

forteller oss noe om væskepartiklenes forflytning relativt til hverandre. En litt rask type ville nok nå sagt at siden translasjoner også er rigide bevegelser, endrer leddet $v(x, t)$ i Taylorutviklingen til v heller ikke avstanden mellom væskepartikler, så dersom avstanden mellom væskepartiklene endres over tid, er den symmetriske delen av ∂v som må stå for dette.

7 Hvordan blir strømlinjene til

$$v(x) = Ax$$

om A er symmetrisk?

(Hint: Legg koordinataksene langs egenvektorene til A .)



³https://en.wikipedia.org/wiki/Rigid_transformation

UKENS NØTTER

Det finnes syv frisemønstre,⁴ sytten tapetmønstre⁵ og trettito krystallklasser.⁶ Det matematiske objektet for å studere symmetri kalles gruppeteori.⁷ En **gruppe** G er en samling elementer og en binær operasjon for å kombinere dem; Den binære operasjonen $\cdot$ skal være assosiativ, G skal være lukket under operasjonen, og G må inneholde

1 et identitetselement e slik at $g \cdot e = e \cdot g = g$ for alle $g \in G$.

2 et inverselement for alle $g \in G$, altså et element g^{-1} slik at $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

En gruppe kan ha et endelig eller uendelig antall elementer. Tolvtonesystemet vi bruker i moderne musikk er basert på en endelig gruppe som heter $\mathbb{Z}_{12}$. Den består av elementene

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

og den binære operasjonen er

$$a + b \text{ mod } 12$$

som betyr “legg sammen a og b og trekk fra tolv gjentatte ganger til du får noe mellom 0 og 11”. Denne kjenner dere alle, for det er den samme gruppen du bruker om du kan klokken. Hvis klokken er ti og du lurar på hva klokken er om femten timer, er svaret ett, for du tar ti pluss femten som blir tjuefem og så trekker du fra tolv to ganger.

1 Vis at dette er en gruppe.

Hvis du spiller et instrument, skjønner du kanskje at du kan identifisere tallene 0–11 med intervallene, så en prim er null og en kvint er syv og så videre. Oktaven trenger du ikke ta med, for det er matematisk sett det samme som en prim. (Fysisk sett er oktaven en dobling av frekvens og ikke det samme som en prim, så her må vi tenke litt abstrakt og matematisk.)

2 Finn et sett med matriser som oppfører seg på samme måte under matrisemultiplikasjon.

Den enkleste måten å tenke på grupper på, er gjennom matrisemultiplikasjon, og dette er antagelig det eneste en typisk ingeniør trenger. Ganger du rotasjonsmatrisen med seg selv mange ganger, vil du bare få tolv forskjellige matriser dersom rotasjonsvinkelen er $\pi/6$, og dette er matematisk sett identisk med klokkeslettene og tolvtonesystemet. Dette skulle Arnold Schönberg visst. Kanskje han kunne fått utløp for egoet sitt på andre måter enn å skrive musikk som ingen orker å høre på, og så kunne han skrevet mere Pelleas og Melisande istedet.

3 Hvis jeg sier at denne gruppen er rotasjonssymmetriene til et regulært polygon med tolv kanter, hva er da den korresponderende gruppen til et regulært polygon med seks kanter?

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_system

⁷[https://en.wikipedia.org/wiki/Group_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Group_(mathematics))

Tolvtonesystemet, klokken, og alle rotasjonssymmetrier av det tolvkantede polygonet er "den samme gruppen". På fagspråket sier vi at de er **isomorfe**. Dette betyr at gruppene har den samme multiplikasjonstabellen: ⁸

	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
PRIM	PRIM	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM
LITEN SEKUND	LITEN SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM
STOR SEKUND	STOR SEKUND	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND
LITEN TERS	LITEN TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND
STOR TERS	STOR TERS	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND	
KVART	KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS
FORSTØRRET KVART	FORSTØRRET KVART	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS	
KVINT	KVINT	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS		
LITEN SEKST	LITEN SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS			
STOR SEKST	STOR SEKST	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS		0	5	V
LITEN SEPTIM	LITEN SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS					
STOR SEPTIM	STOR SEPTIM	OKTAV PRIM	LITEN SEKUND	NONE SEKUND		DESIM TERS						

