

4 - 1 - TRIPPELINTEGRALER - LF

- 1 Her er det bare å antiderivere slik som i dobbeltintegraler. Husk å holde tungen beint i munnen på hvilken variabel du antideriverer:

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^2 \left(x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_2 dx_1$$



$$= \int_0^1 \int_0^2 3x_1^2 x_2 + \frac{9}{2} dx_2 dx_1$$

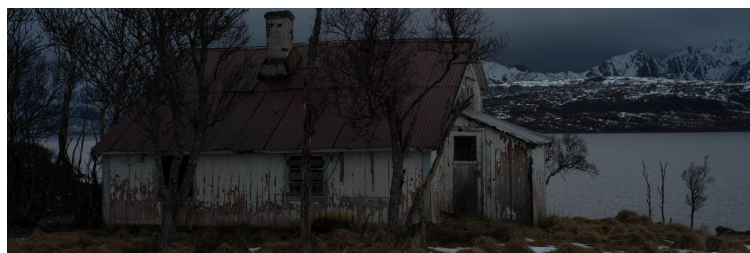
$$= \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{3}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{9}{2} x_2 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1$$

$$= \int_0^1 6x_1^2 + 9 dx_1 = 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11$$

Dersom integranden måles i masse per volum, forteller det innerste integralet deg hvor mye masse per areal som sitter over punktet med koordinater (x_1, x_2) . Tenk at du er geolog og driller en sedimentprøve og måler vekten av den for å estimere masse per areal under punktet der du står. Eller at du står på taket av et hus og driller ned i huset og veier - treffer du bare isolasjon og luft er det lav vekt per areal, treffer du tilfeldigvis mønsåsen eller en sperre eller en laftestokk eller midt i en vegg, er det høyere vekt per areal.



For å forstå de to innerste integralene må du tenke at du står ved siden av huset og lurert på hvor mye masse det er i huset per meter hus, tenk at du kapper huset med en motorsag på forskjellige steder, og måler masse per meter for hvert tverrsnitt bortover.



2 Her er en annen rekkefølge:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^3 \int_0^2 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_2 dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 \left(\frac{1}{2} x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^3 2x_1^2 + 2x_3 \, dx_3 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \left(2x_1^2 x_3 + x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_1 \\
 &= \int_0^1 6x_1^2 + 9 \, dx_1 \\
 &= 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11
 \end{aligned}$$

Jeg sa du skulle gjøre det på alle seks måter, men det er vel litt overkill.

3 Planet som går gjennom $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ og $(0, 0, 1)$ er $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, og dette skjærer $x_1 x_2$ -planet i linjen $x_2 = 1 - x_1$. Det innerste integralet, altså det som regner ut masse per areal over et punkt i $x_1 x_2$ -planet, er

$$\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3.$$

Denne funksjonen må nå dobbeltintegreres over korrekt område i $x_1 x_2$ -planet:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1$$

Å regne det ut er bare å gjøre som i oppgave 2, huske å merke tydelig hva som skal inn i hvilken variabel slik:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left(x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=1-x_1-x_2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1^2 x_2 (1 - x_1 - x_2) + \frac{1}{2} (1 - x_1 - x_2)^2 \, dx_2 dx_1
 \end{aligned}$$

og så videre.

4 Dette området ser ut som pyramiden i Giza, og flaten $x_3 = 1 - |x_1| - |x_2|$ skjærer $x_1 x_2$ -planet i $|x_1| + |x_2| = 1$. Det konseptuelt enkleste er å brute-force integralet og sette opp ett integral

for hver kvadrant i x_1x_2 -planet:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\
 & + \int_{-1}^0 \int_0^{1+x_1} \int_0^{1+x_1-x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\
 & + \int_{-1}^0 \int_{-1-x_1}^0 \int_0^{1+x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\
 & + \int_0^1 \int_{-1+x_1}^0 \int_0^{1-x_1+x_2} x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1
 \end{aligned}$$

5 Massesenteret til et rektangel er ikke så spennende, men vi kan ta tetraederet. Massen er

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1 \\
 &= \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (1-x_1-x_2) \, dx_2 dx_1 \\
 &= \rho \int_0^1 \left(x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\
 &= \rho \int_0^1 (1-x_1-x_1(1-x_1) - \frac{1}{2}(1-x_1)^2) \, dx_1 = \frac{\rho}{6}
 \end{aligned}$$

(dette kunne vi også funnet med formelen for volum av pyramide) slik at massesenteret blir

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) \, dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) \, dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) \, dx \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix}.$$

Dette ser ut som tre forskjellige integraler, men på grunn av symmetrien i problemet er det egentlig bare ett. Vi beregner

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1 (1-x_1-x_2) \, dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^1 x_1 \left(x_2 - x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2 \right)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} dx_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 (1-x_1)^2 \, dx_1 = \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

og massesenteret sitter følgelig i

$$6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \, dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

6 Dette blir helt forferdelig:

$$\iiint_{\Omega} f = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \int_0^{\sqrt{1-x_2^2-x_1^2}} f(x) \, dx_3 dx_2 dx_1$$

7 Dette blir determinanten til matrisen ganget med volumet til enhetskuben, altså $4 \cdot 1$.

$$8 \quad |g'(s, \theta, z)| = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -s \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & s \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = s$$

9 Integrasjonsområdet er bildet av en rektangulær boks under sylinderkoordinatavbildningen, så dette integralet blir veldig greit:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (s^2 + z^2) \, ds d\theta dz &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3 + sz^2 \, ds d\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} s^4 + \frac{1}{2} s^2 z^2 \right) \Big|_{s=0}^{s=3} d\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} + \frac{9}{2} z^2 \, d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^5 \frac{81}{4} + \frac{9}{2} z^2 \, dz = \pi \left(\frac{5 \cdot 81}{2} + 125 \cdot 3 \right) \end{aligned}$$

10 Funksjonen

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = s$$

ser ut som en fotballkjegle som står på hodet, og skjærer kuleskallet

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{1 - s^2}$$

i $s = 1/\sqrt{2}$, så volumet er

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} (\sqrt{1-s^2} - s) s ds d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} s\sqrt{1-s^2} - s^2 ds d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2} - \frac{1}{3}s^3 \right)_{s=0}^{s=1/\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}((1/2)^{3/2} - 1) - \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} d\theta = \frac{2}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

På grunn av oppgaveformuleringen sitter det et identisk volum på undersiden av x_1x_2 -planet, så korrekt volum blir

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta = \frac{4}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- 11 Ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ blir $0 \leq z \leq 1 - s$ i sylinderkoordinater. Denne kjeglen står motsatt av den i forrige oppgave og skjærer x_1x_2 -planet i enhetssirkelen. Siden $x_2 \geq 0$ er kjeglen kapp i to langs et vertikalt plan gjennom midten av kjeglen, så volumet blir

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{1-s} z s dz d\theta ds &= \int_0^1 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} z^2 s^2 \right)_{z=0}^{z=1-s} d\theta ds \\
 &= \int_0^1 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} (1-s)^2 s^2 \right) d\theta ds \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-s)^2 s^2 ds = \frac{\pi}{60}.
 \end{aligned}$$

- 12 $g'(r, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \phi$, så volumelementet blir $r^2 \sin \phi$

- 13 Massesenter er gitt ved

$$\frac{1}{\iiint_{\Omega} \rho(x) dx} \begin{pmatrix} \iiint_{\Omega} x_1 \rho(x) dx \\ \iiint_{\Omega} x_2 \rho(x) dx \\ \iiint_{\Omega} x_3 \rho(x) dx \end{pmatrix}.$$

En kvart enhetskule i kulekoordinater som ligger slik at $x_2 \geq 0$ og $x_3 \geq 0$, beskrives av ulikhetene

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,$$

og siden massetettheten er konstant, kansellerer denne. På grunn av symmetri vet vi at x_1 -koordinaten er 0:

$$\iiint_{\Omega} x_1 \, dx = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta dr = 0$$

samt at x_2 - og x_3 -koordinatene må være like:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x_2 \, dx &= \iiint_{\Omega} x_3 \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi} r^3 \, d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Volumet til en kvart enhetskule er $\pi/3$, så vi kan nå beregne

$$\frac{\rho \iiint_{\Omega} x_2 \, dx}{\rho \iiint_{\Omega} dx} = \frac{\pi/8}{\pi/3} = \frac{3}{8}$$

slik at massesenteret sitter i $(0, 3/8, 3/8)$. Dette skalerer selvfølgelig til vilkårlig radius, slik at om radien er r er massesenteret i $(0, 3r/8, 3r/8)$. For en åttendels kule er det bare å bytte ut π med $\pi/2$ i integrasjonsgrensene for θ og bruke at alle koordinatene må være like, slik at massesenteret sitter i $(3/8, 3/8, 3/8)$. Samme med halvkulen, bruk symmetri og bruk 2π som øvre grense i θ og oppdag at massesenteret sitter i $(0, 0, 3/8)$.

- 15 Her er det nok best å bruke sylinderkoordinater. Flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ blir $z = \sqrt{s^2 - 4}$ i sylinderkoordinater, så vi kan integrere oss langs s fra $s = 0$ til $s = \sqrt{4 + z^2}$ innerst, og få

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4+z^2}} s \, ds \, d\theta \, dz = \pi \int_0^{\sqrt{5}} (4 + z^2) \, dz = \frac{17\sqrt{5}}{3} \pi.$$

- 16 Når φ går fra 0 til π , går $\cos \varphi$ fra 1 til -1 , så likningen

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$

beskriver en slags litt pæreformet sak i $\mathbb{R}^3$. Det er nok best å integrere seg fra 0 til denne kurven i r først. Volumet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{4-\cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (4 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{6} (5^4 - 3^4).$$

4 - 2 - NABLAOPERATOREN I - LF

1 Jacobimatrisen blir identitetsmatrisen, divergensen blir tre og rotasjonen null.

5 Jacobimatrisen blir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

divergensen blir null og rotasjonen

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 Det elektriske feltet fra en punktladning q plassert i origo er

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3},$$

og jacobimatrisen var det siste vi beregna i 4111:

$$\nabla E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix}$$

Dersom $x \neq 0$, er

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{|x|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_k^2}{|x|^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{|x|^3} - \frac{3}{|x|^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{x}{|x|^3} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_3x_2}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} + 3\frac{x_1x_2}{|x|^5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8 Denne blir null.

