

3 - 1 - FLUENS STOLTE GANG OVER RULLEGARDINEN

James Clerk Maxwell er kreditert med den første komplette modellen av elektromagnetisme.¹ Han formulerte det som noen og tyve ymse empiriske regler, men Oliver Heaviside kondenserte alt ned til denne formen:

$$\begin{array}{ll}
 \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \iint_{\partial\Omega} E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, dx \\
 \nabla \cdot B = 0 & \iint_{\partial\Omega} B \cdot dS = 0 \\
 \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} & \int_{\partial\Sigma} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot dS \\
 c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} & c^2 \int_{\partial\Sigma} B \cdot ds = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} J \cdot dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E \cdot dS
 \end{array}$$

De til venstre er på differensialform, mens de til høyre er korresponderende likninger på integralform. Lovene er et koblet sett med differensial- eller integrallikninger, der E er det elektriske feltet,² B det magnetiske feltet,³ ρ en gitt ladningstetthet,⁴ J en gitt strømtetthet,⁵ c lyshastigheten i vakuum⁶ og ϵ_0 vakuumperrmittiviteten.⁷ De elektriske og magnetiske feltene E og B er ukjente, mens ladningstettheten ρ og strømtettheten J er kjente. De ukjente feltene og strømtettheten er funksjoner fra $\mathbb{R}^4$ (rom og tid) til $\mathbb{R}^3$, mens ladningstettheten er en funksjon fra $\mathbb{R}^4$ (også rom og tid) til $\mathbb{R}$.

0 Pugg Maxwells lover og se hvor lang tid det tar å huske alle.

Målet med semesteret er å forstå symbolene i Maxwells likninger, og da må vi studere **flervariabel kalkulus**,⁸ altså læren om funksjoner fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$. Her er en tabell:

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell%27s_equations

²https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field

³https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_field

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Charge_density

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Current_density

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_light

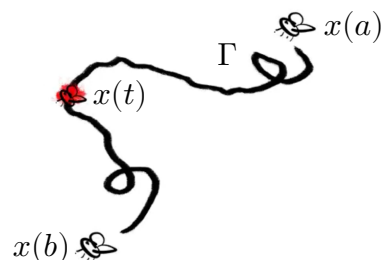
⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariable_calculus

m	n	Geometrisk tolkning
1	1	Kurve i planet som ikke kan skjære seg selv
2	1	Terreng med fjellsider uten overheng
3	1	Tetthet, trykk eller temperatur
4	1	Tetthet, trykk eller temperatur med tidsavhengighet
1	2	Kurve i planet som kan skjære seg selv
1	3	Kurve i rommet
2	2	Todimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon
2	3	Terreng med fjellsider med overheng
3	3	Tredimensjonalt vektorfelt eller koordinattransformasjon
4	3	Tredimensjonalt vektorfelt med tidsavhengighet

Vi skal holde oss til de verdiene av m og n i tabellen over. Tilfellet $m = n = 1$ er vi stort sett ferdige med; disse funksjonene lærte du om på skolen. Grafen til en slik funksjon kan ikke krysse seg selv og derfor er det noen begrensninger på hvor artige figurer man kan tegne med dem. Når $n = 2$ eller $n = 3$ blir alt mye morsommere.⁹ Vi skriver

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$



og grafen til x kalles Γ . Husk at vi skiller nøye mellom x , som er en funksjon, $x(t)$ som er et punkt i $\mathbb{R}^n$ og Γ som er en punktmengde. Dersom $n = 2$ kan du tenke på Γ som trajektorien til en flue som spaserer over rullegardinen, og når $n = 3$ surrer fluen rundt i rommet. På skolen kalte du det **parametrisert kurve**.¹⁰ Jeg har kutta ut fete typer for vektorer, for dere går i andre klasse nå og er klare til å takle dette. Jeg kommer også til å skrive

$$|x(t)| \quad \text{og ikke} \quad \|x(t)\|$$

for lengden til $x(t)$. Finn og skissér parametrisering for skjæringskurven mellom

$$\boxed{1} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 = 0$$

$$\boxed{2} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

$$\boxed{3} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\boxed{4} \quad x_1^2 + x_2^2 = x_3 \text{ og } x_1 + x_2 = 0$$

Trikset med å skjønne nye funksjoner er ofte å herje litt med funksjoner du har i ryggraden. Funksjonen $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

er en klassiker; den gir oss enhetssirkelen. Denne kjenner alle barn i barnehagen.

$$\boxed{5} \quad \text{Finn parametriseringer for sirklene gitt av likningene}$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad \text{og} \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

$$\boxed{6} \quad \text{Finn en parametrisering for ellipsen som tilfredsstiller}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$\text{og finn skjæringskurven mellom } 2x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ og } x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Vi skriver $\mathbb{R}^{m \times n}$ for det mn -dimensjonale vektorrommet av $m \times n$ -matriser, slik at søylevektorer er inneholdt i $\mathbb{R}^{m \times 1}$ og radvektorer i $\mathbb{R}^{1 \times n}$. Vi kan rotere grafer med **rotasjonsmatrisen**. Dette er en funksjon $R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gitt ved

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{7} \quad \text{Finn en parametrisering for en ellipse som ligger med førtifem graders vinkel på koordinataksene.}$$

⁹<https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_equation

Tangenten¹¹ til x er gitt ved

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Dersom tangenten eksisterer, sier vi at x er **deriverbar**. Definisjonen impliserer at

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}.$$

Her er t bare en eller annen uavhengig variabel uten noen spesiell fysisk tolkning - dersom det er klart at t er tiden, skriver vi

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hvis man tenker at Γ er trajektorien til en flue og at fluen har speedometer, er **banefarten**

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^T \dot{x}(t)} = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + \dots + (\dot{x}_n(t))^2}$$

det tallet som vises på speedometeret ved tiden t .

- 8 Finn tangent og banefart for alle kurvene på forrige side.

Buelengden til Γ finner du ved å integrere banefarten:¹²

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt$$

- 9 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at integralet over blir buelengden til kurven, og regn ut lengden til $x : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2 \arctan t \end{pmatrix}.$$

- 10 Finn omkretsen av en ellipse med halvaksler 3 og 4.

Du kan parametrisere en kurve Γ på mange måter. Men det er en som er litt spesiell, **buelengdeparametriseringen**. Dette er den parametriseringen der t er buelengden til kurven. Denne er som regel vanskelig eller umulig å finne et eksplisitt uttrykk for, men regnes som den mest "naturlige" parametriseringen, og brukes ofte i teoretiske utgreiinger.

- 11 En flue flyr langs en **sirkulær heliks**¹³ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finn tangenten, banefarten, buelengden og buelengdeparametriseringen.

¹¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent>

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Arc_length

¹³<https://en.wikipedia.org/wiki/Helix>

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kalles *glatt* dersom $f \in \mathcal{C}^\infty$. For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ har ordet en litt annen betydning.

12 Skisser funksjonen $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $x(s) = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \end{pmatrix}$

Dette eksemplet er en klassiker. Komponentene $x_1(t) = t^3$ og $x_2(t) = t^2$ er glatte (altså inneholdt i $\mathcal{C}^\infty$), men kurven til x har en kusp i origo, noe $\mathcal{C}^\infty$ -funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ ikke kan. Grunnen er at banefarten er null når $t = 0$, og da kan alt skje. Hvis fluen stopper helt opp, kan den begynne å kjøre en annen vei når den begynner å fly igjen, og da kan kurven få en knekk. **Enhetstangentvektoren**¹⁴ ved tiden t er gitt ved

$$T(t) = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}.$$

13 La x være funksjonen fra forrige oppgave, og vis at

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} T(t)$$

Vi sier at en funksjon fra $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ er **glatt** i t dersom enhetstangentvektoren eksisterer og dreier på et kontinuerlig vis etterhvert som vi beveger oss langs kurven. En tilstrekkelig, men ikke nødvendig betingelse for dette er at komponentfunksjonene er deriverbare og $|\dot{x}(t)| \neq 0$.

14 Hva med

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^6 \end{pmatrix}?$$



15 Hva har skjedd her?



¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent_vector

Enhetsnormalvektoren er gitt ved

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}.$$

så lenge $T'(t) \neq 0$. Definisjonen av enhetsnormalvektoren ser litt rar ut, men motiveres av følgende oppgave.

- 16 Vis at $T'(t)$ står normalt på $T(t)$ så lenge $T'(t) \neq 0$.
(Hint: deriver likningen $T(t)^T T(t) = 1$.)

Størrelsen

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^T x'(t)}\right)^3}$$

kalles kurvens **krumning**.¹⁵ Dersom x er en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^3$ er **binormalvektoren** kryssproduktet mellom T og N :

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

mens

$$\tau(t) = \frac{\left(x'(t) \times x''(t)\right)^T x'''(t)}{|x'(t) \times x''(t)|^2}$$

kalles **torsjonen**.¹⁶ Enhetstangenten, enhetsnormalen og enhetsbinormalen danner under noen milde betingelser på x en vakker og nyttig basis for $\mathbb{R}^3$ som kalles **frenetrammen**.¹⁷

- 17 Finn buelengde, enhetstangent, enhetsnormal, binormal, krumning og torsjon til alle funksjonene så langt i økten. (Noen av dem er håpløse å regne ut for hånd.)
- 18 Finn buelengde, enhetstangent, enhetsnormal, binormal, krumning og torsjon til løsningen på oppgave 4 her: <https://mortano.folk.ntnu.no/eksamen/4106-25v-bm.pdf>



¹⁵<https://en.wikipedia.org/wiki/Curvature>

¹⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_of_a_curve

¹⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Frenet-Serret_formulas

UKENS NØTTER

- 1 Vis at krumningsradien til x kan skrives

$$R(t) = \frac{|\dot{x}(t)|^3}{|\ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t)|}.$$

- 2 En ellipse med halvaksler rotert $\pi/4$ adianer i forhold til koordinataksene tilfredsstiller likningen

$$\frac{(x+y)^2}{2a^2} + \frac{(x-y)^2}{2b^2} = 1.$$

Vis at kurven parametrisert ved

$$x(t) = (\cos t, \cos(t + \phi))$$

ligger på en slik ellipse.