	$R^0 = I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
$R^0 = I$	$R^0 = I$	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}
R	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12} = I$
R^2	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	R^8	R^9	R^{10}	R^{11}	$R^{12} = I$	$R^{13} = R$
R^3	R^3	R^4										
R^4	R^4	R^5										
R^5	R^5	R^6										
R^6	R^6	R^7										
R^7	R^7	R^8										
R^8	R^8	R^9										
R^9	R^9	R^{10}										
R^{10}	R^{10}	R^{11}										
R^{11}	R^{11}											

⁸Å legge tre timer til et klokkeslett er strengt tatt en addisjon, men siden vi bruker $\cdot$ for den generiske binære operasjonen i gruppeteori, blir det fort til at man sier "multiplikasjonstabell" allikevel.

Du trenger ikke vite hva en oktav eller en sekund er i musikkteori for å forstå poenget. Dersom du klarer å se forbi merkelappene i tabellen over og oppdage at det er den samme strukturen, er du i boks. Så langt har vi egentlig kun studert en gruppe, $\mathbb{Z}_{12}$, men det var lett å diske opp med fire forskjellige tolkninger eller bruksområder. Alle disse bruksområdene oppfører seg helt likt, og gruppen $\mathbb{Z}_{12}$ er den matematiske fellesnevneren. La oss nå se på noen andre grupper som oppfører seg litt annerledes.

- 4 Om jeg sier at det sekskantede polygonet i oppgaven over kan speiles i tillegg til å roteres, hvordan ser gruppen ut da?
(Hint: Tenk at hjørnene er nummererte og at du skal finne et sett med matriser som flytter rundt på dem på alle mulige måter på en slik måte at polygonet hadde sett likt ut om hjørnene var unummerte.)

Fikk du til oppgaven over, vil du forhåpentligvis forstå at det er noen fundamentale forskjeller på denne gruppen og $\mathbb{Z}_{12}$.

- 5 Hva med alle symmetriene til et regulært tetraeder?
- 6 Hva med alle permutasjoner på $(1, 2, 3, 4)$?
(En permutasjon er for eksempel $(1, 4, 3, 2)$. Hvor mange finnes det?)
- 7 Legg et regulært tetraeder slik at det har hjørner i $(1, 1, 1)^T$, $(-1, -1, 1)^T$, $(1, -1, -1)^T$ og $(-1, 1, -1)^T$ og skriv opp et sett med matriser som er isomorft til symmetrigruppen.

For å komme frem til det som er interessant, må vi skjønne hva en **generator** er. Dette er et sett med elementer i gruppen som gir deg alle elementene i gruppen dersom du ganger dem sammen gjentatte ganger. Tolvtonesystemet og rotasjonssymmetriene til den tolvkantede platen er såkalt **sykliske** - du trenger bare én generator. For tetraederet trenger du fler.

- 8 Finn generatorer for rotasjonssymmetriene til den tolvkantede platen og symmetrigruppen til tetraederet. Og tolvtonesystemet om du liker musikk for den saks skyld, men har du funnet generator for symmetriene til den tolvkantede platen, har du for tolvtonesystemet også.

Har du skjønnet hva en generator for en endelig gruppe er, er det ikke så vanskelig å gjøre et hopp i hugen og forstå hvorfor en rotasjon er "generert" av en skjevsymmetrisk matrise.

- 9 Finn generatorer for rotasjon rundt de kartesiske koordinataksene. Disse rotasjonene kalles roll, pitch og yaw (e_1 er fartøyets fartsretning og e_3 er opp):

$$e^{\theta S(e_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_2)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad e^{\theta S(e_3)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 - 11 - ALEMBERTOPERATOREN

I forrige uke studerte vi bølgelikningen. Denne dukker opp så ofte at differensialoperatoren har fått sitt eget symbol:

$$\square u = \frac{1}{c^2} \ddot{u} - \Delta u = 0$$

Den har også fått sitt eget navn, **d'Alembert-operatoren**,¹ etter Jean le Rond d'Alembert, gutten som erta på seg både Euler og Rameau.² D'Alembertoperatoren er en generalisering av laplaceoperatoren dersom du angriper det riktig. Dette leder oss inn på Einstein og relativitetsteorien, som snudde opp ned på all mekanikk i 1905.³