9 Denne er kjedelig men lett:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot g) &= \nabla \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right), \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \right)^T \\ &= \left(\nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}, \nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}, \nabla \cdot \frac{\partial g}{\partial x_3} \right)^T.\end{aligned}$$

10 Også null.

11 Denne er enda kjedeligere, men vi trenger den når vi skal utlede bølgelikningen fra Maxwells lover. Rotasjonen til g er

$$\nabla \times g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

og tar vi dobbelrotasjonen, får vi

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times g &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ &= \nabla(\nabla \cdot g) - \Delta g.\end{aligned}$$

12 For sylinderkoordinater er jacobimatrisen gitt ved

$$g'(s, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -s \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & s \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den første og siste kolonnen er allerede korrekt normaliserte, mens for den i midten er det bare

å dele ut s . Basisen er altså

$$(e_s \quad e_\theta \quad e_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For kulekoordinater har vi

$$g'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

og normaliserer vi kolonnene, får vi kulekoordinatbasisen

$$(e_r \quad e_\theta \quad e_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta & \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Merk at e_r er det samme som koordinatene til x på enhetskuleskallet, og at e_θ er enhetstangentvektoren til enhetssirkelen i x_1x_2 -planet.

- 13 Dette blir pent og likner mer på den varianten du lærte på gymnaset:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_r}{r^2}$$

- 14 Det som er skummelt her er at vi har

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

så dersom vi skriver $E(r, \theta, \phi)$, sier vi

$$E(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + \theta^2 + \phi^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix}$$

men mener egentlig

$$E(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Det ryddigste er derfor å skrive

$$E = h(r, \theta, \phi) = f(g(r, \theta, \phi))$$

og så holde nøye styr på hva vi mener med f , g og h . La oss først derivere f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{|x|^5} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|x|^3} I - \frac{3}{|x|^5} xx^T \right) \end{aligned}$$

Kulekoordinater er gitt ved

$$g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

slik at

$$g'(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} h'(r, \theta, \phi) &= f'(g(r, \theta, \phi))g'(r, \theta, \phi) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(I - 3 \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}^T \right) \\ &\quad \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

som vi kan gange ut og forenkle, men i dette tilfellet er det faktisk enklere å sette kulekoordinatene inn i uttrykket for E (nå med korrekt notasjon)

$$E = h(r, \theta, \phi) = f(g(r, \theta, \phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} r^{-2} \cos \theta \sin \phi \\ r^{-2} \sin \theta \sin \phi \\ r^{-2} \cos \phi \end{pmatrix}$$

og så derivere på direkten:

$$\begin{aligned} h'(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -2r^{-3} \cos \theta \sin \phi & -r^{-2} \sin \theta \sin \phi & r^{-2} \cos \theta \cos \phi \\ -2r^{-3} \sin \theta \sin \phi & r^{-2} \cos \theta \sin \phi & r^{-2} \sin \theta \cos \phi \\ -2r^{-3} \cos \phi & 0 & -r^{-2} \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ -2 \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ -2 \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 - 3 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM IV - LF

- 1 Her er det viktig å forstå at nå har vi en funksjon h som gir oss tetthet eller konsentrasjon eller et annet skalarfelt, og så har vi putta kulekoordinatene

$$x = g(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

inn i denne og fått en ny funksjon

$$h(r, \theta, \varphi) = f(g(r, \theta, \varphi)).$$

Kjerneregelen gir

$$h'(r, \theta, \varphi) = f'(g(r, \theta, \varphi))g'(r, \theta, \varphi),$$

som skrevet ut på matriseform blir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial \theta} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} (e_r \quad r \sin \varphi e_\theta \quad r e_\varphi) \end{aligned}$$

slik at

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial e_r} \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = r \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial e_\theta} \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = r \frac{\partial f}{\partial e_\varphi}$$

Vi vet at $g'(r, \theta, \varphi)$ har ortogonale kolonner, så den er lett å invertere, håper du husker alt du lærte om ortogonale matriser i TMA4106. Vi ganger med den inverse av $g'(r, \theta, \varphi)$ fra høyre og får

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial \theta} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r^T \\ \frac{1}{r \sin \varphi} e_\theta^T \\ \frac{1}{r} e_\varphi^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

eller

$$\nabla f = \left(e_r \quad \frac{1}{r \sin \varphi} e_\theta \quad \frac{1}{r} e_\varphi \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

- 2 La oss si at du har en liten rektangulær boks, parallell med koordinataksene og med ett hjørne i x og borterste hjørne i $x + h$. Volumet til boksen er $h_1 h_2 h_3$, utnormalvektorer for de seks sidene er bare standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Vi kan estimere den totale utstrømningen gjennom de seks sidene slik, håper du husker fluksintegraler fra TMA4111:

$$\left(f_1(x + h_1 e_1) - f_1(x) \right) h_2 h_3 + \left(f_2(x + h_2 e_2) - f_2(x) \right) h_1 h_3 + \left(f_3(x + h_3 e_3) - f_3(x) \right) h_1 h_2.$$

Tar vi ut volumet, får vi

$$h_1 h_2 h_3 \left(\frac{f_1(x + h_1 e_1) - f_1(x)}{h_1} + \frac{f_2(x + h_2 e_2) - f_2(x)}{h_2} + \frac{f_3(x + h_3 e_3) - f_3(x)}{h_3} \right).$$

og deler vi på volumet og lar $h \rightarrow 0$, får vi

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

Kontrollvolumtankegangen er corny og fremstår ved første øyekast som litt heuristisk. Men man støter på den så ofte i faglitteratur at det er en god investering å bli vant til tankegangen. Du skal lete bra for å finne en bok om elektromagnetisme eller fluidmekanikk som ikke bruker kontrollvolum til alt mellom himmel og jord.

- 3] Denne gjør vi på samme måte som forrige oppgave, det er bare litt mer jobb å sette opp alle fluksintegralene. La oss ta et rektangulært område i (r, θ, φ) -koordinatsystemet, med det ene hjørnet i $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ og det andre i $(r_2, \theta_2, \varphi_2) = (r_1 + h_r, \theta_1 + h_\theta, \varphi_1 + h_\varphi)$. Volumet av bildet av dette under kulekoordinattransformasjonen er sånn omtrent

$$r_1^2 \sin \varphi_1 h_r h_\theta h_\varphi$$

og bildet du får er omtrent det du får om du tar en enorm sirkelsag og skjærer ut en bit av jordskorpen, loddrett ned til en viss dybde og langs et rektangel på overflaten. (Noe som ligger dønn ned på jordskorpen vil jo ikke være et rektangel på grunn av jordkrumningen, men du skjønner hva jeg mener.) Fluksintegralene i retningene til e_r , e_θ og e_φ blir henholdsvis (håper du husker fluksintegraler fra TMA4111 - dette blir et svineri)

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(f_r(r_1 + h_r, \theta, \varphi)(r_1 + h_r)^2 - f_r(r_1, \theta, \varphi)r_1^2 \right) \sin \varphi d\theta d\varphi \approx \\ & \quad \left(f_r(r_1 + h_r, \theta_1, \varphi_1)(r_1 + h_r)^2 - f_r(r_1, \theta_1, \varphi_1)r_1^2 \right) \sin \varphi_1 h_\theta h_\varphi \\ & \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(f_\theta(r, \theta_1 + h_\theta, \varphi) - f_\theta(r, \theta_1, \varphi) \right) r dr d\varphi \approx \\ & \quad \left(f_\theta(r_1, \theta_1 + h_\theta, \varphi_1) - f_\theta(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right) r_1 h_r h_\varphi \\ & \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_\varphi(r, \theta, \varphi_2) r \sin \varphi_2 - f_\varphi(r, \theta, \varphi_1) r \sin \varphi_1 dr d\theta \approx \\ & \quad \left(f_\varphi(r_1, \theta_1, \varphi_1 + h_\varphi) \sin(\varphi_1 + h_\varphi) - f_\varphi(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sin \varphi_1 \right) r_1 h_r h_\theta. \end{aligned}$$

Legger vi sammen alle disse og deler på volumet får vi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_1^2 \sin \varphi_1 h_r h_\theta h_\varphi} \left(\left(f_r(r_1 + h_r, \theta_1, \varphi_1)(r_1 + h_r)^2 - f_r(r_1, \theta_1, \varphi_1)r_1^2 \right) \sin \varphi_1 h_\theta h_\varphi \right. \\ & \quad + \left(f_\theta(r_1, \theta_1 + h_\theta, \varphi_1) - f_\theta(r_1, \theta_1, \varphi_1) \right) r_1 h_r h_\varphi \\ & \quad \left. + \left(f_\varphi(r_1, \theta_1, \varphi_1 + h_\varphi) \sin(\varphi_1 + h_\varphi) - f_\varphi(r_1, \theta_1, \varphi_1) \sin \varphi_1 \right) r_1 h_r h_\theta \right) \end{aligned}$$

og lar vi volumet gå mot null, blir det

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi f_\varphi).$$

Litt grisete ble dette også. Men ikke så ille som om vi skulle satt kulekoordinatene inn i f og regna i vei slik som vi gjorde med polarkoordinater i TMA4111. Jeg gjorde ellers hele greia i forelesning 27. januar økt 2, se den for mer utfyllende gjennomgang.¹

- 4 Laplaceoperatoren får vi enkelt tak i ved å sette svaret fra oppgave 1 inn i denne og få

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

- 5 Nei fy og faen det gidder vi ikke, som min svigerfar ville sagt. Du skal få slippe å kunne denne til eksamen.
- 6 Dette er egentlig bare oppgave 2 på nytt. Kontrollvolumet er en slags oppfinnelse som hjelper oss å forstå sammenhengen mellom ting på integral- og differensialform.
- 7 Banalt! Divergensen er 2 og volumet mellom paraboloidene er trivielt å beregne, dette gjorde vi i TMA4111. Setter vi paraboloidene lik hverandre, får vi

$$x_1^2 + (x_2 + 1)^2 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$$

som gir

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2 = 10$$

eller

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

og volumet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2) r dr d\theta = 16\pi$$

så korrekt svar er 32π .

- 8 Her må du regne ut fluksen gjennom topp og bunn og så trippelintegrere divergensen (som er 3) over volumet og så gjøre opp totalregnskapet og se hva som mangler - det er dette som går ut gjennom den krumme delen av ∂T . Jeg gjorde en liknende oppgave i aller siste tirsdagsforelesning etter påske.
- 9 Divergensteoremet sier at

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f = \int_{\partial \Omega} f \cdot dS$$

¹<https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=9380592d-cd1d-427a-b982-b3af00c0af23>

Dersom $f = \nabla u$, får vi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u = \int_{\Omega} \Delta u$$

på den ene siden, og

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

på den andre siden. Divergensteoremet for skalarfelt lyder altså slik:

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

10 Vi antar at vektorfeltet er

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da blir divergensteoremet

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \int_{\partial\Omega} f_1 e_{n1} dS$$

der e_{n1} er den første komponenten i e_n . Tilsvarende gjelder for f_2 og f_3 , så vi kan skrive opp den generelle regelen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} u e_{nk} dS.$$

11 Vi kan putte uv inn i den forrige formelen, og få

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} u v e_{nk} dS.$$

som kalles **delvisintegrasjonsformelen** i flere dimensjoner. Dette er en generalisering av formelen du er vant til fra skolen.

13 Litt herjing med nablaoperatoren gir at

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u$$

og integrerer vi denne og bruker divergensteoremet, får vi

$$\int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} v \Delta u dx$$

som kalles **Greens første formel**.