- 3 Fresnelintegralene er definert ved

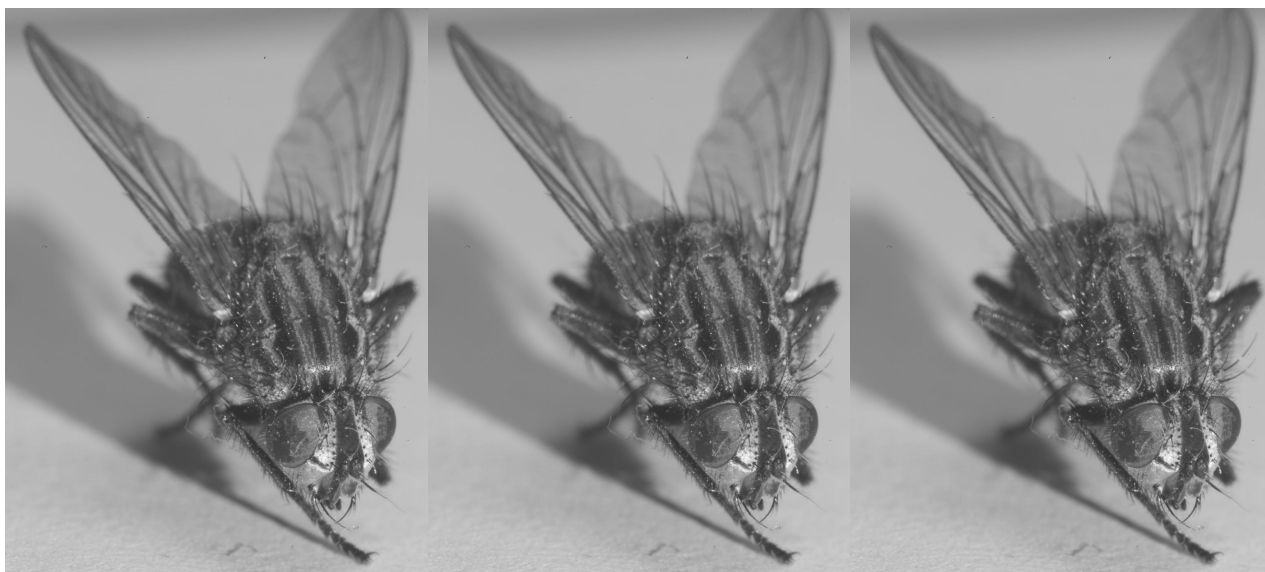
$$C(t) = \int_0^t \cos(s^2) ds \quad S(t) = \int_0^t \sin(s^2) ds$$

Disse dukker opp i forbindelse med optikk. Nå brukes de visst mest til å lage klotoider i rundkjøringer, for den parametriserte kurven

$$x(t) = \begin{pmatrix} C(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$$

har spesielt pen krumning. Kurven kalles Eulerkurven.¹⁸ Finn buelengde, enhetstangent og krumning.

- 4 Vis at buelengden er uavhengig av parametriseringen.



¹⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral

3 - 2 - OM KART OG KOMPASS OG TRYKK OG TEMPERATUR

De første fire radene i tabellen i forrige økt er funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$ og kalles **skalarfelt**, siden den avhengige variabelen er en skalar. Funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ har vi vært borti i TMA4106:

- gjennom bølge- og varmelikningen, der løsningen $u(x, t)$ var henholdsvis utslaget til en streng, spenningen på en kraftlinje, eller temperaturen i en stang.
- som et terreng der (x_1, x_2) er gps-koordinatene og funksjonsverdien $f(x_1, x_2)$ angir høyden over havet.

Nivåkurvene¹ til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er kurver i x -planet der funksjonshøyden er konstant - dette er ekvidistanselinjene på orienteringskartet. **Gradientvektoren**² er en vektor med de partiellderiverte til f . Evaluerer du denne i et punkt i x -planet, får du

1 stigningen i koordinatretningene og

2 den retningen i x -planet der stigningen er brattest.

Dersom du vil ha stigningen i en bestemt retning, prikker du gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen; dette kalles **retningsderivert**.³ Tenk retningen til skiene på skitur.⁴ Et **kritisk punkt** er et punkt der gradientvektoren er null. Her er den retningsderivate lik null uansett hvilken retning du peker skiene, og dersom terrenget er deriverbart er det her du finner toppen av fjellet eller bunnen av dalen eller sadelpunktet på fjellryggen.

0 La $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - x_2$. Finn nivåkurvene, gradientvektoren og alle kritiske punkter.

I dette semesteret skal vi håndtere inn- og utvariable på en mer systematisk måte. La oss først finne den retningsderivate når grafen til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er plan. La $f(x) = ax_1 + bx_2 + c$ og la oss sette

$$g(s) = \begin{pmatrix} x_1 + s \cos \theta \\ x_2 + s \sin \theta \end{pmatrix}.$$

1 Finn stigningen ut fra x med hensyn på s i retningen indikert av θ .



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Level_set

²<https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Directional_derivative

⁴Det sies at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tøys og tull. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse:
<https://snl.no/ski>
<https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/>
<https://secretsoftheice.com/news/2021/10/05/the-best-preserved-pair-of-skis-from-prehistory/>

Oppgaven over henter om hvordan vi skal håndtere matrisedimensjoner på inn- og utvariable. Den uavhengige variabelen x er søylevektor, og vi setter opp de n komponentene til $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ i en søylevektor slik:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

og de mn partiellderiverte til f organiseres i **jacobimatrisen**:⁵

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Dette gjør vi for at alt skal passe med vanene vi har fra matrise-vektorproduktet, som er en av de viktigste funksjonene fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$.

- 2 Et av de aller enkleste skalarfeltene er den lineære funksjonen

$$f(x) = \beta^T x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

der β og x er vektorer i $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Hva er jacobimatrisen?

- 3 Vi kjenner godt $f(x) = Ax$, der $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Hva er $f'(x)$?

En gang i forbindelse med en eksamen, måtte jeg finne på noen meningsløse funksjoner. Jeg trodde jeg skulle krepere av kjedsomhet, men det var nødvendig for å teste om studentene hadde forstått jacobimatrisen.

- 4 La $x \in \mathbb{R}^2$ og $z \in \mathbb{R}^3$ og

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)^2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad g(z) = \begin{pmatrix} -z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 \end{pmatrix}.$$

Finn jacobimatrissene til f og g .

En av arbeidshestene dette semesteret er **kjerneregelen**.⁶ Beviset er for teknisk for dette kurset, men med matrisemultiplikasjon blir regneregelen veldig enkel å skrive opp. La $x \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ og $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, og la $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ være komposisjonen av f og g :

$$h(x) = g(f(x))$$

Da er $h'(x)$ gitt ved matriseproduktet

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

- 5 La f og g være funksjonene i oppgaven over. Finn jacobimatrissene til $f(g(z))$ og $g(f(x))$.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Chain_rule

Det finnes et eget symbol for den transponerte av jacobimatrisen, nemlig **nablaoperatoren**⁷

$$\nabla f(x) = (f'(x))^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T.$$

Det er nemlig nyttig å kunne skrive gradienten som en søyle, og vi skriver $\nabla^T f = f'$.

6 Skriv opp kjerneregelen med nabla istedet for derivasjonsapostrofen.

Det er lurt å studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ ganske grundig. En funksjon vi skal få bruk for dette semesteret, er den kvadratiske funksjonen $f(x) = x^T A x$ der $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

7 Finn f' og ∇f .

Den generelle lineære regresjonsmodellen⁸ skrives

$$Y = X\beta + \epsilon$$

der X er forklaringsvariabelen, Y er responsvariabelen, β er regresjonsparametrene som skal estimeres og ϵ usikkerheten. I TMA4106 så vi på hvordan normallikningene

$$X^T y = X^T X \beta$$

løses for å finne β når $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ og $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ er datamatriser.

8 Normallikningene dukker opp fordi vi leter etter minimumspunktet til

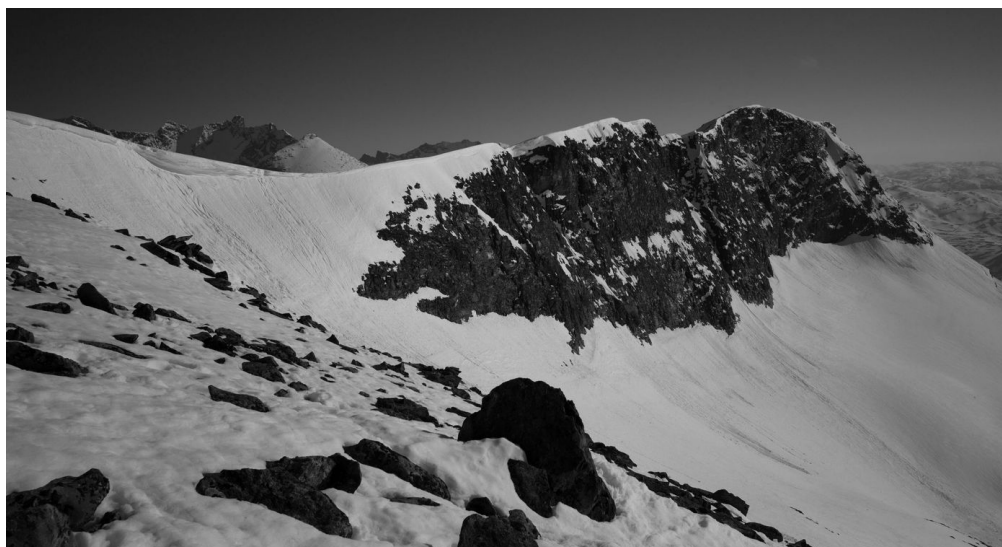
$$f(\beta) = (y - X\beta)^T (y - X\beta).$$

Utled dem ved å sette gradienten til f lik null.