- 1 Arbeidshesten er et oppsett med to koordinatsystemer der det ene beveger seg med konstant rettlinjett fart i forhold til det andre. La oss kalle det ene x og det andre y og den relative farten mellom dem v . Hva er koordinattransformasjonen som tar deg mellom x og y ? (Dette kalles en **galileisk transformasjon**.⁴)

I Amperes lov

$$c^2 \nabla \times B = \dot{E} + \frac{J}{\epsilon_0}$$

er c lyshastigheten i vakuum - det var gjennom denne konstanten Maxwell skjønnte at lys var elektromagnetiske bølger. I 1905 var det naturlig å stille spørsmålet om lyshastigheten *relativt til hva?* og standardsvaret var "relativt til *eteren* naturligvis!"⁵ Alle til da kjente bølgebevegelser trengte et medium for å propagere, og bølgelikningen er så lett å utlede fra maxwells lover at det er pensum i TMA4121 å kunne gjøre det.

- 2 Et foton reiser mellom to punkter i rommet. Hva er farten til fotonet relativt til origo i de to koordinatsystemene i forrige oppgave?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/D'Alembert_operator

²https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Philippe_Rameau

³<https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Galilean_transformation

⁵[https://en.wikipedia.org/wiki/Aether_\(classical_element\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Aether_(classical_element))

Litt grunnleggende relativitetsteori er viktig - gps hadde aldri funka uten⁶ og spektroskopilinjer blir bittelitt feil om man ikke tar hensyn til spinn, som er en relativistisk effekt.⁷ Svaret på forrige oppgave er $c \approx 3 \cdot 10^8$ meter per sekund. Det spiller ingen rolle hva v er - lyshastigheten er lik c i begge koordinatsystemer, og det er et eksperimentelt faktum at dette k dder med v r intuitive forståelse av tid, rom og masse. Ingen har noen gang sett noe til eteren, og Einstein begynte   ane konturene av uglene i mosen ved   analysere det kjente Michelson-Morley-eksperimentet.⁸

- 3 Her er en forenklet versjon. La oss si at både x_1 og y_1 er rettet langs en rettl njet togskinne, og i en togvogn med takhøyde L som reiser med farten v_1 sendes et foton fra gulvet og opp i et speil i taket og ned igjen til en fotonm ler på samme sted som fotonet ble sendt ut.  n person står i togvoggen og måler tiden dette tar, mens en annen står i ro ved siden av togskinnen og måler det samme mens toget kjører forbi. Vis at forholdet mellom de målte tidene er

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Det er nå vanlig   sette

$$\beta = \frac{v}{c},$$

for alt avhenger av denne. Ved   gjøre det samme fotonm leeksperiment i horisontal retning og sammenlikne tidene det vertikale og horisontale eksperimentet tar for personen som står og ser på fra sidelinjen, kan man vise eksperimentelt at lengder i fartsretningen v kortes inn for observatøren på sidelinjen, også med faktoren γ . Dette syntes selvfølgelig alle var forvirrende for hundre år siden. Det tar tid   venne seg til er at det er lyshastigheten og ikke tidens gang som er konstant.

- 4 Dersom du fikk til oppgave 1, så du at den galileiske transformasjonens likning i togeksperimentet blir

$$y_1 = x_1 - v_1 t,$$

men lengdekontraksjonsprinsippet sier at den korrekte er

$$y_1 = \gamma(x_1 - v_1 t).$$

I gamle dager trodde de at tiden gikk like fort i begge koordinatsystemer, men det gjør den også ikke. Finn likningen mellom tiden t i det ene koordinatsystemet og tiden τ i det andre. (Hint: Skriv opp transformasjonen som tar deg fra y til x og regn ut τ .)



⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure

⁸Verdens mest kjente mislykkede eksperiment:

https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment

Konklusjonen fra forrige oppgave er at transformasjonen som tar deg fra x til y er

$$y_1 = \gamma(x_1 - v_1 t)$$

$$\tau = \gamma \left(t - \frac{v x_1}{c^2} \right)$$

Denne kalles **lorentztransformasjon**, etter Hendrik Lorentz, som analyserte den først.⁹ Han kom frem til dem ved å studere hvilke transformasjoner som etterlot Maxwells lover i samme form, og snublet dermed over de korrekte relativistiske transformasjonene som respekterer tidsdilatasjon og lengdekontraksjon mellom koordinatsystemer i jevn og rettlinjet innbyrdes bevegelse. Disse kalles forresten **inertialsystemer**.¹⁰ Nå er det vanlig å introdusere notasjonen

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3)$$

slik at lorentztransformasjonen kan skrives

$$y_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1)$$

$$y_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0)$$

og så tenker vi på x_0 som distansen lyset reiser per tidsenhet i tidsregningen til x -koordinatsystemet. Lengdekontraksjon skjer bare i fartsretningen, så vi har også likningene $y_2 = x_2$ og $y_3 = x_3$ men la oss vente litt med flere romlige dimensjoner.

- 5] Nå kan vi varme opp til rosinen i pølsa ved å sjekke at den romlige envariable alembertoperatoren

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u} - \partial_{x_1}^2 u$$

er invariant under lorentztransformasjonen over.



⁹Det var visst for lett for Poincare - han gadd ikke skrive ut detaljene. Derfor heter det lorentztransformasjon.
https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_transformation

¹⁰Et koordinatsystem festet i jordoverflaten er akselerert, og derfor opplever vi fiktive krefter (for eksempel corioliskraften) så dette er ikke et inertialsystem. Men vi later som i mange tilfeller.
https://en.wikipedia.org/wiki/Inertial_frame_of_reference

Et punkt

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x_1, x_2, x_3)$$

i tid-rom kalles en **hendelse**, og rommet kalles **minkowskirommet**.¹¹ For to hendelser adskilt av at et foton reiser fra et sted til et annet (dette kalles lysseparerte hendelser), er

$$c = \frac{|x|}{t}$$

og denne likningen skrives om til

$$c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

eller

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

med vår nye notasjon. Venstre side kalles **minkowskiproduktet**,¹² og nå er det vanlig praksis å begynne å lete etter alle transformasjoner i tid og rom som ikke endrer på minkowskiproduktet, for disse transformasjonene vil automatisk respektere kravet om at lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer. Det finnes tre slike typer, og mengden av alle disse kalles **poincarégruppen**.¹³

6 Den ene typen er de vanlige rotasjonene i $\mathbb{R}^3$. Vis dette.

Den andre typen er den generiske firedimensjonale lorentztransformasjonen

$$y = \Lambda x$$

der

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1^2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_3 \\ -\gamma\beta_2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_2 & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2^2 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_3 \\ -\gamma\beta_3 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_1\beta_3 & \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_2\beta_3 & 1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

og nå skal vi se om vi klarer å sjekke at alembertoperatoren er invariant under denne typen firedimensjonale koordinattransformasjon.

7 Utled uttrykket over, og vis at

$$\Lambda = I + \gamma|\beta|K + (\gamma - 1)K^2$$

der

$$K = -\frac{1}{|v|} \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \beta = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_space

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudo-Euclidean_space

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré_group

Lorentztransformasjonene har overraskende mange likhetstrekk med rotasjoner i $\mathbb{R}^3$. I forrige økt gikk vi veien via Rodrigues' formel for å finne ut hva generatoren til en rotasjon er. Det samme trikset fungerer på lorentztransformasjoner - generatoren til en infinitesimal lorentztransformasjon i enhetsretningen v er matrisen K i fra forrige oppgave. Vi setter

$$\cosh \lambda = \gamma \qquad \sinh \lambda = \gamma |\beta|$$

og skalaren λ kalles **rapiditeten**.¹⁴

8 Vis at

$$\Lambda = e^{\lambda K} = I + K \sinh(\lambda) + K^2(\cosh(\lambda) - 1).$$

Nå er det mulig å vise at translasjon og rotasjon i rom og lorentzboost er de eneste lineære operatorene som bevarer minkowskiproduktet men dette er litt for hardt for oss. Rapiditeten λ er analog til θ i rotasjoner, og er additiv på samme måte. Hastigheter må nemlig adderes etter Einsteins hastighetsaddisjonslov og derfor er rapiditeten enklere å forholde seg til.¹⁵

9 Vis at $\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = \Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2)$ når Λ er en ren boost.