4 - 4 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM V - LF

- 1 Arbeidet som F gjør på partikkelen er

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot ds &= \int_a^b (-F_1(r \cos \theta(t), r \sin \theta(t)) \sin \theta(t) + F_2(r \cos \theta(t), r \sin \theta(t)) \cos \theta(t)) r \dot{\theta}(t) dt \\ &= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} r e_s \times (F_1 e_1 + F_2 e_2) \cdot e_3 d\theta \\ &= \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} x \times F \cdot e_3 d\theta.\end{aligned}$$

Innmaten i dette integralet er dreiemomentet til F om origo, så huskeregelen er at dreiemomentet er den størrelsen du integrerer med hensyn på θ for å finne arbeid på noe som dreier om en rotasjonsakse.

- 2 Vi har

$$x(t) = e_1 r \cos \theta(t) + e_2 r \sin \theta(t)$$

og

$$v(t) = -e_1 r \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) + e_2 r \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

så dreieimpulsen blir

$$L = x \times p = m r^2 \dot{\theta} e_3.$$

- 3 La oss for enkelhets skyld anta at m er konstant. Vi deriverer L og bruker $F = \dot{p}$ og at kryssproduktet mellom parallelle vektorer er null, og får

$$\dot{L} = \dot{x} \times p + x \times \dot{p} = x \times F.$$

Hvis det ikke er dreiemoment er dreieimpulsen konserverert siden $\dot{L} = 0$. Å beregne dreieimpulsen for en ting med utstrekning er et trippelintegral, men hvis du ser på partikkelen i oppgaven over, så ser du at om r minker må noe annet øke og det eneste som kan øke er $\dot{\theta}$. Så om du tenker på en kunstløper som en partikkel i posisjonen til kunstløperens massesenter, vil rotasjonshastigheten øke om massesenteret trekkes inn mot rotasjonsaksen.

- 4 Denne er litt morsom. Dersom skiven er sentrert i origo og har rotasjonshastigheten ω gitt i radianer per sekund, er hastighetsvektoren i punktet med koordinater $(s, \theta, 0)$ gitt ved

$$\begin{aligned}v &= s \omega e_\theta \\ &= s \omega (-e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta) \\ &= \omega (-e_1 x_2 + e_2 x_1) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Divergensen til denne er null, men rotasjonen er $2e_3\omega$. Jeg vet ikke om det finnes noe godt norsk ord for størrelsen $\frac{1}{2}\nabla \times f$, men på engelsk kalles denne "rotation", mens det vi kaller "rotasjon" kaller de "curl".

- 5 Lureoppgave, dette er det samme som forrige oppgave.
- 6 Nå skal vi foregripe begivenhetenes gang og bruke formelen for rotasjon i sylinderkoordinater og få at

$$\nabla \times f = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s f_\theta) e_z = \frac{1}{s} e_z$$

siden $f_\theta = 1$ og $f_s = f_z = 0$.

- 7 Her er $\nabla \times f = 0$, noe som er åpenbart for alle som kjenner magnetfeltet rundt en rett strømførende ledning.

- 8 Her er $\nabla \times f = -e_z/s^3$.

- 9 Denne skal du få slippe å kunne til eksamen, men utledningen står her:
https://en.wikipedia.org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates#endnote_Alpha

- 11 Dersom f er rotasjonsfritt finnes en potensialfunksjon V , og om gradienten til denne er divergensfri, må V være harmonisk. Så både divergens- og rotasjonsfrihet impliserer at det finnes et harmonisk skalarpotensiale. Av og til er det innlysende hva som er korrekt potensiale, og det er bare å skrive opp og dobbeltsjekke, mens av og til må man regne. Her kommer et utvalg:

Vektorfeltet (x_1, x_2, x_3) har potensialfunksjon $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2 + c$ der c er en vilkårlig konstant.

Den laminære vannstrømmen $(x_3, 0, 0)$ er divergensfri, og her vil du kanskje oppdage at det finnes massevis av vektorpotensialer, for eksempel $(0, -\frac{1}{2}x_3^2, 0)$ gjør jobben, men det gjør også $(0, -\frac{1}{2}x_3^2, 0) + g(x)$ der g er et tilfeldig rotasjonsfritt vektorfelt. Av og til må man velge potensialet på en spesiell måte - det skal vi se i neste uke.

Coulombfeltet har potensialfunksjon $-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$, som vi sjekket i TMA4111.

Den roterende skiva er også divergensfri, så her finnes det mange mange vektorpotensialer - for eksempel $-\frac{\omega}{2}(0, 0, x_1^2 + x_2^2)$ funker fint.

Vektorfeltene i oppgave 6-8 i denne økten er alle divergensfrie, dette er lett å se fra formelen for divergens i sylinderkoordinater:

$$\nabla \cdot f = \frac{1}{s} \frac{\partial s f_s}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Så de har vektorpotensialer. Rotasjonen sjekket vi i oppgave 5-8 og det var kun den i oppgave 7 som ikke hadde rotasjon, så den er gradienten til en harmonisk funksjon. Gradientformelen

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s} e_s + \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$$

gir

$$\frac{1}{s} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{s},$$

slik at $V = \theta + c$ der c er konstant gjør jobben. For den i oppgave 6 vil for eksempel $z e_s$ eller $-s e_z$ gjøre jobben, og du klarer nok å finne noe på oppgave 8.

- 12 Skjæringskurven mellom $x_3 = x_1^2 + (x_2 + 1)^2$ og $x_3 = 10 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2$ sin projeksjon ned i x_1x_2 -planet er

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

og en parametrisering for skjæringskurven er for eksempel

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ 4 \cos^2 \theta + (1 + 2 \sin \theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ 5 + 4 \sin \theta \end{pmatrix}$$

som helt klart er en ellipse i $\mathbb{R}^3$, oppgaven er jo designet for at det skal bli en pen skjæringskurve. Dette skjer selvfølgelig hele tiden i det virkelige liv - i atomkraftverk er reaktorens tverrsnitt alltid enhetssirkelen og alle vindmøller produserer energi per tidsenhet som er en heltallsmultippel av π , dette vet alle. Integralet

$$\oint_{\Gamma} f \cdot ds$$

er selvfølgelig altfor grisete å beregne rett frem, en så grisete beregning ville aldri forekommet i analyse av et realistisk prosessanlegg, så vi bruker heller Stokes' teorem og beregner

$$\int_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

der Σ er den ene av paraboloidene, for eksempel

$$h(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \end{pmatrix}.$$

Denne har partiellderiverte

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2(x_2 + 1) \end{pmatrix}$$

og utnormalvektor

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \times \frac{\partial h}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2(x_2 + 1) \\ 1 \end{pmatrix},$$

som peker oppover. Rotasjonen til f er

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og integralet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS &= 2 \iint_{\Omega} (x_2, -x_1, -1) \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2(x_2 + 1) \\ 1 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \\ &= 2 \iint_{\Omega} 2x_1 - 1 dx_1 dx_2 = -8\pi. \end{aligned}$$

der Ω er en sirkelskive i x_1x_2 -planet, sentrert i origo og med radius 2.

- 13 Ellipsoideskallet skjærer x_1x_2 -planet i enhetssirkelen, så her er det bare å regne ut den andre siden av stokes' teorem slik:

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot ds = 5 \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 10\pi,$$

gitt at utnormalen i flateintegralet i oppgaven peker oppover.

- 14 Dette er lett å huske om man husker stokes teorem siden stokes teorem sier at

$$\oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds = 0$$

dersom $\nabla \times f = 0$.

- 15 Det er viktig at flaten Σ er **orienterbar**:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Orientability>

De fleste flater du kommer til å støte på er det. Det mest kjente unntaket er møbiusflaten:

https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_strip

Noen studenter i TMA4106 tipsa meg om denne:

<https://www.youtube.com/watch?v=sToqbqP0tFk&t=484s>

- 16 Vi skriver divergensteoremet slik:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot dS$$

og Stokes' teorem slik:

$$\int_{\partial\Sigma} f \cdot ds = \int_{\Sigma} \nabla \times f \cdot dS$$

4 - 5 - ELEKTROMAGNETISME - LF

0 Så $\dot{f}(x, t) = x_3$ og $\nabla f(x, t) = (x_2, x_1, t)$.

1 Maxwells likninger på differensialform er:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\dot{B}$$

$$c^2 \nabla \times B = \dot{E} + \frac{J}{\epsilon_0}$$

De to første kan vi trippelintegrere over området $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot E \, dx = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot B \, dx = 0$$

og massere med divergensteoremet på venstre side:

$$\iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx$$

$$\iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$$

De to siste kan vi fluksintegrere over flaten $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times E) \cdot dS = - \iint_{\Sigma} \dot{B} \cdot dS$$

$$c^2 \iint_{\Sigma} (\nabla \times B) \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \iint_{\Sigma} \dot{E} \cdot dS$$

og ta tidsderivasjonen ut av integraltegnet:

$$\iint_{\Sigma} (\nabla \times E) \cdot dS = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS$$

$$c^2 \iint_{\Sigma} (\nabla \times B) \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

og massere med Stokes' teorem på venstre side:

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS$$

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS$$

- 3 Likningen $\nabla \times E = 0$ impliserer at det finnes V slik at $E = -\nabla V$, og likningen

$$\rho/\epsilon_0 = \nabla \cdot E = -\nabla \cdot (\nabla V) = -\Delta V$$

er Poissons likning. Dette er en dreven variant av Laplaces likning og vi kommer tilbake til det om noen uker. Potensialet V er også kjent som spenning.

- 4 Hvis du har en punktladning og antar at feltstyrken er den samme i alle retninger ut fra ladningen, kan vi slå en kule Ω om ladningen med radius r og ladningen i sentrum og se at

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, dx = \int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r)r^2 \sin \varphi \, d\theta d\varphi = 4\pi r^2 E(r)$$

slik at

$$E(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0}.$$

Siste ord er ikke sagt om dette, følg med i uken om harmoniske funksjoner.

- 5 En punktladning er en liten ting som sitter inni et område Ω og sørger for at feltet dens har netto fluks ut av Ω . Men vi har alltid $\int_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0$, så Gauss' lov for magnetisme sier at det ikke finnes noe slikt. Ingen har ihvertfall funnet en så langt.