Den ideelle gasslov $T = pV/Nk$ er et naturlig eksempel på en kvadratisk funksjon:

$$f(x) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0.$$

9 Når er det et entydig kritisk punkt? Topp eller bunn? Hva er a -koeffisientene i $T = pV/Nk$?



⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Del>

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/General_linear_model

Tangentplanet⁹ til f i x er analogt til tangentlinjen du lærte på skolen og gitt ved formelen

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

der $s \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Formelen er like bra for $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- 10 Finn tangentplanene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 \quad \text{og} \quad f_2(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3$$

i punktet $(1, 1)^T$. Tangentplanenes nullnivåkurver skjærer hverandre i ett punkt. Hvilket?

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte **kjeglesnittene**.¹⁰ Din daglige rutine er faktisk å reise rundt på en slik - jordens bane rundt solen er sånn omtrent en ellipse.

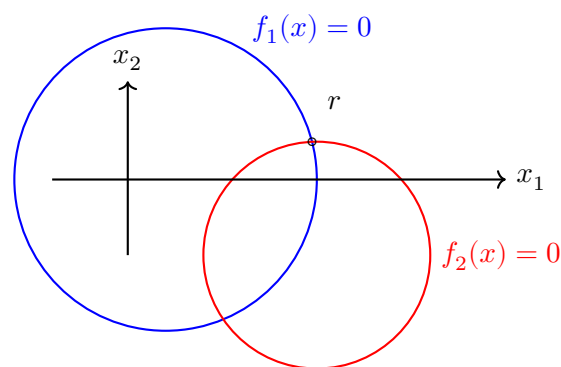
- 11 Skisser nivåkurvene til funksjonene i forrige oppgave.

Har du skjønnet tangentplanene, har du i prinsippet alt som trengs for å forstå **Newtons metode**¹¹

$$x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k)$$

for løsning av det ikkelineære likningssettet

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Her betyr x_k iterasjon k , altså en vektor i $\mathbb{R}^{2 \times 1}$.

- 13 Utled rekursjonen fra tangentplanformelen over.

- 14 I oppgave 10 regnet du faktisk ut et newtonsteg fra initialgjetningen $x_0 = (1, 1)^T$ når du fant skjæringspunktet mellom nullnivåkurvene til tangentplanene. Finn skjæringspunktene mellom sirklene numerisk.

- 15 Finn skjæringspunktene mellom de to ellipsene

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{og} \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 = 1.$$



⁹<https://en.wikipedia.org/wiki/Tangent#Plane>

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method#Multidimensional_formulations

Dersom f har tre uavhengige variable er det best å tenke tetthet, temperatur eller trykk i rommet. Vi får nivåflater istedet for nivåkurver.

- 16 Et stearinlys står og brenner i origo. La oss anta at temperaturen i rommet er gitt ved

$$u(x) = \frac{1}{|x|}$$

der $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Finn gradienten til u . Hvilken retning peker den? Hvordan ser nivåflatene ut?

En av grunnene til at vi tenker på x som en kolonne og ikke en rad er at vi ønsker at den lineære funksjonen $f(x) = Ax$ skal ha matrisedimensjonene vi er vant til. En annen grunn er at vi tenker på en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^n$ som en kolonne og ikke en rad og vi ønsker ofte å sette en slik inn i et skalarfelt.

- 17 En flue flyr langs den sirkulære heliksen fra oppgave 11 i forrige økt og temperaturen er gitt ved u over. Hva er fluens opplevde temperaturforandring som funksjon av tiden?

Dersom f er et skalarfelt med n uavhengige variable, skriver vi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$$

for den dobbelderiverte til f med hensyn på først x_l og så x_k .

- 18 Finn de dobbelderiverte til u over. Hvor mange er det?

Likningen

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = 0$$

kalles **laplaces likning** og funksjoner som passer i den kalles **harmoniske funksjoner**. Disse dukker opp overalt i fysikk.¹²

- 19 Er u i oppgave 16 en harmonisk funksjon?

Det er for øvrig lett å produsere harmoniske funksjoner av to variable - bare splitt en deriverbar funksjon av en kompleks variabel i real- og imaginærdel og så har du en.

- 20 Vis at disse er harmoniske dersom du antar at du kan derivere dem fritt.



¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_function

UKENS NØTTER

En ting som er komplisert i flervariabel kalkulus, er dette med grenseverdier. Den forferdelige definisjonen av grenseverdi fra forrige semester er identisk for flervariabel funksjoner dersom du tolker alle absoluttverditegn som vektorlengde.

- 1 Mannen med ljàen fornyer garderoben sin, og har fått laget seg en stilig ny hette, formet som funksjonen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

der Ω er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$. Mannen med ljàen vil selvfølgelig være helt sikker på at grenseverdien inn mot origo ikke eksisterer, for det må jo være noe djevelsk med hetten. Vis at grenseverdien ikke eksisterer og at f ikke er kontinuert.

Hvis du synes oppgaven over var merkelig, kan du prøve neste, som er enda merkeligere.

- 2 Når mannen med ljàen ondt skuler litt til siden får den nye hetten hans en enda mer djevelsk form. Den ser nå ut som funksjonen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{2x_1^2x_2}{x_1^4 + x_2^2}.$$

der Ω fremdeles er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$. Den ikke-eksisterende grenseverdien i origo bevares naturligvis. Vis at grenseverdien inn mot origo ikke eksisterer.



3 - 3 - OPTIMERING

Du står på toppen av et fjell $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8.$$

- 1 Hva er koordinatene til toppen? Hvordan vet du at du er på toppen?

En funksjon av to variable har fire andrederiverte. Hvis du partiellderiverer to ganger med hensyn på én variabel, får du de **rene** annenordens partiellderiverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

og deriverer du med hensyn på én variabel og så med hensyn på den andre, får du de **blandede**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

- 2 Finn de dobbeltderiverte til fjellet f over.

Det er vanlig å sette opp de andreordens deriverte i **hessematrisen**:¹

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Denne er som regel symmetrisk, men ikke alltid - se ukens nøtter.

- 3 Finn fram til Taylors andreordens formel for en funksjon fra $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}h^T f''(x)h$$

ved å sende en rett linje gjennom x i retning h og bruke kjerneregelen.

I hessematrisen finner vi info om hvorvidt et kritisk punkt er topp eller bunn.

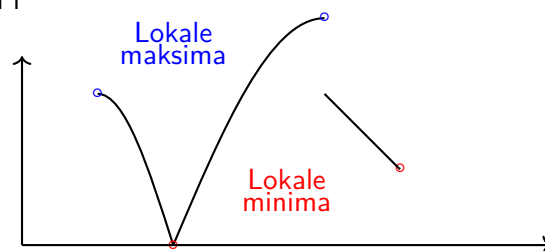
- 4 Forklar hvorfor vi nå trenger å vite om hessematrisen er positivt eller negativt definit eller ingen av delene, og vis at fjellet over har et toppunkt i $(10/7, 8/7)^T$.
- 5 Klassifiser det kritiske punktet til $f(\beta) = (y - X\beta)^T(y - X\beta)$ fra forrige økt.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Hessian_matrix

De kritiske punktene på forrige side er alle enten globale minima eller globale maksima. På gymnaset lærte du at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan ha maksima eller minima i

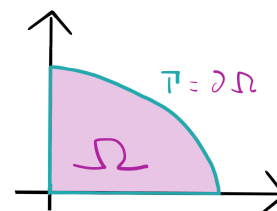
- kritiske punkter.
- punkter der f eller f' er diskontinuerlig.
- endepunktene i definisjonsmengden.



I flere dimensjoner er det litt mer komplisert, men grunnprinsippene er de samme. La oss introdusere litt notasjon. La Ω være en sammenhengende punktmengde i $\mathbb{R}^2$. Hvis en kurve Γ er randen til Ω , skriver vi

$$\partial\Omega = \Gamma.$$

- 6 Et område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ formet ved å ta snittet av første kvadrant med en ellipse med halvakser 4 og 3, se figur. Du går en skitur på fjellet fra forrige side langs $\partial\Omega$ og ønsker å finne toppunktet på turen. (Du kan for eksempel sette opp parametriseringer for alle de tre bitene av Γ og sjekke.)



De fleste land har sitt høyeste punkt på toppen av et fjell. Men noen land, for eksempel Monaco og Finland, har sitt høyeste punkt i en oppoverbakke et eller annet sted på landegrensen. Kina og Nepal har på en måte begge deler, siden de deler Mount Everest. For funksjoner fra $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ gjelder det samme - de kan ha maksima og minima inne på Ω eller et eller annet sted på $\partial\Omega$.