En nyttig matrise er ellers

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10 Vis at $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Lorentzgruppen¹⁶ består av alle transformasjoner som bevarer minkowskiproduktet, og disse kan man tenke på som generaliserte rotasjoner i tid og rom. Lorentztransformasjonene er en undergruppe som tar seg av alt som har med bytte mellom inertialsystemer å gjøre, og alembertoperatoren kan du tenke på som en slags tid-rom-analog til laplaceoperatoren. Nå kan vi vise at alembertoperatoren får den samme verdien før og etter lorentztransformasjon akkurat som vi gjorde med laplaceoperatoren og vanlige rotasjoner.

11 Værsgod.



¹⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity>

¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Velocity-addition_formula

¹⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_group

UKENS NØTTER

- 1 Et elektron kjører tog mens et annet elektron står og ser på. Toget har farten v . Lorentzkraften¹⁷ på det ene elektronet fra det andre er

$$F = q(E + v \times B).$$

Det er klart at begge partiklene omslutes av hvert sitt elektriske felt. Men er det et magnetisk felt? Hvis ja, hvilket av dem lager det?

- 2 Bruk togekspperimentet til å vise at lengde krympes i fartsretningen.



¹⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force

4 - 12 - KRASJKURS I RESIDYREGNING

For å beregne integralet

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz$$

der Γ er en glatt kurve som omslutter origo, kan vi skrive

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

og integrere ledd for ledd:

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz = \int_{\Gamma} dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2} dz + \dots$$

Disse integralene har vi beregnet i TMA4111 og alle blir null unntatt

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

slik at

$$\int_{\Gamma} e^{1/z} dz = 2\pi i.$$

Dette er en strategi som har overraskende bred gyldighet. La oss prøve å bruke det samme trikset på noen andre integraler. La Γ være enhetssirkelen i det komplekse planet, traversert én gang mot klokken, og beregn

$$\boxed{1} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$$

$$\boxed{2} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz$$

$$\boxed{3} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz$$

$$\boxed{4} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$$



Tar vi utgangspunkt i maclaurinrekken til sinus- og cosinusfunksjonen, får vi

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

og bruker vi trikset, ser vi at

$$\boxed{1} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \quad \boxed{2} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz = 0 \quad \boxed{3} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz = 0 \quad \boxed{4} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i$$

Komplekse deriverbare funksjoner oppfører seg annerledes enn alt annet du har sett. En reell funksjon kan fint ha knekk i den fjerde, femte eller attendederiverte. For eksempel eksisterer den andrederiverte til $x^4 \sin(1/x)$, men ikke den tredjederiverte. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

er glatt men ikke analytisk; alle de deriverte eksisterer overalt (selv i $x = \pm 1$), men det finnes ingen a slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \dots$$

på et åpent intervall som inneholder $x = 1$ eller $x = -1$. Komplekse funksjoner opplever ikke disse sjatteringene hva angår regularitet. En kompleks funksjon som er deriverbar i et punkt z_0 kan alltid skrives som en taylorrekke i en omegn rundt z_0 . Det finnes ingen mellomting mellom deriverbar og analytisk, og derfor sier vi bare **analytisk** eller **holomorf**.¹ Funksjonene i oppgavene over har singulariteter i origo, og derfor er de ikke analytiske, men som du ser, kan man rekkeutvikle dem om singularitetene allikevel. La Γ fortsatt være enhetssirkelen, og beregn

$$\boxed{5} \int_{\Gamma} \frac{\cos z^2}{z^5} dz \quad \boxed{6} \int_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{z^8} dz \quad \boxed{7} \int_{\Gamma} e^z + e^{1/z} dz \quad \boxed{8} \int_{\Gamma} e^{z+1/z} dz$$



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Holomorphic_function

En funksjon f sin rekkeutvikling om et singulært punkt med både positive og negative potenser av z kalles en **laurentrekke**.² Summen av de negative potensene kalles **prinsipaldelen** til rekkeutviklingen. Vi bruker prinsipaldelen til å klassifisere singularitetene til f . Dersom den laveste negative potensen er $-n$, sier vi at det singulære punktet er en **pol av orden n** , så

$$\frac{\sin 2z}{z^8} = \frac{1}{z^8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{z^7} - \frac{8}{z^5 3!} + \frac{32}{z^3 5!} - \dots$$

har en pol av orden syv i origo.³ Dersom prinsipaldelen har uendelig mange ledd, sier vi at f har en **essensiell singularitet**, slik som