- 6 Så hvis vi tenker at det går en uendelig lang strømførende ledning langs z -aksen og så legger vi en liten sirkelskive Σ med radius s rundt denne, sier Amperes lov at

$$c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} J \cdot dS.$$

Høyresiden av denne likningen er bare en konstant, og antar vi at $B = B(s)e_{\theta}$, får vi

$$2\pi s c^2 B(s) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} J \cdot dS$$

slik at

$$B(s) = \frac{1}{2\pi s c^2 \epsilon_0} \int_{\Sigma} J \cdot dS.$$

- 7 Siden $\nabla \cdot B = 0$ finnes det alltid et vektorpotensiale A . Setter vi dette inn i Amperes lov, får vi

$$c^2 \nabla \times \nabla \times A = \frac{J}{\epsilon_0}$$

og nå kan vi bruke oppgave 13 i økt 4-1 og skrive

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla (\nabla \cdot A) - \Delta A.$$

Nå vet du at det finnes mange mange vektorpotensialer, og velger vi det slik at $\nabla \cdot A = 0$, får vi

$$c^2 \Delta A = -\frac{J}{\epsilon_0}$$

som er Poissons likning i hver komponent. Nok en grunn til å studere harmoniske funksjoner om et par uker.

- 8 La oss først tidsderivere $c^2 \nabla \times B = \dot{E}$ og få $c^2 \nabla \times \dot{B} = \ddot{E}$. Men Faradays lov gir

$$\nabla \times \dot{B} = -\nabla \times \nabla \times E = -\nabla (\nabla \cdot E) + \Delta E$$

og er vi i tomt rom forsvinner det første leddet på høyresiden, slik at

$$\ddot{E} = c^2 \Delta E.$$

Likningen $\ddot{B} = c^2 \Delta B$ utledes på samme måte.

- 9 La oss først sette uttrykkene inn i Maxwells lover og få

$$\begin{aligned} E_0 \cdot k &= 0 & B_0 \cdot k &= 0 \\ k \times E_0 &= \omega B_0 & c^2 B_0 \times k &= \omega E_0 \end{aligned}$$

og nå er det rimelig klart at alle disse vektorene er ortogonale på hverandre. Kryssproduktet av E og B kalles **poyntingvektoren**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Poynting_vector

- 10 Vi deriverer den første likningen og får

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

- 11 Her er det bare å trippelintegrere kontinuitetslikningen over et område Ω og bruke divergensteoremet på $\iiint \nabla \cdot J$. Vi må i tillegg anta at det er greit å flytte den tidsderiverte på ρ ut av integralet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \, dx + \iint_{\partial\Omega} J \cdot dS = 0.$$

- 12 Lett! Arbeidet fra B på partikkelen mellom punktene $x(a)$ og $x(b)$ på Γ er

$$\int_{\Gamma} F \cdot ds = q \int_a^b (v \times B) \cdot v \, dt = 0$$

siden kryssproduktet står ortogonalt på begge faktorene i kryssproduktet.

4 - 6 - LAPLACEOPERATOREN II - LF

1 Laplaces likning er

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0$$

i kulekoordinater, og dersom u ikke skal avhenge av φ og θ , får vi

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

Det er vanlig å kalle denne løsningen $\Phi(r)$. Ganger vi likningen med r^2 , får vi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0.$$

slik at

$$\Phi'(r) = \frac{c_1}{r^2}$$

og

$$\Phi(r) = c_2 - \frac{c_1}{r}.$$

Hvis du ser nøye på dette, vil du se at dersom du velger konstantene riktig, blir u potensialet til coulombkraften:

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi r}.$$

Dette er ikke tilfeldig. La oss integrere Poissons likning

$$-\Delta u = \delta$$

over $\Omega \in \mathbb{R}^3$, og få

$$-\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\Omega} \delta = \begin{cases} 1 & 0 \in \Omega \\ 0 & 0 \notin \Omega \end{cases}$$

Dersom vi setter inn uttrykket for Φ på venstre side og bruker at

$$E = -\frac{q}{\epsilon_0} \nabla \Phi(r)$$

og så bruker divergensteoremet, får vi

$$\frac{\epsilon_0}{q} \int_{\partial\Omega} E \cdot dS = \begin{cases} 1 & 0 \in \Omega \\ 0 & 0 \notin \Omega \end{cases}$$

som er i overensstemmelse med våre tidligere beregninger. Vi tolker derfor coulombpotensialet som *impulsresponsen til laplaceoperatoren* dersom konstantene settes til $c_1 = -\frac{1}{4\pi}$ og $c_2 = 0$.

- 2] Siden coloumbpotensialet er impulsresponsen til laplaceoperatoren, kan vi antagelig løse poissons likning $\Delta u = -f$ ved å konvolvare f med coloumbpotensialet:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x-y)f(y) dy.$$

Det er litt jobb å vise ordentlig at dette er riktig, men det er jo litt artig at coloumbpotensialet er et fysisk eksempel på noe som oppfører seg som diracpulsen.

- 3] Dette blir nå veldig greit. Anta det finnes to løsninger, og trekk dem fra hverandre. Vi kaller differansen v . Siden laplaceoperatoren er lineær, løser v dirichletproblemet

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 & \text{på } \Omega \\ v &= 0 & \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

siden v er differansen mellom to funksjoner som tilfredsstiller det samme randkravet. Vi bruker formelen fra oppgave 13 i økt 4-3 med $u = v$ og får

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta v + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Siden innmaten i det siste integralet ikke kan være negativt, må den alltid være null. Kombinerer vi dette med at $v = 0$ på $\partial\Omega$, ser vi at v er nødt til å være null overalt, og følgelig finnes det bare én løsning. Merk at det samme resonnementet fungerer på

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{på } \Omega \\ u &= g & \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

så dette problemet har også entydig løsning.

- 4] Lett! Divergensteoremet gir

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS$$

som sier at dersom potensialet til et flytfelt er harmonisk, er utfluksen alltid null ut av områder.

- 5] La u og w tilfredsstille $u = g$ på $\partial\Omega$, der u er harmonisk og w er hva som helst. La $v = u - w$. Vi beregner

$$\begin{aligned} E(w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \end{aligned}$$

Siden u er harmonisk og $v = 0$ på $\partial\Omega$, gir formelen fra oppgave 13 i økt 4-3 at

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = 0,$$

så

$$E(w) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) = E(u) + E(v).$$

Siden verdien til E alltid er positiv, må $E(w)$ ta sin minste verdi når $E(v) = 0$, som impliserer at $v = 0$ (slik som i oppgave 3).

6 La $\Omega(x, r)$ være kulen sentrert i x og med radius r , og la

$$z(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} z_1(\theta, \varphi) \\ z_2(\theta, \varphi) \\ z_3(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + r \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 + r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 + r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

være parametriseringen til kuleskallet, med enhetsutnormalvektor

$$n(\theta, \varphi) = \frac{\partial z}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

og flateelement $r^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta$. Vi beregner så (husk den nye varianten av divergensteoremet fra oppgave 4!):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega(x, r)} u \, dS \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(z(\theta, \varphi)) \sin \varphi \, d\varphi d\theta \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} (u(z(\theta, \varphi))) \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u'(z(\theta, \varphi)) \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u'(z(\theta, \varphi)) \cdot \frac{\partial z}{\partial r} r^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega(x, r)} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{\Omega(x, r)} \Delta u \, dV = 0. \end{aligned}$$

Siden integralet

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS$$

er konstant som funksjon av r , kan vi ta

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial\Omega} u \, dS = u(x).$$

7 La

$$z(s, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x_1 + s \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 + s \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 + s \cos \varphi \end{pmatrix}$$

være en parametrisering av $\Omega(x, r)$, med volumelement $s^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta ds$. Vi beregner

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} u \, dx &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(u(z(s, \theta, \varphi)) \right) s^2 \sin \varphi \, d\varphi d\theta ds \\ &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(u(z(s, \theta, \varphi)) \right) \sin \varphi \, d\varphi d\theta \right) s^2 ds \\ &= \int_0^r \left(u(x) 4\pi \right) s^2 ds \quad (\text{fra forrige oppgave}) \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} u(x). \end{aligned}$$

- 8] Dersom $u(x)$ alltid skal være lik gjennomsnittsverdien til u i området rundt x , kan ikke u ha lokale maksimums- eller minimumspunkter. Hvis du hadde for eksempel et lokalt maksimum, ville alle u sine verdier i området rundt maksimumspunktet vært lavere enn i maksimumspunktet, og det motsier jo middelverdisatsen.
- 9] La oss nå introdusere en ny notasjon for derivasjon, det blir så jævlig mye skriving ellers. Vi skriver

$$\partial_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

for partiellderivert og

$$\partial_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

for liggende gradient. La $y = Ax$ der $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, og la $v(x) = u(Ax) = u(y)$, slik at

$$v'(x) = u'(Ax)A.$$

Skrevet opp kun med operatornotasjon blir dette

$$\partial_x = \partial_y A,$$

og transponerer vi, får vi

$$\nabla_x = A^T \nabla_y.$$

Laplaceoperatoren er

$$\Delta_x = \partial_x \nabla_x,$$

og setter vi inn kjerneregelen, får vi

$$\Delta_x = \partial_y A A^T \nabla_y.$$

Dersom $AA^T = A^T A = I$, får vi

$$\Delta_x = \partial_y \nabla_y = \Delta_y,$$

så disse operatorene gir samme resultat etter rotasjon av koordinater.

4 - 7 - FLUIDMEKANIKK - LF

- 1 Det man gjør her er å anta at det finnes en trajektorie $x(t)$ som tilfredsstiller

$$M\ddot{x} = \sum_l F_l$$

slik at

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{x}_k = M\ddot{x}$$

og så bruker vi lineariteten til derivasjonsoperatoren og skriver

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k x_k = \frac{d^2}{dt^2} (Mx)$$

slik at om vi definerer

$$x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k$$

har vi et punkt som tilfredsstiller

$$M\ddot{x} = \sum_l F_l. \quad (1)$$

- 2 Hvis vi antar at det er et endelig antall partikler og ser på den vertikale komponenten av kraftregnskapet, får vi på samme måte

$$\sum_{k=1}^n m_k \ddot{u}_k = \sum_l F_l$$

der l løper over alle eksterne krefter. Dersom vi tenker at membranen er kontinuerlig istedet, blir venstresiden

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}.$$

Nå gjelder det å forstå at mellom to partikler inne på membranen er det ingen eksterne krefter, kun interne krefter som kansellerer på grunn av Newtons tredje lov. Med andre ord løper l over alle krefter som påføres membranbiten langs $\partial\Omega$, og denne kraften fant vi måtte være

$$T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds \quad (2)$$

i TMA4111. Så da må vi ha

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u} dx = T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds.$$

- 3] Dersom T er konstant, får vi

$$\int_{\partial\Omega} T e_{nk} \, ds = T \int_{\partial\Omega} e_{nk} \, ds = 0 \quad (3)$$

ved å velge $u = 1$. Dette funker for både $k = 1$ og $k = 2$, så netto kraft på Ω må være null langs både e_1 og e_2 .