- 7 La nå Ω være området på figuren over og f fjellfunksjonen. Hva er $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sitt globale maksimum og minimum?²

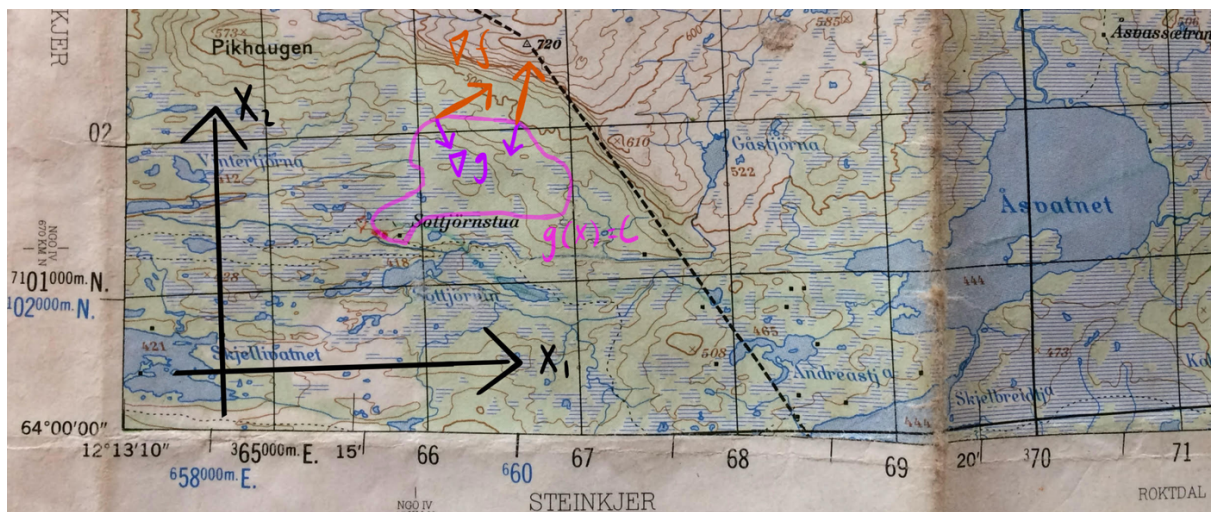


²Egentlig må vi nå være nøye på å skille mellom **åpne** og **lukkede** mengder. Mengden Ω er åpen dersom du kan slå en liten sirkelskive rundt hvert punkt i Ω og så er alle punkter i sirkelskiven inneholdt i Ω dersom radien er liten nok. I dette kurset er det nok å forstå den intuitive ideen - Ω er lukket dersom randkurven $\partial\Omega$ er en del av Ω og åpen dersom $\partial\Omega$ ikke er en del av Ω . Slår du en sirkelskive om et punkt på $\partial\Omega$ vil noe av skiven legge seg utenfor Ω uansett hvor liten radien er.

Dersom du skal finne lokale maksima og minima til en deriverbar funksjon må du altså lete på $\partial\Omega$ i tillegg til å lete opp de kritiske punktene til funksjonen. På forrige side parametriserte du antagelig bitene av $\partial\Omega$, men det finnes en annen teknikk som kalles **Lagranges multiplikatormetode**.³ La oss si at du går på fjellet gitt av f og at gps-sporet ditt er gitt av en kurve med likning $g(x) = c$. Figuren under viser trajektorien til en sliten universitetslektor på orrfugljakt. Ekvidistanselinjene på kartet er de brune nivåkurvene til f , og han går en tur gitt av den rosa kurven.

- 8 Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle, og at dersom nivåkurvene er glatte, finnes det i dette punktet en konstant λ slik at

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x).$$



- 9 Hvorfor er dette det samme som å lete etter kritiske punkter til

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c)?$$

Prøv oppgave 7 på nytt med Lagranges multiplikatormetode.

- 10 Du går på elliptisk skitur på fjellet $h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$, langs trajektorien gitt ved ellipsen med likning $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$. Finn turens høyeste punkt.

- 11 En ellipse med halvaksler $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene, tilfredsstiller likningen

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3.$$

Finn den største verdien til $f(x) = x_1 + 2x_2$ på ellipsen.



³https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

Lagranges multiplikatormetode dukker opp i et overraskende antall anvendelser. En av de viktigste i dag er kanskje flervariabel regresjon.

- 12 En kjemiker har målt lengde og vekt og diameter og så videre på alle erlenmeyerkolbene på laben. Han har målt lengdene både i tommer og i centimeter og ønsker å sjekke om variasjonen i vekt er forklart av variasjonen i lengde og bredde. Men når han prøver å finne den første ordens lineære regresjonen, får han feilmeldingen

`numpy.linalg.LinAlgError: Singular matrix`

når han prøver å løse normallikningene i python. Han er forvirret. Hvorfor skjer dette?

Om datamatriksen X ikke har full rang får man problemer når man skal løse normallikningene. På papiret skjer dette når det er perfekt samvariasjon mellom to variable, men i praksis får man numeriske problemer allerede når samvariasjonen er høy, for da blir kolonnene i X nesten lineært avhengige. Standardmålet på hvor store problemer en matrise har med nesten lineært avhengige kolonner, er **kondisjonstallet**⁴

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

der σ_1 og σ_r er den største og minste singulærverdien.⁵ Problemet med store kondisjonstall, er at *små endringer i matrisen gir store endringer i annet, for eksempel egenverdier*. Dette gjør at modeller kan bli ubrukelige i praksis, siden små målefeil kan gi store endringer i prediksjon.⁶

- 13 I python heter det `np.linalg.cond`. Regn ut kondisjonstallet til

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

for forskjellige verdier for a og b .

Tilnærmet lineær avhengighet mellom kolonnene i X er så og si garantert når det blir mange nok kolonner, og en klassisk teknikk for å håndtere dette kalles **ridgeregresjon**.⁷ Teknikken er enkel å forstå om man har grepet på lagrangemultiplikatorer - du gir opp å lete etter et globalt minimum for $(y - X\beta)^T(y - X\beta)$, og leter heller etter minimum på Ω gitt ved ulikheten $|\beta|^2 \leq r$. Nå ligger det i sakens natur at det globale minimum til $(y - X\beta)^T(y - X\beta)$ ikke skal ligge inne på Ω (i så fall tilfører ridgeregresjon ingenting) så vi leter etter minimum på $|\beta|^2 = r$.

- 14 Hva er minimumspunktet når vi minimerer $(y - X\beta)^T(y - X\beta)$ på $|\beta|^2 = r$?

- 15 På eksamen i TMA4106 i vår fant du det første ordens tovariable regresjonspolynomet til punktmengden $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ og $(0, 0, 0)$. Sentrer punktmengden og finn ridgeregresjonen med $r = 1/10$.

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_effect

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Ridge_regression

Når Hoerl og Kennard i 1970 omtaler det at kovariansen “avviker vesentlig fra enhetsmatrisen”, mener de at kovariansen har høyt kondisjonstall.⁸ Enhetsmatrisen er nemlig verdens beste matrise - den har kondisjonstall 1.

16 Vis dette.

Hvis du gjorde nøttene i økt 2-6 i TMA4106, husker du kanskje aksiomene for lengde:⁹

$$1 : |x| > 0 \text{ dersom } x \neq 0$$

$$2 : |ax| = |a||x|$$

$$3 : |x + y| \leq |x| + |y|$$

17 Den euklidske distansen $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_k x_k^2}$ over er et spesialtilfelle av p -normen

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}.$$

Vis at 2-normen er en lengde. Skisser enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$ for forskjellige valg av p .

Fun fact: Fontenen på Sergelplassen i Stockholm har form som en strukket enhetssirkel for $p = 2.5$.

Velger vi $p = 2$, blir $|A| = \sigma_1$, altså den største singulærverdien.

18 Vis dette og at $\kappa(A) = |A||A^{-1}|$.

En ulempe med ridgeregresjon er at den kun unntaksvis setter komponenter i β lik null. **Lassoregresjon**¹⁰ fikser dette ved å bruke 1-normen istedet for 2-normen. Da kan du kvitte deg med overflødige kolonner i datamatriksen.

19 Forklar hvorfor lasso klarer dette, men ikke ridge.

Dette leder oss over på **lineær programmering**.¹¹ Dette betyr bare at kostfunksjonen er $c^T x$ og at Ω er polygonisk. Når $\partial\Omega$ har knekkpunkter, vil man som regel finne maksima og minima på disse. Studass Bjerkehagen laget en gang en hel økt om lineær programmering, og da introduserte han temaet med omtrent denne problemstillingen.

20 Du har snart eksamen i to grusomme fag, og har hundre timer nødpugging igjen til rådighet. Dette koster deg *strev* og *møye*. Det ene faget koster 2.1 *strev* og 2.9 *møye* per time, mens det andre koster 5.0 *strev* og 4.1 *møye* per time. Du tåler 200.0 *strev* og 300.0 *møye* totalt. Skisser Ω .¹²

21 Du scorer ett prosentpoeng på eksamensscore per time lesing i det ene faget og to per time i det andre faget. Finn den optimale balansen.

22 Rasjonelle studenter ønsker å maksimere karakter, ikke poengscore. Hva er den optimale balansen om du ønsker å få best mulig karakter dersom UiOs karakterskala ligger til grunn?¹³ Enn NTNU sin skala?¹⁴

⁸<https://www.jstor.org/stable/1267351>

⁹[https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_(mathematics))

¹⁰[https://en.wikipedia.org/wiki/Lasso_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Lasso_(statistics))

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming

¹²Hva faen er møye egentlig?

¹³<https://www.uio.no/studier/eksamen/karakterer/fagspesifikk-karakterbeskrivelse/mn-math.html#skriftlig>

¹⁴<https://i.ntnu.no/wiki/-/wiki/norsk/prosentvurderingsmetoden>

UKENS NØTTER

Et viktig matrisemåletall er **spektralradien**

$$\rho(A) = \max_k |\lambda_k|.$$

- 1 Vis at dette ikke er en lengde.

For å forklare at hessematrisen gir info om kritiske punkt, er det nyttig å vite at den er symmetrisk. Men det finnes altså patologiske tilfeller der den ikke er det.

- 2 Er hessematrisen til $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ symmetrisk?

Newtons metode er en teknikk for å løse ikkelineære likningssett, men også en teknikk for å finne kritiske punkter til skalarfelt.¹⁵

- 3 Finn og klassifiser de kritiske punktene til

$$V(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_2^3 - x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2.$$

Her kommer en vanskelig en. Vi skal siden se hvorfor den er så vanskelig.

- 4 Finn en harmonisk funksjon med et topp- eller bunnpunkt.