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

8 Finn prinsipaldelen til

$$f(z) = e^{z+1/z}.$$

Det som nå er et faktum er at om du slår en sirkel Γ om et singulært punkt z_0 og integrerer f , er det kun koeffisienten til $1/z$ som gir bidrag til integralet så lenge det ikke er andre singulære punkter innenfor Γ . Denne koeffisienten kalles **residyet** til f i z_0 og skrives

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

Så og si all integrasjon av komplekse funksjoner består av å få tak i denne koeffisienten og gange med $2\pi i$. Forresten trenger ikke Γ være en sirkel, for Cauchys integralteorem, som sier at

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

så lenge f er analytisk på en åpen enkeltsammenhengende mengde som inneholder Γ , impliserer at dersom du deformerer Γ litt, får integralet den samme verdien så lenge du ikke dytter inn noen andre singulariteter innenfor Γ . Dersom Γ omslutter flere singulariteter, legger du bare sammen residylene og ganger alt med $2\pi i$ - dette kalles **residyteoremet**.⁴ Det finnes formler for å beregne residyet uten å sette opp laurentrekken til f i z_0 . Noen ganger er det kjappere å finne residylene på denne måten, men som oftest er det enklest å manipulere laurentrekken for hvert singulære punkt til man kan lese av residylene fra disse.

9 Finn og klassifiser polene til

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

og

10 beregn residylene

og finn

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz$$

der Γ er en glatt enkeltsammenhengende kurve som omslutter

11 både $z_0 = 1$ og $z_0 = 0$. 12 $z_0 = 1$ men ikke $z_0 = 0$. 13 $z_0 = 0$ men ikke $z_0 = 1$.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Laurent_series

³https://en.wikipedia.org/wiki/Zeros_and_poles

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_theorem

Den klassiske ingeniøransettelse av residyreknig er formelen for invers laplacetransform. Dersom $x(t)$ har laplacetransform $X(s)$, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \quad ?$$

Denne har laplaceomvending, men ikke fourieromvending. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke. La oss begynne med å skrive $y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, og se at

$$X(s) = X(\sigma + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + i\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{y}(\omega)$$

Dersom vi nå velger σ slik at y kan fourieromvendes, følger det ved variabelskiftet $s = \sigma + i\omega$ at

$$x(t) = e^{\sigma t} y(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} X(s) e^{st} ds$$

Dette integralet er ikke så godt å beregne, men her kan residyteoremet hjelpe oss. La oss se på

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

I følge formelen over, er

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds$$

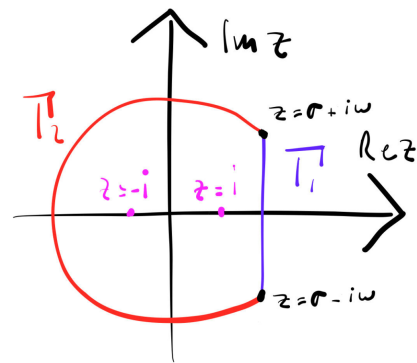
men hvis vi legger til en del av en sirkel slik at vi får en lukket kontur Γ (se figuren til høyre), kan vi bruke residyteoremet, og skrive

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds \right) = \sum \operatorname{res} \frac{e^{st}}{s^2 + 1}$$

dersom σ er stor nok til at begge singularitetene til $1/(s^2 + 1)$ ligger inni Γ .

[14] Vis at summen av residylene til $\frac{e^{st}}{s^2 + 1}$ blir $\sin t$.

[15] Vis at integralet $\int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{s^2 + 1} ds$ går mot null når $\omega \rightarrow \infty$ fordi $|e^{st}| \leq e^{\sigma t}$ på Γ_2 når $t > 0$, mens nevneren vokser som ω^2 .



Cauchys integralformel åpner for en alternativ oppskrift for koeffisientene til taylorrekken til f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Høyresiden av Cauchys generaliserte integralformel gir også mening for negative n , så her har du faktisk en formel for alle leddene i laurentrekken til f .

16 Hva blir koeffisienten til $n = -1$?

Det finnes raske formler for å beregne residyer. Noen av dem er relativt enkle å utlede.

17 Vis at dersom z_0 er en enkel pol, er

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Formelen over generaliseres til

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z - z_0)^n f(z) \right).$$

18 Gjør oppgave 10 på nytt.