- 4] Samme triks her, kraften fra det hydrostatiske trykket er alltid retta langs $-e_n$ og den totale kraften i koordinatretning k på Ω er

$$-\int_{\partial\Omega} p(x) e_{nk} \, dS.$$

Siden p kun avhenger av x_3 gir gaussgreenteoremet at de to første er null, mens det tredje blir

$$-\int_{\partial\Omega} p(x) e_{n3} \, dS = -\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -a|\Omega|.$$

Minustegnet betyr at kraften peker oppover, siden x_3 er dybden. Siden a er sånn ca ti tusen pascal per meter, vil en kubikk med vann få oppdrift på omtrent ti tusen newton ("et tonn" på folkemunne), som er riktig i følge Arkimedes' lov.

- 5] Hvis vi legger den ideelle gasslov til grunn, bør pV/T være konstant etterhvert som du går nedover. Antar vi konstant temperatur, er lungevolumet

$$V = \frac{c}{ax_3 + b} \quad (4)$$

der a er som i forrige oppgave og b er trykket på havoverflaten. Luft veier om lag en kilo per kubikkmeter, så vekten på luften i lungene kan vi neglisjere. Din nye massetetthet blir

$$\rho(x_3) = .985 \frac{60}{54 + V} \quad (5)$$

og når denne er 1, får vi

$$V = .985 \cdot 60 - 54 \approx 5.1 \quad (6)$$

som skjer sånn ca allerede på to meters dyp. Dette er rimelig - hvis jeg hiver meg naken i sjøen, synker jeg selv på overflaten om jeg tømmer lungene for luft. Det er visst også slik at lungevolumets prosentandel av kroppens totale volum er veldig variabel blant folk (lungevolumet korrelerer for eksempel mye mer med kroppshøyde enn totalvolum), så gjør beregningen på nytt for dine egne mål om du trenger å vite dette nøyaktig.

- 6] La Ω være et kontrollvolum. Moralen fra forrige side er at hydrostatisk trykk alltid leverer en kraft på en flate som er rettet langs normalvektoren på flaten, så kraften fra det hydrostatiske trykket på en bit av Ω er

$$-pe_n \, dS$$

der dS er en liten bit av $\partial\Omega$ og e_n er utnormalvektoren, så kraften på hele $\partial\Omega$ er

$$\int_{\partial\Omega} -pe_n \, dS = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} -pe_{n1} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n2} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n3} \, dS \end{pmatrix}.$$

og kraften fra tyngden er

$$-e_3 \int_{\Omega} \rho g \, dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_{\Omega} \rho g \, dx \end{pmatrix}.$$

Dersom vi skal sammenlikne integrandene i alle disse integralene, må vi få kontaktkreftene over på trippelintegralform. Vi bruker gaussgreenteoremet, og skriver

$$\int_{\partial\Omega} -pe_n \, dS = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} -pe_{n1} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n2} \, dS \\ \int_{\partial\Omega} -pe_{n3} \, dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_1} \, dx \\ \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_2} \, dx \\ \int_{\Omega} -\frac{\partial p}{\partial x_3} \, dx \end{pmatrix} = -\int_{\Omega} \nabla p \, dx$$

Summerer vi disse kreftene og krever at de balanserer hverandre, får vi

$$0 = -\int_{\Omega} \nabla p \, dx - e_3 \int_{\Omega} \rho g \, dx = -\int_{\Omega} \nabla p + \rho g e_3 \, dx$$

og dersom Ω er vilkårlig valgt, må integrandene være like:

$$0 = \nabla p + \rho g e_3$$

7 Her får vi to forskjellige endringer i tid,

$$\frac{d}{dt} f(x(t), t) = \partial_x f(x, t) \dot{x}(t) + \dot{f}(x, t)$$

Merk at dette går fint både om f er skalar- og vektorfelt så lenge du er nøye på matrisedimensjonene. Størrelsen kalles totalderivert fordi den tolkes som en partikkel eller et lite flyttbart volumelements opplevde endring av f med hensyn på tid. Det andre leddet er der fordi f endres over tid, mens det første leddet er der fordi partikkelen flytter seg rundt i vektorfeltet:

https://en.wikipedia.org/wiki/Material_derivative

Dersom vi setter $f = v$ og antar at $v = \dot{x}$, får vi at akselerasjonen til partikkelen eller det infinitesimale flyttbare volumet blir

$$\dot{v} + (\partial_x v)v.$$

Det siste leddet skrives som regel

$$(v \cdot \nabla)v$$

i fysikkbøker. Siden vi skal sette opp regnskap i volumkrefter, blir venstresiden

$$\rho (\dot{v} + (\partial_x v)v).$$

og dersom trykkgradienten og tyngden er de eneste kreftene, får vi

$$\rho (\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p - \rho g e_3.$$

- 8] Spenningen på en liten plate med normalvektor e_n blir σe_n . I de fleste fluidmekanikkbøker transponerer de σ og så skriver de $n \cdot \sigma$ og har alle vektorer på radform i stedet for kolonneform, se for eksempel her:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_\(mechanics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))

Hvis du senere er nødt til å basere alt i livet på rader i stedet for kolonner, må du også huske å skrive kjerneregelen som $g'(x)f'(g(x))$ og ikke $f'(g(x))g'(x)$ slik du er vant til. Merk at selv de som skriver på wikipedia er ikke helt enige med seg selv om notasjon - her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

og her:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_\(mechanics\)#Cauchy_tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics)#Cauchy_tensor)

er indekseringen i σ byttet om i forhold til hverandre.

- 9] Dette er det samme resonnementet som i oppgave 6, men med en generell spenningstensor. La σ_k være rad k i σ , altså alle spenninger i retning e_k . Kontaktkraften på en liten bit av $\partial\Omega$ er

$$\sigma e_n dS,$$

så netto kraft blir

$$\int_{\partial\Omega} \sigma e_n = \begin{pmatrix} \int_{\partial\Omega} \sigma_1 e_n dS \\ \int_{\partial\Omega} \sigma_2 e_n dS \\ \int_{\partial\Omega} \sigma_3 e_n dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_1 dx \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_2 dx \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_3 dx \end{pmatrix}.$$

Dersom du kun har hydrostatisk trykk p , blir spenningstensoren bare

$$\sigma = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

så vi kunne gjort denne oppgaven først og tatt Arkimedes' lov som en triviell konsekvens.

- 10] Vi trenger altså å beregne divergensen til rad k i σ for å finne kraftbidraget i den kartesiske koordinatreningen e_k . La oss først skrive opp den første komponenten i den viskøse spenningstensoren

$$\sigma_1 = \nu_1 \left(\partial_x v_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^T \right) + \nu_2 e_1 \nabla \cdot v$$

og så beregne

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma_1 &= \nu_1 \left(\Delta v_1 + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \\ &\quad + \nu_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\ &= \nu_1 \Delta v_1 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot v). \end{aligned}$$

I den siste likheten har jeg antatt at det er greit å bytte plass på blandete partiellderiverte. Samme beregning gir

$$\nabla \cdot \sigma_2 = \nu_1 \Delta v_2 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla \cdot v)$$

$$\nabla \cdot \sigma_3 = \nu_1 \Delta v_3 + (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla \cdot v)$$

så om vi legger den vanlige vektortolkningen av Δv til grunn, kan disse tre likningene sammenfattes slik

$$\nabla \cdot \sigma = \nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2) \nabla (\nabla \cdot v)$$

slik at Newtons andre lov blir

$$\rho (\dot{v} + (\partial_x v)v) = -\nabla p - \rho g e_3 + (\nu_1 \Delta v + (\nu_1 + \nu_2) \nabla (\nabla \cdot v)).$$

Egentlig er det litt feil å kalle det "Newtons andre lov", for det var Euler som introduserte denne måten å gjøre opp kraftregnskap på omtrent femti år etter Newton publiserte Principia. Derfor kalles de utvidete bevegelseslovene **Newton-Euler-likningene**:
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Euler_equations

11 Kulekoordinatene er gitt ved

$$y = g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

og tar vi rotasjonsaksen langs e_3 og konstant rotasjonshastighet, betyr det at $\theta(t) = \omega t$, slik at posisjonen til punktet blir

$$x(t) = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \sin \phi \\ r \sin \omega t \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$$

med fart

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \sin \phi \\ r\omega \cos \omega t \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

12-13 Disse dropper vi.

4 - 8 - TRANSPORT - LF

1-2 Se forelesning 17/2.

3 Hvis v er en konstant, sier transportlikningen

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

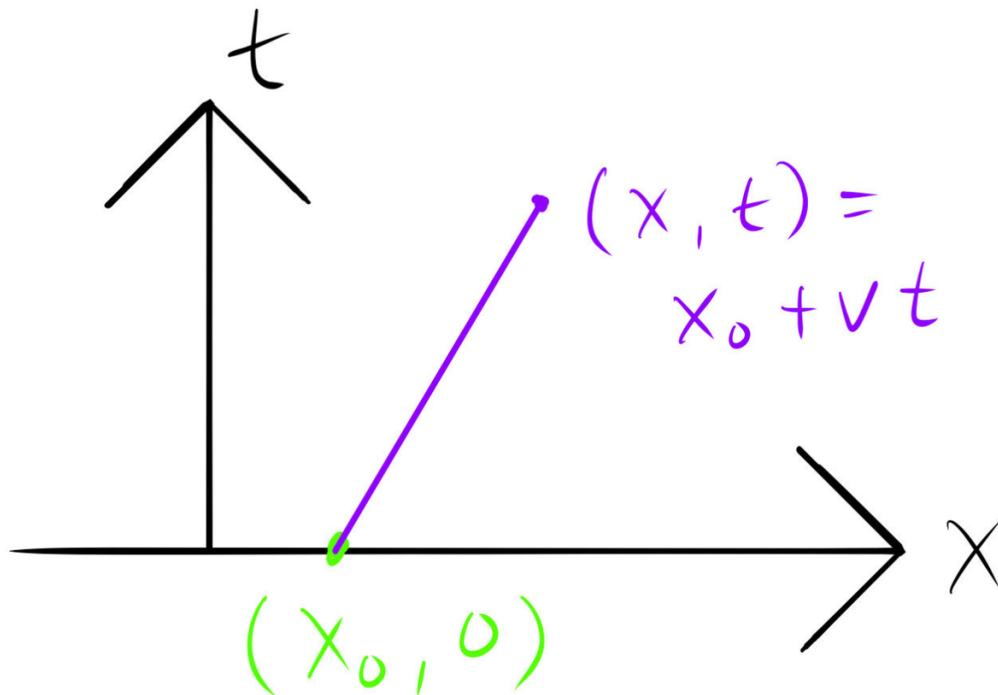
at den totalderiverte til ρ skal være null langs kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

siden

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Karakteristisk kurve betyr noe sånt som *en kurve der du kan klare å finne ut hva løsningen er*, og dette er det enkleste eksemplet.