¹⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method_in_optimization

3 - 4 - OM VÆR OG VIND OG KRAFT

Funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^n$ kalles i noen tilfeller **vektorfelt**¹ og i andre tilfeller **koordinattransformasjoner**. I denne økten skal vi fokusere på den første tolkningen. Vi har allerede sett vektorfelt gjennom matrise-vektorproduktet:

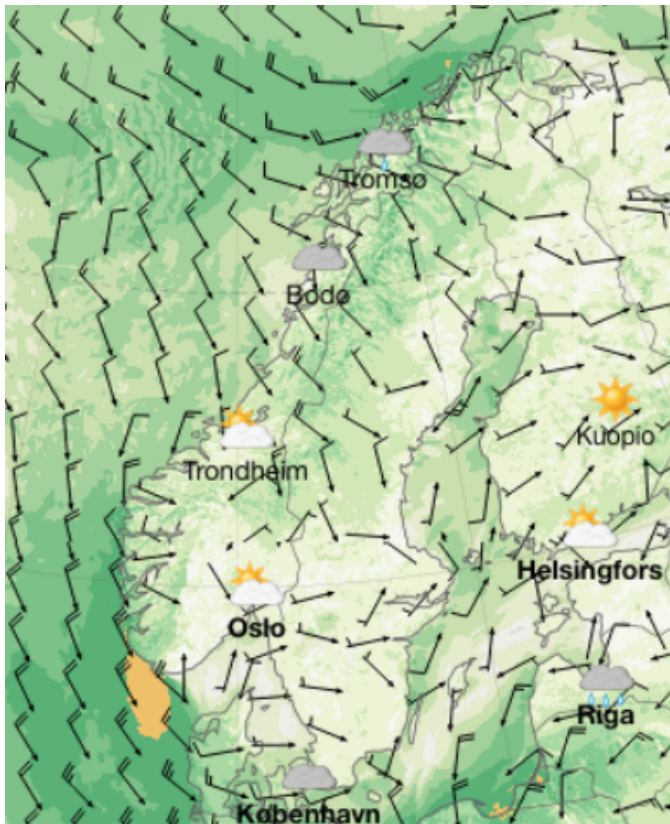
$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

og gjennom gradienten til et skalarfelt f :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Et eksempel fra dagsrevyen er vindpilene på værkart. Du putter inn en vektor med to komponenter (lengde- og breddegrad) og får ut en vektor med to komponenter (vindretning med vindstyrke), og så gir pilen en idé om vindforholdene. På værkart bruker man retningen til å indikere vindretning, og en spesiell hake på enden av pilen for å indikere vindstyrke.²

0 Hvordan er vindforholdene i Tromsø denne dagen?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_field

²<https://hjelp.yr.no/hc/no/articles/360002022134-Vindpiler-og-Beaufortskalaen>

Det er ellers alltid et sted der det er vindstille: https://en.wikipedia.org/wiki/Hairy_ball_theorem

Løsningen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ til $\dot{x}(t) = f(x(t))$ der $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, kalles **strømlinjene**³ til f , siden f angir hva tangenten til x skal være i hvert punkt. Et plot av f kan gi en idé om oppførselen til systemet selv uten en eksplisitt formel for løsningen.⁴

- 1 Plott lotkavolterravektorfeltet $f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -cx_2 + dx_1x_2 \end{pmatrix}$ oppå noen numeriske løsninger.

Du kan tenke at $x(t)$ er posisjonen til et pollenkorn som transporteres av vinden f .⁵ Et annet eksempel er skuringsstripene etter istiden, tenk at f angir isbreens fart i hvert punkt, og så er skuringsstripen avtrykket av løsningstrajektorien.⁶

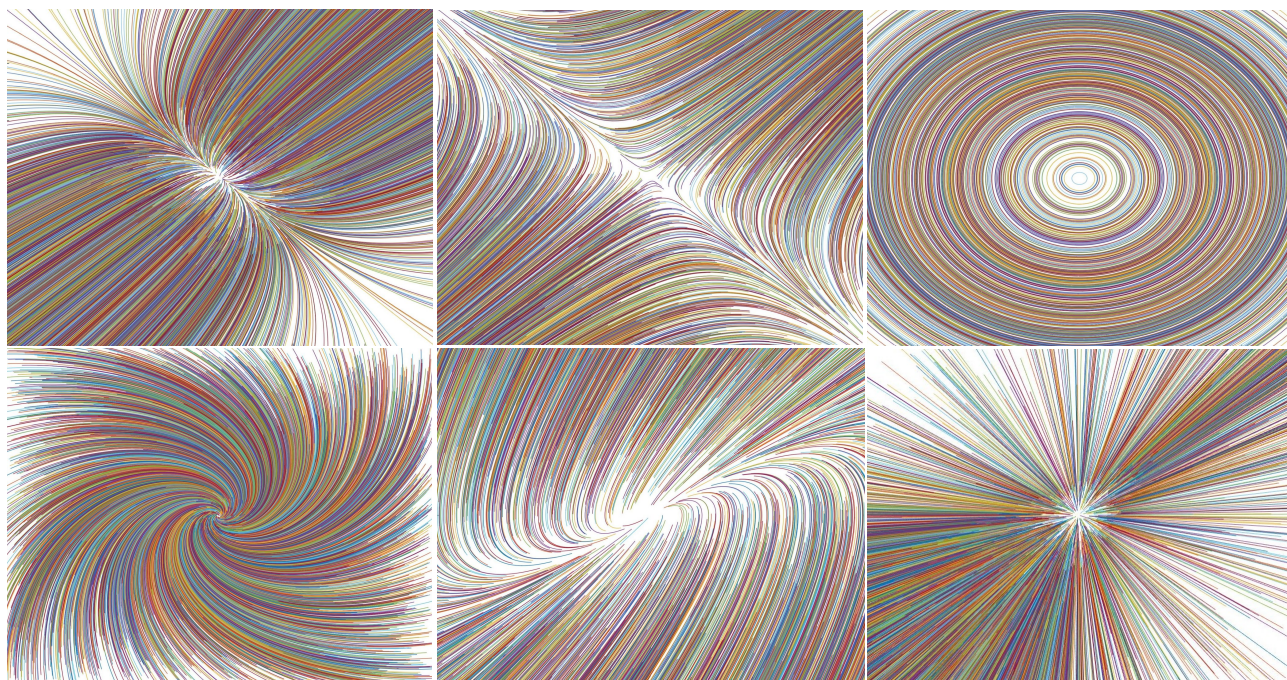
- 2 Finn skuringsstripene til $f(x) = Ax$ der $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Før var det vanlig å drille ingeniørstudenter i å skissere strømlinjene til systemer på formen $\dot{x} = Ax$ der $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, fordi dette er mulig å gjøre med penn og papir. Et plot av x_1 mot x_2 for forskjellige startverdier kalles systemets **faseportrett**.⁷

- 3 Under finner du noen faseportretter jeg laget i matlab i mine glansdager. Hvert av dem inneholder noen tusen løsninger av systemer på formen $\dot{x} = Ax$, der A er

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hvilke plot korresponderer til hvilke matriser? Går løsningene innover eller utover?
(Bruk quiver eller regn ut egenverdier og egenvektorer.)



³https://en.wikipedia.org/wiki/Streamlines,_streaklines,_and_pathlines

⁴Matplotlibs funksjonalitet for dette heter "quiver":

https://matplotlib.org/stable/gallery/images_contours_and_fields/quiver_simple_demo.html

⁵<https://www.yr.no/artikkel/her-ser-du-verdas-vindar-akkurat-no-1.11584952>

⁶<https://no.wikipedia.org/wiki/Skuringsstripe>

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_portrait

Dersom f er et skalarfelt, kalles ∇f **gradientfeltet** til f . Et vektorfelt som er gradienten til et eller annet skalarfelt, kalles **konservativt**, og skalarfeltet kalles **potensialfunksjonen**. Dersom et vektorfelt er konservativt, blir det litt hipp som happ om du skisserer vektorfeltet eller nivåkurvene til potensialet.

- 4 Skissér gradientfeltet og nivåkurvene til fjellet h i forrige økt.

Det er ellers lett å avgjøre om et glatt vektorfelt er et gradientfelt.

- 5 Finn ut hvorfor og avgjør om noen av vektorfeltene på forrige side er konservative. (Hint: Sjekk på side 2 i forrige økt.)

Det er veldig vanlig at vektorfelt i fysikk er gradienten til et eller annet skalarfelt. To av de viktigste er Fouriers varmelov for varmekraft som sier at varmekraften q er proporsjonal med temperaturgradienten:⁸

$$q = -k\nabla T$$

og Ficks diffusjonslov som sier at massefluks J er proporsjonal med konsentrasjonsgradienten:⁹

$$J = -D\nabla\phi$$

Et annet eksempel er Darcys lov for væskeflyt i isotrope porøse medier¹⁰

$$v = -\frac{k}{\mu}\nabla p$$

der v er væskefluks, k permeabiliteten til bergarten, μ væskens viskositet, og p trykket. Noen avstandsvirkende krefter er konservative vektorfelt. Et av dem er Newtons gravitasjonslov.¹¹ På skolen lærte du antagelig denne som

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

der m_1 og m_2 er massene til to ting, mens G er Newtons gravitasjonskonstant¹² og F den tiltrekkende kraften mellom massesentrene til m_1 og m_2 som sitter i avstanden r fra hverandre. Den potensielle energien er

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

slik at

$$F = -\nabla V.$$

- 6 Finn kreftene på jorden fra solen og månen. Hvorfor har vi springflo?

Tollegemesystemer (slik som jorden og månen) har alltid fem punkter i rommet der gravitasjonskreftene og sentrifugalkreftene balanserer hverandre perfekt.¹³ Disse ligger i samme plan og kalles **lagrangepunkter**. Det er vanlig å plassere satellitter i disse, for det koster minimalt med drivstoff å holde dem på plass der - James-Webb-teleskopet sitter for eksempel i et slikt.