- 4 I forrige oppgave viste vi at en eventuell løsning må være konstant på alle kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

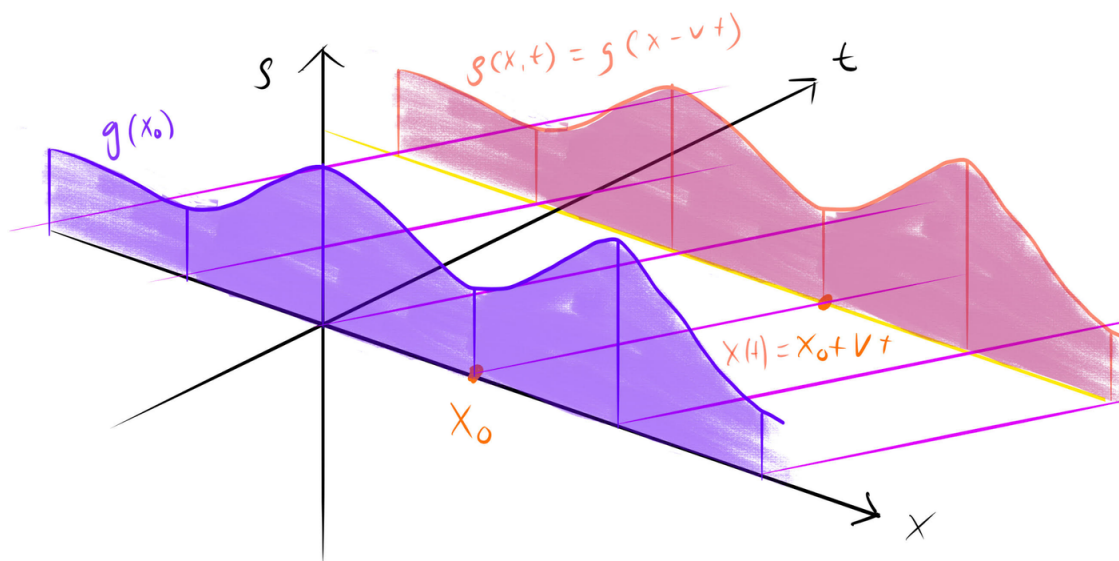
så med andre ord passer funksjoner på formen

$$\rho(x, t) = h(x - vt)$$

i likningen så lenge h er deriverbar. Derfor er også

$$\rho(x, t) = g(x - vt)$$

en løsning, og gjett hva, denne tilfredsstiller også initialkravet.



- 5 La oss undersøke hvordan løsningen oppfører seg langs de karakteristiske kurvene $x(t) = x_0 + vt$. Vi får

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla \rho(x_0 + vt, t) = -\gamma \rho(x_0 + vt, t)$$

eller

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) + \gamma \rho(x_0 + vt, t) = 0$$

om du vil. Denne likningen kan vi håndtere ved å gange hele greia med $e^{\gamma t}$ slik:

$$e^{\gamma t} \frac{d}{dt}\rho(x(t), t) + e^{\gamma t} \gamma \rho(x_0 + vt, t) = 0$$

og så skrive

$$\frac{d}{dt}(e^{\gamma t} \rho(x(t), t)) = 0$$

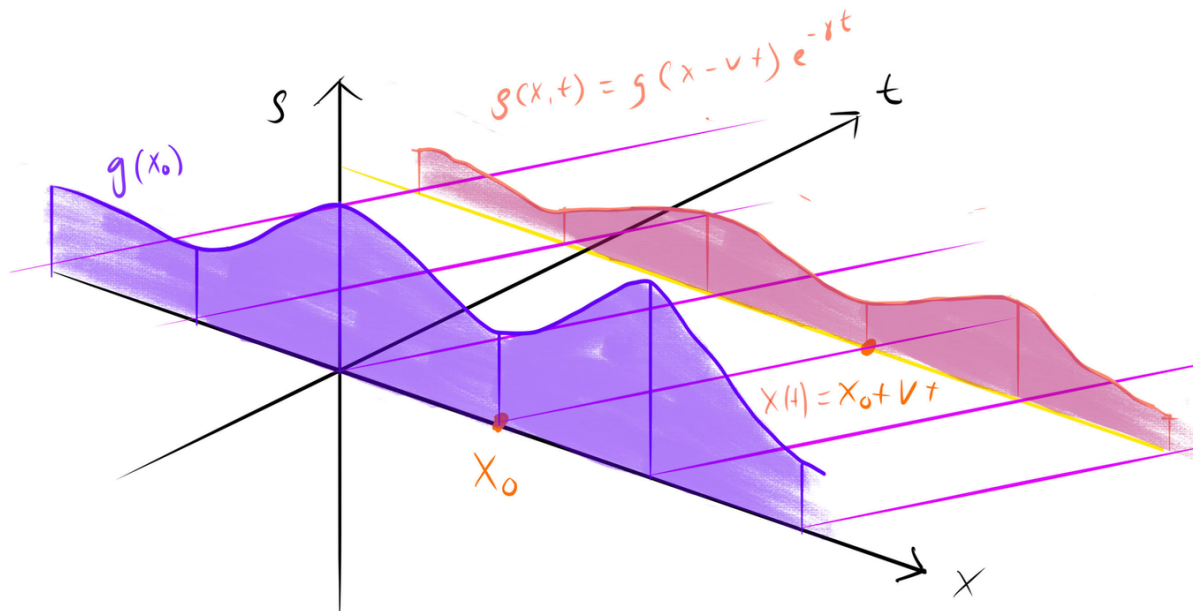
slik at

$$\rho(x(t), t) = ce^{-\gamma t}.$$

Denne likningen sier at løsningen skal være en konstant ganger $e^{-\gamma t}$ på hver karakteristisk kurve, så om vi setter

$$\rho(x, t) = g(x - vt)e^{-\gamma t}$$

har vi noe som tilfredsstiller både differensiallikningen og initialkravet.



- 6 Hvis vi evaluerer løsningen ρ på de karakteristiske kurvene fra forrige oppgave, får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla \rho(x_0 + vt, t) = f(x_0 + vt, t)$$

og hvis vi integrerer denne likningen fra 0 til t , får vi

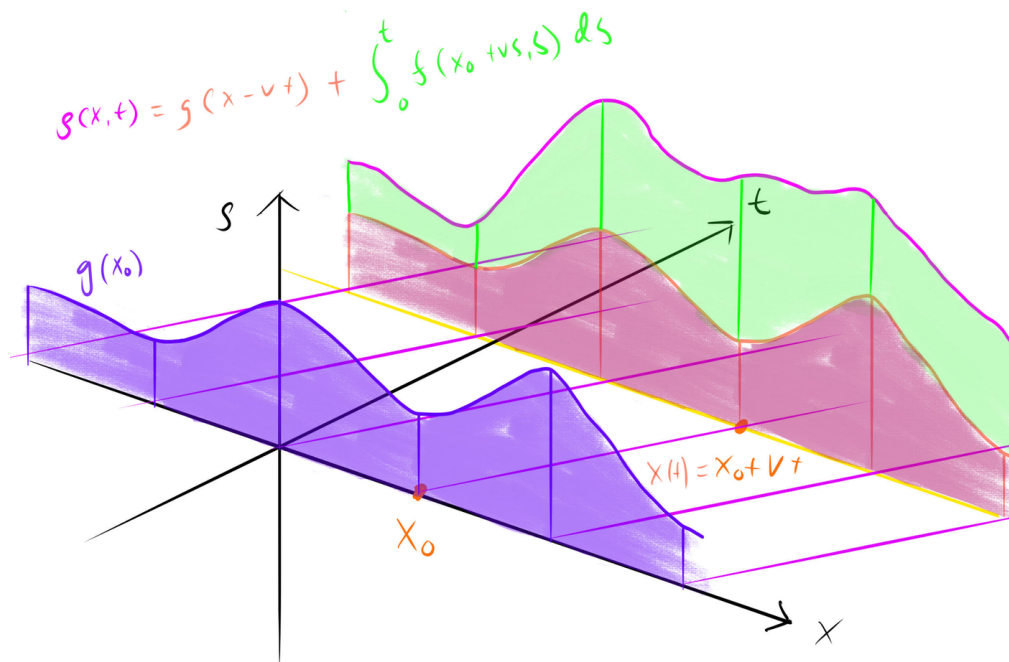
$$\rho(x(t), t) - \rho(x(0), 0) = \int_0^t f(x(s), s) ds = \int_0^t f(x_0 + vs, s) ds$$

slik at

$$\rho(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x_0 + vs, s) ds.$$

Men $x_0 = x - vt$, så vi kan skrive dette enda penere slik:

$$\rho(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x + v(s - t), s) ds$$



- 7 La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Den totale massen inne på Ω er

$$\int_{\Omega} \rho dx$$

Denne er gitt i kilo, og endringen

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dx$$

er følgelig gitt i kilo per sekund. Dersom v er gitt i meter per sekund, er ρv gitt i kilo per sekund per kvadratmeter, så da er

$$\int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS$$

den totale utstrømningen av masse gjennom $\partial\Omega$ i kilo per sekund. Hvis vi antar at masse ikke skapes eller ødelegges inne på Ω , må vi ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dx + \int_{\partial\Omega} \rho v \cdot dS = 0$$

siden negativ utstrømning leder til økning av masse inne på Ω . Dette er kontinuitetslikningen på integralform, og bruker vi divergensteoremet og antar tidsderivasjonen får lov til å gå inn under trippelintegralet, får vi

$$\int_{\Omega} \dot{\rho} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho v) \, dx = 0$$

og dersom Ω er tilfeldig valgt, må summen av integrandene være null, slik at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

Dersom væsken er inkompressibel, er ρ en konstant, slik at

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Dette er den samme likningen som Gauss' lov for magnetisme, og det finnes idealiserte situasjoner der væskeflytmodellene gir opphav til de samme feltene som i magnetostatikk.

8 Vi deriverer den første likningen og får

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

og tar divergensen til den siste likningen og får

$$0 = \nabla \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot J.$$

Hvis vi antar at det er greit å bytte rekkefølge på tidsderivert og divergens, kan vi sette den første likningen inn i den siste og se at

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot J = 0.$$

9 Partikkelflukstettheten er gitt ved ρv , så Ficks lov blir

$$\rho v = -D \nabla \rho$$

og antar vi at D ikke endrer seg i rom eller tid, får vi diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D \Delta \rho$$

om vi setter fick inn i kontinuitetslikningen.

10 La oss tenke at temperaturen er gitt ved funksjonen $T(x, t)$, der x er de romlige koordinatene og t er tidspunktet. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Tidsendringen i varmeenergien i Ω er

$$\frac{d}{dt} \left(\rho c \int_{\Omega} T \, dx \right) = \rho c \int_{\Omega} \dot{T} \, dx.$$

der massetettheten ρ og den spesifikke varmekapasiteten c er antatt konstante. Det er også antatt at T er glatt nok til at vi bare kan slenge tidsderivasjonen inn under integraltegnet. Varmen som slipper ut gjennom $\partial\Omega$ er

$$\int_{\partial\Omega} q \cdot dS$$

og om det ikke produseres varme i Ω , må vi ha

$$\rho c \int_{\Omega} \dot{T}(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} q \cdot dS.$$

Bruker vi divergensteoremet på varmekfluksen, får vi

$$\rho c \int_{\Omega} \dot{T}(x, t) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot q dx.$$

og dersom dette skal gjelde for alle områder Ω , må

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot q = 0.$$

11 Da er det bare å sette

$$q = -\kappa \nabla T$$

inn i

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot q = 0.$$

og anta at κ er konstant, så får vi

$$\rho c \dot{T} = \kappa \Delta T.$$

Dersom κ varierer i enten tid eller rom (begge disse forekommer, for κ kan være temperaturavhengig og mediet kan være anisotropt), får vi den mer kompliserte likningen

$$\rho c \dot{T} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0.$$

Se også aller siste forelesning.

4 - 9 - BØLGER - LF

1-4 Se Helenes notater fra øvingsforelesning.

5 Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x+ct) + \psi''(x-ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \phi''(x+ct) + c^2 \psi''(x-ct).$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen.

6 Vi vet at

$$u(x, t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \quad (1)$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x, 0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$\dot{u}(x, 0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + \phi(0) - \psi(0).$$

Vi har nå et lineært 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ . Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + \phi(0) - \psi(0)$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds - \phi(0) + \psi(0)$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{x-ct} g(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \end{aligned}$$

7 Vi utvider f slik

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x) & x \leq 0 \\ f(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

og g slik:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -g(-x) & x \leq 0 \\ g(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

D'Alembert gir oss nå

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds.$$

I dette problemet er x alltid positiv, så vi trenger å skille mellom når $x-ct$ er positiv og negativ. Så lenge $x \geq ct$, får vi bare

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

mens når $x \leq ct$ kan vi bruke den odde utvidelsen og få

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) - f(ct-x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(s) ds.$$

Hvis du syntes det var vanskelig å få rett fortegn på det siste integralet, er det bare å huske at integralet til en odde funksjon er jevn, og beregne

$$\begin{aligned} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s) ds &= \int_0^{x+ct} \tilde{g}(s) ds - \int_0^{x-ct} \tilde{g}(s) ds \\ &= \int_0^{x+ct} \tilde{g}(s) ds - \int_0^{ct-x} \tilde{g}(s) ds \\ &= \int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{ct-x} g(s) ds = \int_{ct-x}^{x+ct} g(s) ds. \end{aligned}$$

8 Gjennomsnittet har vi allerede derivert med hensyn på r i 4-6:

$$\begin{aligned} \partial_r \bar{u} &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u \cdot dS \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(x,r)} \Delta u = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} \Delta u dS \end{aligned}$$

Vi deriverer en gang til:

$$\begin{aligned} \partial_{rr} \bar{u}(r, t) &= \partial_r \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} \Delta u dS \right) \\ &= \frac{-2}{4\pi r^3} \int_{B(x,r)} \Delta u + \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS \end{aligned}$$

og setter sammen ingrediensene:

$$\begin{aligned}
 c^2 \left(\partial_{rr} \bar{u} + \frac{2}{r} \partial_r \bar{u} \right) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} c^2 \Delta u \, dS \\
 &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} \ddot{u} \, dS \\
 &= \partial_{tt} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS = \partial_{tt} \bar{u}
 \end{aligned}$$

9 Vi beregner først

$$\begin{aligned}
 \partial_{tt} U &= r \partial_{tt} \bar{u} \\
 &= r c^2 \left(\partial_{rr} \bar{u} + \frac{2}{r} \partial_r \bar{u} \right) \\
 &= c^2 (r \partial_{rr} \bar{u} + 2 \partial_r \bar{u}) \\
 &= c^2 \partial_r (\bar{u} + r \partial_r \bar{u}) = c^2 \partial_{rr} U.
 \end{aligned}$$

Nå er det bare å bruke formelen fra oppgave 7, med $0 \leq r \leq ct$, og skrive

$$U(r, t) = \frac{1}{2} (F(r + ct) - F(ct - r)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{r+ct} G(s) \, ds$$

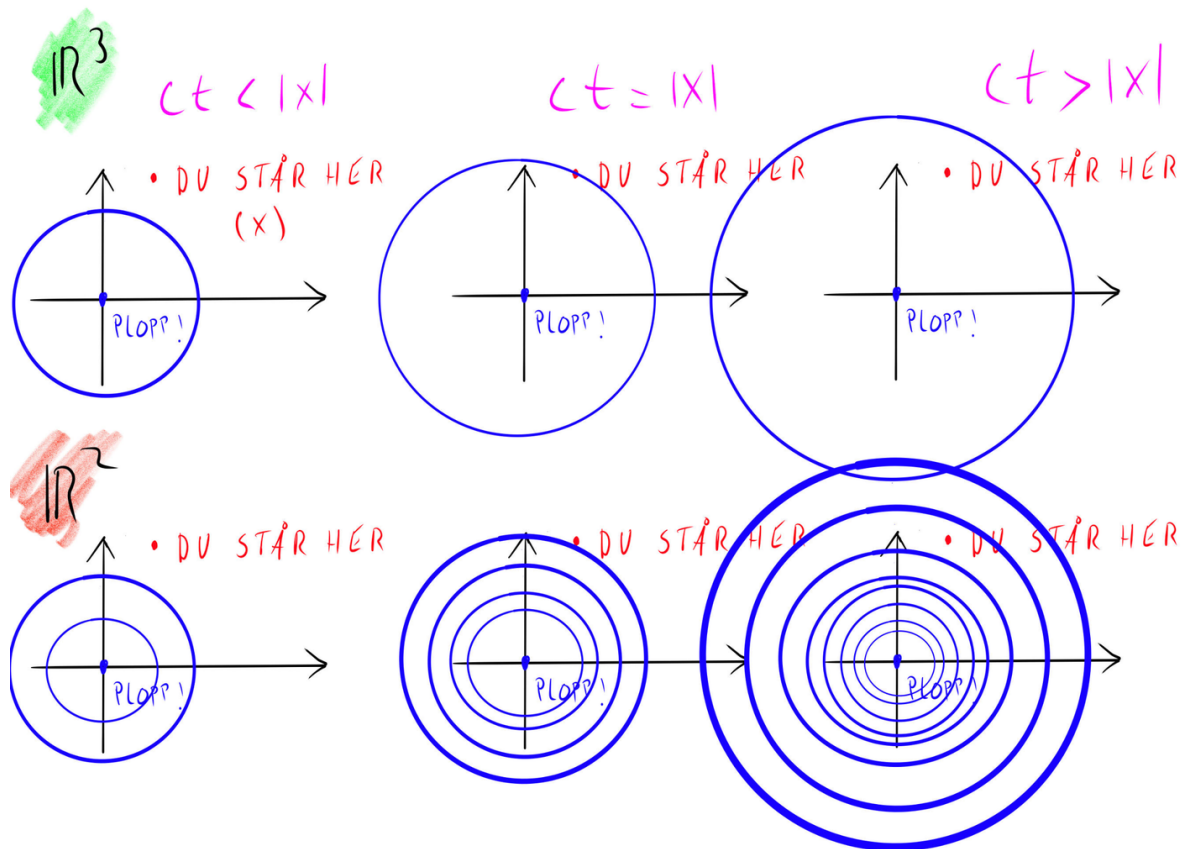
og så

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{U(r, t)}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{(F(r + ct) - F(ct - r))}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{r+ct} G(s) \, ds \right) \\
 &= F'(ct) + \frac{1}{c} G(ct) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x, ct)} f \, dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x, ct)} g \, dS.
 \end{aligned}$$

10 Så da er g noe som ser litt ut som diracpulsene i området rundt origo, og dette kan vi tenke på som noe som tilfører litt bevegelsesmengde momentant, husk oppgave 39 og 40 i økt 2-2:
<https://mortano.folk.ntnu.no/stoff/2-2.pdf>
 og kirchhoff gir

$$u(x, t) = \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x, ct)} g \, dS \right).$$

Integranden g er null på $\partial B(x, ct)$ helt til radien ct begynner å nærme seg origo, og når ct har passert origo blir det stille igjen. Dette er ikke det som skjer i to dimensjoner - når du kaster en stein på et vannspeil, får du bølger som fortsetter å bevege vannspeilet lenge etter at bølgefronten har passert.



4 - 10 - NABLAOPERATOREN II - LF

$$\boxed{1} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ Det første vi må gjøre er å se litt på

$$S(y) = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Først beregner vi (husk at $|y| = 1$)

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{pmatrix} -(y_2^2 + y_3^2) & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & -(y_1^2 + y_3^2) & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & -(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1^2 - 1 & y_1 y_2 & y_1 y_3 \\ y_1 y_2 & y_2^2 - 1 & y_2 y_3 \\ y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

og så er det bare å sammenlikne med oppgave 10 i økt 2-9:
<https://mortano.folk.ntnu.no/grunnstoff/2-9.pdf>

$\boxed{3}$ Vi fortsetter (husk at $|y| = 1$) med

$$S^3 = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix} = -S$$

og

$$S^4 = \begin{pmatrix} (y_2^2 + y_3^2) & -y_1 y_2 & -y_1 y_3 \\ -y_1 y_2 & (y_1^2 + y_3^2) & -y_2 y_3 \\ -y_1 y_3 & -y_2 y_3 & (y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix} = -S^2$$

og

$$S^5 = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

Nei sku du ha sett. Disse matrisene danner en syklisk gruppe (se ukens nøtter) med fire elementer så lenge $|y| = 1$, isomorf til en annen gruppe du kjenner godt, nemlig alle potenser

av den imaginære enheten i . Resten er barnemat:

$$\begin{aligned}
 e^{\theta S} &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\
 &\quad + \frac{\theta^3 S^3}{3!} + \frac{\theta^4 S^4}{4!} \\
 &\quad + \frac{\theta^5 S^5}{5!} + \frac{\theta^6 S^6}{6!} + \dots \\
 &= I + \theta S + \frac{\theta^2 S^2}{2} \\
 &\quad - S \frac{\theta^3}{3!} - S^2 \frac{\theta^4}{4!} \\
 &\quad + S \frac{\theta^5}{5!} + S^2 \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\
 &= I + S \sin \theta + S^2 (1 - \cos \theta)
 \end{aligned}$$

4 La oss først skrive opp

$$\begin{aligned}
 \partial v - \nabla v &= \begin{pmatrix} \partial_x v_1 \\ \partial_x v_2 \\ \partial_x v_3 \end{pmatrix} - (\nabla_x v_1 \quad \nabla_x v_2 \quad \nabla_x v_3) \\
 &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_3} v_1 \\ \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_1} v_3 & \partial_{x_2} v_3 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 & \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_2} v_1 & \partial_{x_2} v_2 & \partial_{x_2} v_3 \\ \partial_{x_3} v_1 & \partial_{x_3} v_2 & \partial_{x_3} v_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x_2} v_1 - \partial_{x_1} v_2 & \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1 & 0 & \partial_{x_3} v_2 - \partial_{x_2} v_3 \\ \partial_{x_1} v_3 - \partial_{x_3} v_1 & \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Sammenlikner vi nå med

$$\theta S(y) = \theta \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ser vi at om vi setter

$$y = \frac{\nabla \times v}{|\nabla \times v|}$$

blir

$$\frac{1}{2} (\partial v - \nabla v)$$

generatoren til en rotasjon som går vinkelen

$$\theta = \frac{1}{2} |\nabla \times v|$$

rundt y . Dette er altså grunnen til at vi sier $\nabla \times v$ er den “infinitesimale rotasjonen” til vektorfeltet.