- 7 Ett av lagrangepunktene sitter på linjen mellom legemene. Legg jorden i origo og månen i $r = 1$ og regn ut omtrent hvor.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Fick's_laws_of_diffusion

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Darcy%27s_law

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_law_of_universal_gravitation

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_constant

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_point

Vi skal gå et knepp videre og skrive kraftfeltet som en funksjon $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$F(x) = Gm_1m_2 \frac{x}{|x|^3} = \frac{Gm_1m_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Her er det ene massesenteret plassert i origo og det andre i x , slik at F blir den tiltrekkende kraften på massen i origo fra den i x . Bytter du fortegn, får du kraften fra den i x på den i origo. Det er vanlig å dele ut den ene massen og sette opp **gravitasjonsfeltet**¹⁴ til punktmassen m :

$$Gm \frac{x}{|x|^3} = \frac{Gm}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Denne har den samme tallverdien som kraften fra m på et enkilos testlodd, men benevnning N/kg. Det var Cavendish som først klarte å måle G noenlunde presist med et avansert instrument i lab.¹⁵ De første forsøkene var ved å henge opp en pendel ved siden av et stort fjell.¹⁶

- 8 Gravitasjonskraften er konservativ. Finn potensialet.
(Hint: Sjekk ut gradienten til $u(x) = \frac{1}{|x|}$.)

Den elektrostatiske kraften fra en ladning q_1 i origo på en annen ladning q_2 i x kalles **coulombkraften**,¹⁷ og er gitt ved

$$F(x) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}.$$

Jeg håper du ser at denne kraften er matematisk sett identisk med gravitasjonskraften.¹⁸ Akkurat som med gravitasjon, er det vanlig å dele ut den ene ladningen, slik at vi får **det elektriske feltet fra en punktladning** q :¹⁹

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

- 9 En **dipol**²⁰ er en konfigurasjon av to motsatt ladde partikler ved siden av hverandre. Skissér det elektriske feltet til en dipol med en positiv ladning i origo og en negativ i $(1, 0, 0)^T$. Finnes det noe lagrangepunkt?



¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_field

¹⁵https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_07.html

¹⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Schiehallion_experiment

¹⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics>

¹⁸Men de er voldsomt forskjellige i styrke - gravitasjonskraften mellom to elektroner er omtrent en 10^{42} -del av coulombkraften mellom dem: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_01.html

¹⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Electric_field

²⁰<https://en.wikipedia.org/wiki/Dipole>

Nå er vi der at vi kan forstå noen av Maxwells lover. Det elektriske feltet fra en punktladning henger sammen med Gauss' lov. La oss først derivere litt.

10 - 1 Finn jacobimatrisen til det elektriske feltet fra en punktladning.

Nabla-symbolet kalles en **differensialoperator**,²¹ og vi skriver

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \nabla^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Dersom f er et skalarfelt, tenker vi på ∇ som noe som partiellderiverer f og setter de tre partiellderiverte inn i en søylevektor og $\partial/\partial x$ som noe som gjør det samme men setter alt i en radvektor. Et vektorfelt har tre komponenter, og en fruktbar typografisk videreutvikling av denne tankegangen leder til **divergensen**

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

til vektorfeltet f .²² Divergensen er en fysisk viktig størrelse, og vi skal vende tilbake til den jevnt og trutt hele dette studieåret. Hvis vi skulle tatt matriseregnereglene bokstavelig, burde vi skrevet

$$\nabla \cdot f = \nabla^T f \quad \text{eller} \quad \nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}$$

men den første er ikke i vanlig bruk, og den siste har vi allerede bestemt skal bety jacobimatrisen til f . Standardnotasjon for de deriverte til funksjoner av flere variable er ikke alltid like konsistent, og dette må man bare akseptere.

10 - 2 Finn divergensen til det elektriske feltet fra en punktladning.

Divergensen er ellers sporet til jacobimatrisen. Sporet til en matrise er det samme som summen av egenverdiene.

11 Vis dette.

(Hint: Alle matriser har jordandekomposisjon og sporet er invariant under **similaritetstransformasjoner**.²³)



²¹https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_operator

²²<https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence>

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_similarity

Klassisk mekanikk er ellers et viktig bruksområde av vektorfelt.²⁴ For å bestemme bevegelsen til en punktpartikkel må vi sette opp **bevegelseslikninger**.²⁵ Newtons lover er den mest kjente teknikken, men det finnes andre måter å gjøre det på. Det er vanlig å kalle partikkelens posisjon for q og farten for p - disse kalles henholdsvis **generalisert posisjon** og **generalisert bevegelsesmengde**.²⁶ Den fysiske posisjonen til en pendel er for eksempel gitt ved

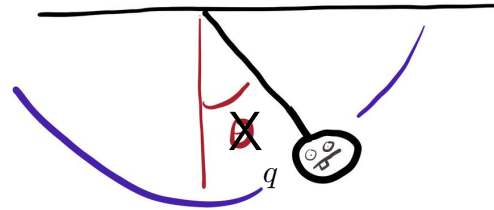
$$x(\theta) = \begin{pmatrix} l \cos \theta \\ l \sin \theta \end{pmatrix}.$$

12 Differensiallikningen er

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

og vi setter $q = \theta$ og $p = \dot{\theta}$. Vis at

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l} \sin q \end{aligned}$$



13 Finn gradienten til funksjonen $L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{g}{l} \cos q$.

Funksjonen L er potensialfunksjon for pendelsystemets høyreside. Denne kalles **lagrangefunksjonen** til systemet, og fremstår som litt snodig siden den er differansen mellom kinetisk og potensiell energi. Lagrangemekanikk består i å utlede bevegelseslikninger fra lagrangefunksjonen istedet for Newtons lover.²⁷ Dette er en litt abstrakt vei inn i mekanikken.

14 Finn lagrangefunksjonen til kloss og fjær $m\ddot{x} = -kx$.

Lagrangemekanikk er snodig. Kvaternionenes oppfinner William Rowan Hamilton tenkte ut noe som er lettere å forstå - la heller løsningene ligge på nivåkurvene til totalenergien $H(p, q)$ til systemet.

15 Finn totalenergien til pendel og kloss.

Totalenergien kalles **hamiltonfunksjonen**, og vi skriver $H(p, q)$ for denne. Både pendelen og klossen er eksempler på noe som kalles **hamiltonsk system**.²⁸

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

16 Vis at løsningen (p, q) ligger på en nivåkurve til H .

Dersom vi har luftmotstand som avhenger lineært av farten, blir pendelsystemet

$$\dot{q} = p \quad \dot{p} = -\frac{g}{l} \sin q - ap$$

der a er en konstant som avhenger av l og formen på pendelen.

17 Er dette vektorfeltet konservativt?

²⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Classical_mechanics

²⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Equations_of_motion

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_coordinates

²⁷<https://davidmorin.physics.fas.harvard.edu/books/classical-mechanics/>

²⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_system

UKENS NØTTER

Kombinerer vi Newtons andre lov med Newtons gravitasjonslov, får vi differensiallikningssystemet

$$\ddot{x} = -Gm \frac{x}{|x|^3}$$

Dette kalles tolegemeproblemet og Newton selv fant ut at trajektoriene blir ellipser.

- 1 Løs numerisk. Du kan prøve å utlede at x blir en ellipse, men det er ikke trivielt.

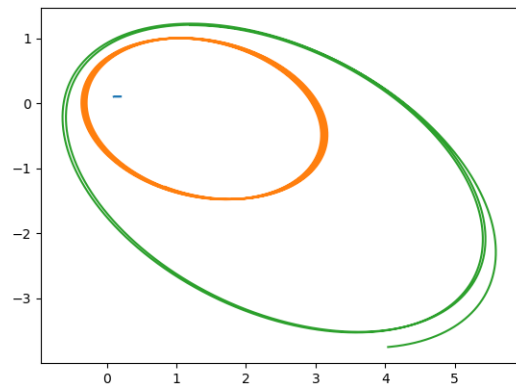
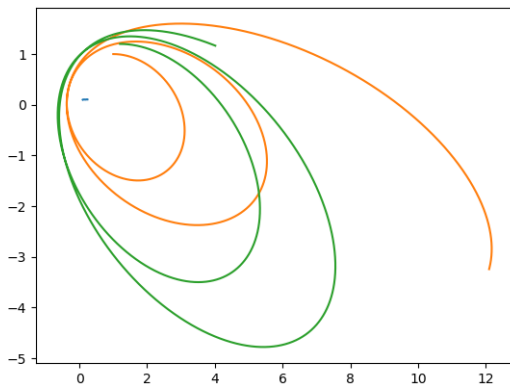
I oppgaven over er det antatt at stjernen står i ro og at planeten beveger seg. I virkeligheten beveger begge seg. Dersom posisjonen til stjernen og planeten er x og y , får vi

$$\ddot{x} = Gm_2 \frac{y - x}{|x - y|^3} \quad \ddot{y} = Gm_1 \frac{x - y}{|x - y|^3}$$

- 2 Løs numerisk. (Hvis du setter $m_1 \gg m_2$ kan du få et realistisk scenario. Solen er omtrent 333000 ganger så tung som jorden.)

Fikk du til oppgaven over, har du sett at jorden, til tross for sin bitte lille masse, får solen til å vagge litt frem og tilbake under sin gang gjennom rommet.²⁹ Dersom det er flere enn to legemer, blir systemet umulig å løse analytisk. Det blir også kaotisk - det er umulig å spå oppførselen langt frem i tid, til tross for at solsystemet ser noenlunde stabilt ut.³⁰

- 3 Superposisjonsprinsippet gjelder, så dersom det er flere planeter, er det bare å legge sammen kreftene og beregne trajektoriene. Prøv. En av figurene under er laget med eksplisitt euler og en med symplektisk. Hvilken er hvilken?