- 5 Siden en rotasjonsmatrise R tilfredsstiller $R^T R = I$, får vi

$$y^T y = x^T R^T R x = x^T x$$

dersom $y = Rx$.

- 6 Strømlinjene tilfredsstiller

$$\dot{x} = v(x) = Ax,$$

og dette systemet har løsninger

$$x(t) = e^{At}c.$$

Disse går i sirkel rundt origo når t øker, siden e^{At} er en rotasjon dersom A er skjevsymmetrisk.

- 7 Dersom A er symmetrisk er A også ortogonalt diagonaliserbar, så da kan vi like gjerne legge koordinatsystemet slik at A er diagonal. Løsningene er fortsatt

$$x(t) = e^{At}c.$$

men nå er e^{At} diagonal, og vi ser at denne strekker komponentene i c når tiden går. Det er klart at avstanden mellom partikler flyttes over tid i dette tilfellet, og vi ser derfor at det er den symmetriske delen av jacobimatrisen som sørger for at partikler flyttes relativt til hverandre. Dette motiverer Newtons definisjon

$$\sigma = \nu (\partial v + \nabla v)$$

av viskositeten til en væske.

4 - 11 - ALEMBERTOPERATOREN - LF

- 1 Den blir

$$y_1 = x_1 - v_1 t$$

$$y_2 = x_2 - v_2 t$$

$$y_3 = x_3 - v_3 t$$

og for ordens skyld $t' = t$, men på Galileo Galileis tid var det selvfølgelig ingen som tenkte tanken at du kanskje k dd  til tiden når du bytta koordinatsystem på denne måten.

- 2 $c \approx 3 \cdot 10^8$ meter per sekund i begge.

- 3 Veien fotonet reiser sett fra togvognen er $2L$ der L er takhøyden, så vi får

$$ct = 2L$$

for denne turen. Sett fra togskinna f r vi

$$ct = 2\sqrt{L^2 + v^2 t^2/4}$$

slik at

$$t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Forholdene mellom disse to uttrykkene er

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- 4 Den romlige transformasjonen den ene veien er

$$y_1 = \gamma(x_1 - v_1 t)$$

mens den andre veien er

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma(y_1 + v_1 \tau) \\ &= \gamma(\gamma(x_1 - v_1 t) + v_1 \tau) \\ &= \gamma^2 x_1 - \gamma^2 v_1 t + \gamma v_1 \tau \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} \tau &= x_1(1 - \gamma^2)/\gamma v_1 + \gamma t \\ &= \gamma(t - x_1 v_1/c^2). \end{aligned}$$

Dette hadde vært en fin oppgave i TMA4101, men den er selvfølgelig litt for enkel for TMA4121.

- 5 Dette hadde vært en finfin oppgave i TMA4111, men for 4121 er den litt for enkel. Dessuten følger den av oppgave 11 under.
- 6 Lett! En rotasjon R endrer ikke $|x|$ siden $R^T R = I$, og da endrer ikke R minkowskiproduktet heller.
- 7 Dette hadde vært en finfin oppgave i TMA4106, men jeg visste dessverre ikke om den da jeg laga TMA4106.
- 8 La oss sette $y = v/|v|$. Vi beregner først

$$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 y_1 & y_2 y_1 & y_3 y_1 \\ 0 & y_1 y_2 & y_2 y_2 & y_3 y_2 \\ 0 & y_1 y_3 & y_2 y_3 & y_3 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & yy^T \end{pmatrix}$$

og

$$K^3 = \begin{pmatrix} 0 & -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ -y_1 & 0 & 0 & 0 \\ -y_2 & 0 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

slik at $K^4 = K^2$ og $K^5 = K^3$ og så videre. Dette gjør det enkelt å summere opp eksponensialfunksjonen:

$$\begin{aligned} e^{\lambda K} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n K^n}{n!} \\ &= I + K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} + K^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \\ &= I + K \sinh(\lambda) + K^2 (\cosh(\lambda) - 1) \end{aligned}$$

- 9 Siden $\lambda_1 K$ og $\lambda_2 K$ åpenbart kommuterer, kan vi enkelt og greit regne ut at

$$\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = e^{K(\lambda_1 + \lambda_2)} = e^{K(\lambda_1) + K(\lambda_2)} = e^{K(\lambda_1)} e^{K(\lambda_2)} = \Lambda(\lambda_1) \Lambda(\lambda_2)$$

- 10 Minkowskiproduktet er gitt ved

$$(ct, x_1, x_2, x_3) \eta \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og vi må ha at

$$(ct, x_1, x_2, x_3) \eta \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (ct, x_1, x_2, x_3) \Lambda^T \eta \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for alle hendelser (ct, x_1, x_2, x_3) som kun er sant dersom $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$.

- 11 Husk at $ct = x_0$ bare for å forenkle notasjonen litt. Inspirert av siste oppgave i 4-6, setter vi

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

slik at

$$\square_x = \nabla_x^T \eta \nabla_x$$

siden

$$\frac{\partial}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial x_0}$$

Setter vi $y = \Lambda x$, får vi (fra kjerneregelen)

$$\nabla_x^T = \nabla_y^T \Lambda$$

og

$$\nabla_x = \Lambda^T \nabla_y.$$

Oppgave 10 og symmetrien til Λ gir nå at

$$\square_x = \nabla_x^T \eta \nabla_x = \nabla_y^T \Lambda \eta \Lambda^T \nabla_y = \nabla_y^T \Lambda^T \eta \Lambda \nabla_y = \nabla_y^T \eta \nabla_y = \square_y.$$

4 - 12 - KRASJKURS I RESIDYREGNING - LF

5] Ops, vi beregner:

$$\frac{\cos z^2}{z^5} = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z} + \dots$$

som gir

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z^2}{z^5} dz = -\pi i.$$

6] Denne og, vi får

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{z^8} dz &= \int_{\Gamma} \frac{1}{z^8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n+1}}{(2n+1)!} dz \\ &= \int_{\Gamma} \frac{2}{z^7} - \frac{8}{3!z^5} + \frac{32}{5!z^3} - \frac{128}{7!z} - \dots dz = -\frac{256\pi i}{7!}. \end{aligned}$$

7] Her er det kun i utviklingen til $e^{1/z}$ det dukker opp en $1/z$, så $\int_{\Gamma} e^z + e^{1/z} dz = 2\pi i$.

8 Denne er litt mer jobb. Det beste er kanskje å skrive det ut slik:

$$\begin{aligned}
 e^{z+1/z} &= e^z e^{1/z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} \\
 &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\
 &+ \frac{1}{z} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\
 &+ \frac{1}{2z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\
 &+ \frac{1}{3!z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\
 &+ \frac{1}{4!z^4} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) \\
 &+ \dots \\
 &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{2 \cdot 3!} + \frac{z^2}{2 \cdot 4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{3! \cdot 2z} + \frac{1}{3!3!} + \frac{z}{3!4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{4!2z^2} + \frac{1}{4!3!z} + \frac{1}{4!4!} + \dots \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

og nå ser vi at

$$\int_{\Gamma} e^{z+1/z} dz = 2\pi i \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{4!3!} + \dots \right).$$

8 Prinsipaldelen er alt som er markert i blått:

$$\begin{aligned}
 e^{z+1/z} &= e^z e^{1/z} \\
 &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4} + \frac{z}{2 \cdot 3!} + \frac{z^2}{2 \cdot 4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{3! \cdot 2z} + \frac{1}{3!3!} + \frac{z}{3!4!} + \dots \\
 &+ \frac{1}{4!z^4} + \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{4!2z^2} + \frac{1}{4!3!z} + \frac{1}{4!4!} + \dots \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

9 Funksjonen

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

har en singularitet i $z_0 = 0$ og i $z_0 = 1$. Laurentutviklingen i $z_0 = 0$ får vi ved å bruke den geometriske rekken og skrive

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} (1 + z + z^2 + \dots)$$

og nå ser vi at $z_0 = 0$ er en pol av orden to. Laurentutviklingen i $z_0 = 1$ får vi ved å først Taylorutvikle $1/z^2$ om $z_0 = 1$. Vi har

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z^2} = (-1)^n (n+1)! \frac{1}{z^{n+2}}$$

slik at

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \end{aligned}$$

og

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)z^2} = \frac{1}{1-z} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \right) = \frac{-1}{z-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^{n-1}$$

og vi ser at $z_0 = 1$ er en pol av orden 1.

10 Disse er bare å hente ut av laurenttrekkene. Vi får

$$\operatorname{res}_{z_0=0} f(z) = 1 \quad \text{og} \quad \operatorname{res}_{z_0=1} f(z) = -1.$$

$$11 \quad \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z_0=0} f(z) + \operatorname{res}_{z_0=1} f(z)) = 0$$

$$12 \quad \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0=1} f(z) = -2\pi i$$

$$13 \quad \int_{\Gamma} \frac{1}{z^2(1-z)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0=0} f(z) = 2\pi i$$

14 Siden

$$\frac{e^{st}}{s^2 + 1} = \frac{e^{st}}{(s+i)(s-i)}$$

er funksjonen singulær i $s = \pm i$, så her er det noen poler og de må helt klart være enkle. Hvis polen er enkel ser vi av formen på laurentrekken at vi kan gange med $(s \pm i)$ og ta grenseverdien inn mot $s = \mp i$ for å få residyet:

$$\operatorname{res}_{s_0=i} f(s) = \lim_{s \rightarrow i} (s-i) f(s) = \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st}}{(s+i)} = \frac{e^{it}}{2i}$$

$$\operatorname{res}_{s_0=-i} f(s) = \lim_{s \rightarrow -i} (s+i) f(s) = \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st}}{(s-i)} = -\frac{e^{-it}}{2i}$$

Summen av disse to er helt klart $\sin t$. Denne er også enkel å ta med cauchys integralformel, som utledes i siste oppgave.

- 15 Denne er for vanskelig for eksamen. De av dere som trenger inversformelen for laplacetransform i avansert lineær systemteori vil antagelig bli plaget med utledningen av foreleseren i kurset.

- 16 [https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_\(complex_analysis\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Residue_(complex_analysis))

- 17 La

$$a = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

Dersom

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

ser vi at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n+1} \right) = a.$$

- 18 For den enkle polen i $z = 1$, får vi

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^2} = -1,$$

og for den doble, får vi

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - z)^2} = 1.$$