²⁹Det var slik de fant Neptun, som ikke er synlig med det blotte øye. Det var noe feil på vaggingen til Uranus, og Urbain Le Verrier regnet ut så og si helt nøyaktig hvor en mulig planet lenger ut kunne befinne seg:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Neptune>

³⁰https://en.wikipedia.org/wiki/N-body_problem

3 - 5 - LINJEINTEGRALER I

Akkurat som det finnes en forvirrende palett av funksjonstyper fra $\mathbb{R}^m$ til $\mathbb{R}^n$ finnes det en forvirrende palett av integraler å stappe dem inn i. Husk at buelengden til kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er

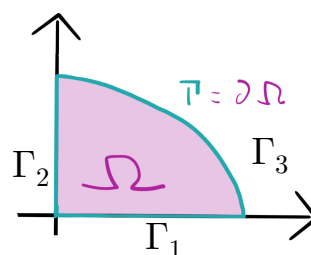
$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |x'(t)| dt.$$

La f være et skalarfelt. Det enkleste flervariabel integralet kalles **linjeintegralet til f over Γ** , og dersom Γ er parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, er det gitt som

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(x(t)) |x'(t)| dt.$$

Integralet kan tolkes på mange måter, men i begynnelsen bør du tenke på det som arealet til en husvegg der f er taket og Γ er husveggen slik den er tegnet i husets arealtegning.

- 1 Du har tenkt å bygge en stilig grillhytte med grunnflate Ω . Du har kjøpt gassgrill og vil derfor ha tak formet som den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$. Du skal bestille panel og polykarbonat til veggene, og trenger derfor å regne ut veggens totale areal. Finn arealet.



Det er vanlig å kreve at x tegner Γ på monotont vis, for ellers blir arealet feil - parametriseringen x får ikke lov til å stoppe opp, snu og kjøre tilbake eller noe sånt.

- 2 Hvordan får man til det? (Hint: Teksten mellom oppgave 13 og 14 i økt 3-1.)



En alternativ tolkning av linjeintegralet er at du har en brugde eller en djevlerokke som beiter pelagisk og svømmer langs kurven Γ . Dersom planktontettheten er gitt ved f , blir linjeintegralet brugdens totale måltid.

- 3 En brugde svømmer langs enhetssirkelen i $\mathbb{R}^2$, og planktontettheten i vannet er gitt ved

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2.$$

Brugden svømmer én gang fra x_2 -aksen til x_1 -aksen mot klokken. Hvor mye spiser den?

- 4 Brugden svømmer så fra x_1 -aksen tilbake til x_2 -aksen langs den rette linjen $x_1 + x_2 = 1$. Planktontettheten er den samme. Hvor mye spiser den på denne turen?



Foto: Greg Skomal

Hvis du har to forskjellige parametriseringer for den samme kurven Γ , får linjeintegralet over Γ den samme verdien. Dette følger av kjerneregelen.

- 5 Den rette linjen i oppgaven over kan parametriseres på mange forskjellige måter. Regn ut integralet med to forskjellige parametriseringer og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den vanligste måten å introdusere linjeintegraler på, er å si at $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ er massetetthet målt i kilo per meter og at Γ er en tråd med massetetthet f . Da blir linjeintegralet til f over Γ trådens totale masse. Denne tolkningen er litt teit, for om en tråd har varierende tetthet (tenk for eksempel på en gitarstreng spunnet med kobbertråd), er det ingen som tenker på denne tettheten som en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. La oss heller ta en brugdeoppgave til.

- 6 Det er dårlige tider i overflaten, og brugden må nedover i vannsøylen. Planktontettheten øker lineært med dybden og er gitt ved $f(x) = -x_3$, og brugden svømmer langs den sirkulære heliksen $x : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -t \end{pmatrix}.$$

Hvor mye spiser brugden på denne turen?¹



¹Det sies at steinbiten (https://en.wikipedia.org/wiki/Atlantic_wolffish) ikke kan svømme rett oppover, men er nødt til å følge en sirkulær heliks om den skal opp i vannsøylen. Jeg vet ikke om dette er sant, men på fridykkerkurs lærer de visst at om man erter på deg en steinbit er det bare å svømme rett opp. Send meg en epost om du har ertet på deg en steinbit noen gang.

Linjeintegralet over skalarfelt kombinerer to typer funksjoner - et skalarfelt som skal integreres og en vektorvaluert funksjon som angir kurven det skal integreres over. Dette er et viktig innsteg til et annet integral, nemlig **linjeintegral over vektorfelt**.² Motivasjonen er kraft ganger vei, eller arbeid, som det også heter.³

- 7 Du drar en ting tre meter bortetter gulvet. Den veier fem kilo og du bruker kraften 10 N parallelt med fartsretningen. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

På skolen var stort sett kraften konstant og bevegelsen rettlinjet, men det hendte at du måtte gange kraften med cosinus til vinkelen mellom denne og bevegelsesretningen.

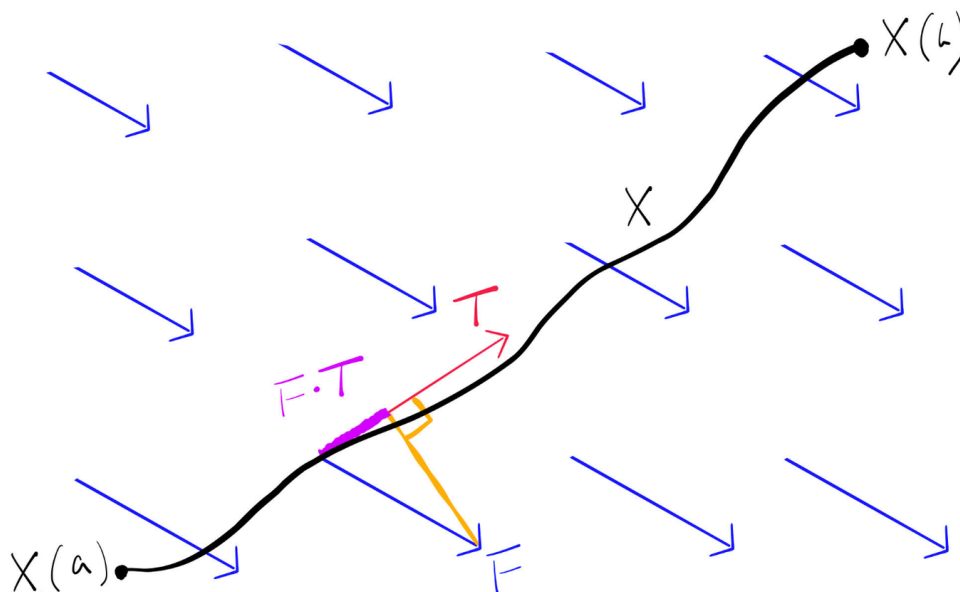
- 8 Du skal dra den samme tingen tre meter til bortetter gulvet, men arbeidsstillingen var litt knotete og du fikk vondt i ryggen, så du endrer stilling og bruker den samme kraften på 10 N, men nå med førtifem graders vinkel oppover istedet. Hvor stort arbeid har du utført etter denne operasjonen?

I det virkelige liv er det mer komplisert. For det første kan kraften være forskjellig fra sted til sted i rommet, og for det andre kan retningen på kurven og retningen på kraften variere i forhold til hverandre. Det er kun kraftfeltets tangentielle komponent til kurven

$$F \cdot T = \frac{F \cdot \dot{x}}{|\dot{x}|}$$

som gjør arbeid - all kraft som står normalt på fartsretningen er irrelevant. For å finne det totale arbeidet må du linjeintegre kraftens tangentielle komponent til kurven. Dette kalles **linjeintegralet til F over Γ** , er definisjonen på arbeidet gjort av kraften F , og skrives slik:

$$W = \int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_a^b F(x(t)) \cdot T(t) |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$



²https://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

³[https://en.wikipedia.org/wiki/Work_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Work_(physics))

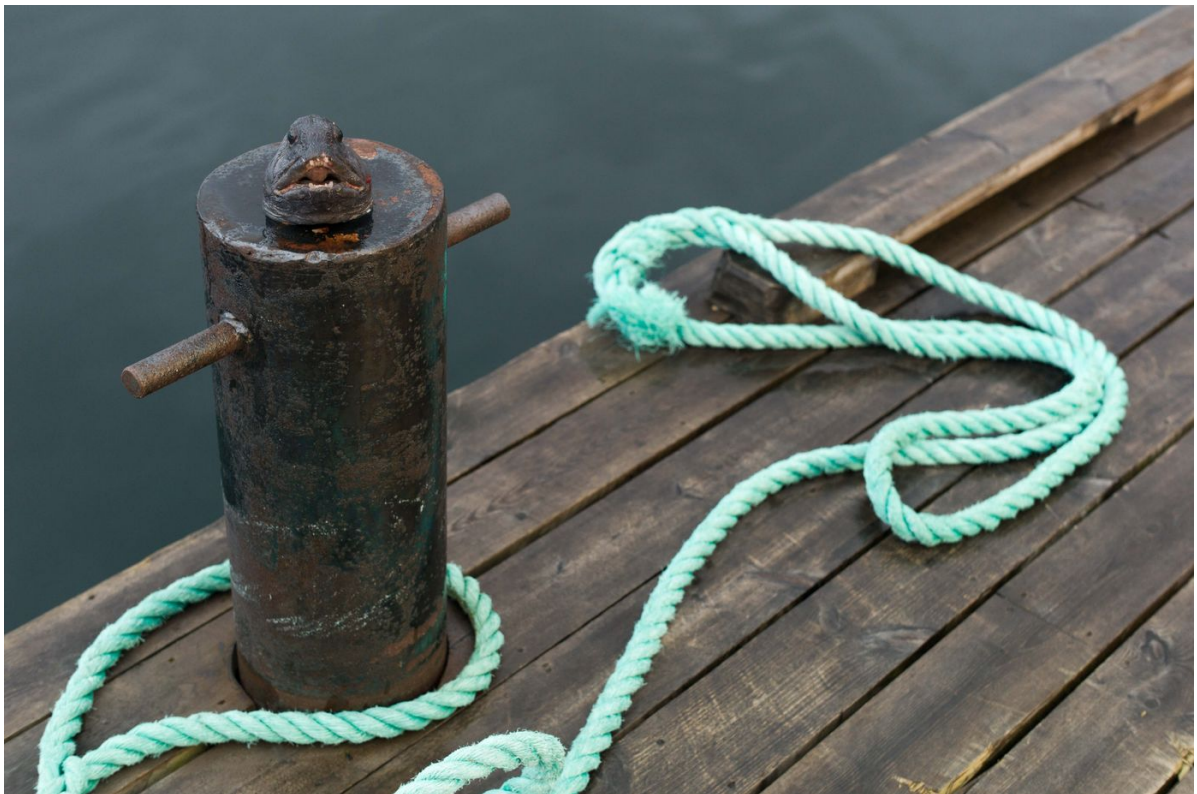
- 9 En husflue (*Musca Domestica*) flyr langs en rett linje fra gulvet opp til kontorpulten og setter seg på den. Det er én meter opp og tre meter bort, og fluen veier 18 milligram. Hvor stort arbeid har tyngden gjort på fluen på denne trajektorien?



- 10 En dykker har ertet på seg en steinbit rett utenfor en elvemunning. Steinbiten svømmer oppover langs den sirkulære heliksen $x : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved $x(t) = (\cos t, \sin t, t)^T$ mens den blir utsatt for en bortadgående laminær vannstrøm. Vannstrømmen utøver en kraft på steinbiten gitt ved

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn arbeidet vannstrømmen gjør på steinbiten.



I oppgavene over er det spurt etter arbeidet som gjøres av en bestemt kraft, men det har ligget andre krefter og lurt i bakgrunnen; for eksempel sa jeg ingenting om hvorvidt det var friksjon eller luftmotstand eller andre ting som dissiperer energi.⁴ Nå skal vi være litt mer spesifikke og anta at F er netto kraft på en partikkel, slik at Newtons andre lov

$$F = m\ddot{x}$$

gir oss partikkelens trajektorie x . Dette er mer komplisert enn situasjonen på forrige side, der partikkelen er vedtatt å følge en bestemt trajektorie uavhengig av kraften vi beregner arbeidet til.

- 11 Partikkelens kinetiske energi er gitt ved $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$. Vis at

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

Hva blir farten til klossen i oppgave 7 og 8 dersom vi antar at din kraft er den eneste som påvirker klossen i fartsretningen og at klossen var i ro når du startet?

Det som er lurt å vite om arbeid, er at noen ganger slipper du faktisk å beregne integralet. Det er derfor jeg plaget deg med gradientfelter i forrige økt. Grunnen til at et vektorfelt sies å være konservativt dersom det er gradienten til et skalarfelt, er at det korresponderer til fysikernes ide om konservativt kraftfelt. Dersom netto kraft er gitt ved $F(x) = -\nabla V(x)$, gir kjerneregelen en enkel formel for arbeidet.

- 12 Vis at $E(b) + V(x(b)) = E(a) + V(x(a))$.

Tyngdekraften er som kjent konservativ, uansett om du bruker Newtons gravitasjonslov eller forenklingen vi alle opplever til daglig på Gløshaugen. Skal du langt ut i solsystemet, er det viktig å beregne arbeidet du må gjøre med eller mot tyngden, så det er praktisk at tyngden er konservativ.⁵

- 13 En partikkel med masse på en kilo farer rundt i $\mathbb{R}^3$ kun påvirket av tyngdekraften fra en partikkel med masse på ett tonn. Den lette partikkelen reiser gjennom punktet $(1, 1, 1)^T$ og har kinetisk energi på én joule. Litt senere reiser den gjennom $(2, 2, 2)^T$. Hva er den kinetiske energien der?

⁴Jeg anbefaler å lese historien om Eulers spektakulære fontenefadese:

<https://link.springer.com/article/10.1007/s004070200054>

Jeg vet ikke om den er sann, men den er ihvertfall morsom.

⁵Eller nært. En av de minst studerte planetene i solsystemet er faktisk Merkur, nettopp fordi den sitter så tett på solen. Banefarten er mye høyere enn vår, overflaten steker på 500 grader, og det er mye arbeid (bokstavelig talt) å håndtere solens sterke gravitasjonsfelt:

https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist

[https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_\(planet\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(planet))

TMA4101/4106/4111/4121



I oppgaven over gjelder det å forstå at tyngdepotensialet

$$V(x) = -\frac{GMm}{|x|},$$

gir deg alt du trenger av informasjon; du bare evaluerer V i $(1, 1, 1)^T$ og $(2, 2, 2)^T$. Det samme nyttiggjør vi oss i elektrostatikken, siden coulombkraften

$$F(x) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

er matematisk identisk med gravitasjon, og følgelig konservativ. Det samme gjelder for det elektriske feltet

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3}$$

som er kraft per enhetsladning. I elektrostatikk er det vanlig å bruke ϕ for potensialet:

$$E(x) = -\nabla\phi(x)$$

og vi skriver

$$\phi(x(b)) - \phi(x(a)) = - \int_{\Gamma} E \cdot ds$$

for arbeidet med å flytte en enhetsladning mellom $x(a)$ og $x(b)$.⁶

14 Finn uttrykket for ϕ . Hva slags benevnning har potensialet?

Termodynamikken er gjennomsyret av ideen om konservative vektorfelt. Istedet for å skrive at trykk er en funksjon av temperatur og volum slik:

$$p = f(T, v)$$

skriver de at gradienten til trykket er et konservativt vektorfelt, men med litt annen notasjon:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv$$

For en matematiker fremstår dette som noe tungvint, men de har sine grunner.

15 Hvis du vil få en ide om termodynamikk og linjeintegraler, kan du prøve oppgave 6.1 her:
https://folk.ntnu.no/vegargje/Mattepilot_MTKJ/matte3_kjemi.pdf

Trenger du regneoppgaver for å trene på linjeintegraler, kan du gjøre oppgavene i kapittel 10.6 (linjeintegraler over skalarfelt) og 11.2 (linjeintegraler over vektorfelt) i Arnes bok.



⁶I praksis kan man ikke gjøre dette, for hvis ladningen akselereres, genererer den et magnetfelt og så blir ikke kraften konservativ lenger og så blir arbeidet feil.

UKENS NØTTER

Det vanlige spørsmålet i klassisk fysikk er “hva slags trajektorie x får en ting med masse m om du slipper den løs i kraftfeltet $F(x)$?”. Dette innebærer å løse Newtons andre lov

$$m\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

for x . Jeg skrev kraft som

$$F(x)$$

over, men det er egentlig riktigere å skrive

$$F(x, \dot{x})$$

altså en funksjon fra $\mathbb{R}^6$ til $\mathbb{R}^3$, for det er ikke uvanlig at kraft avhenger av farten til partikkelen. For eksempel har luftmotstand en tendens til å gå som kvadratet av farten.

- 1 En bil starter med enhetsfart og kjører en runde rundt enhetssirkelen, i fri rulling slik at den eneste kraften i fartsretningen er luftmotstanden, som du kan anta er

$$F(\dot{x}) = -a|\dot{x}|^2.$$

der $a > 0$ er en proporsjonalitetskonstant. Finn det totale arbeidet luftmotstanden gjør på hele runden.

(Her må du først løse en difflikning for farten, og så må du nok til med numerisk integrasjon.)

- 2 La oss spille litt golf. Ballen ligger i ro i origo, og så får den en impuls rettet $\pi/4$ radianer oppover. Ballen er kun påvirket av tyngden og luftmotstanden, som antas kvadratisk med banefarten:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics))

Friksjonskraften blir

$$F(\dot{x}) = -a|\dot{x}|^2 T = -a\dot{x}|\dot{x}|$$

slik at

$$m\ddot{x}_1(t) = \delta(t) - a\dot{x}_1(t)|\dot{x}(t)|$$

$$m\ddot{x}_2(t) = \delta(t) - a\dot{x}_2(t)|\dot{x}(t)| - g$$

Løs numerisk, og estimer arbeidet luftmotstanden gjør på ballen under reisen.

(Hint: hvis du klarte begge golfoppgavene over, klarer du nok å oversette diracpulsen til initialverdier.)

- 3 Det kan være vind også. La oss gå videre til tre dimensjoner, og sette på den konstante vindretningen y . Forklar at dersom $y_3 = 0$ (vind går som regel noenlunde parallelt med bakken) blir systemet

$$m\ddot{x}_1(t) = \delta(t) - a(\dot{x}_1(t) - y_1)|\dot{x}(t) - y|$$

$$m\ddot{x}_2(t) = \delta(t) - a(\dot{x}_2(t) - y_2)|\dot{x}(t) - y|$$

$$m\ddot{x}_3(t) = \delta(t) - a\dot{x}_3(t)|\dot{x}(t) - y| - g$$

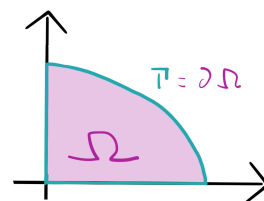
Løs numerisk, og se hvor ballen lander for forskjellige vindretninger.

Men nå er vi kommet til et viktig punkt i den matematiske fysikken, nemlig det at kraft kan integreres på to forskjellige måter - med hensyn på tid og med hensyn på strekning. Kraft integrert over et tidsintervall gir en impuls, altså endring i bevegelsesmengde. Men kraft integrert over strekning gir arbeid, altså endring i energi.

3 - 6 - DOBBELTINTEGRALER

Du bygger videre på din stilige grillhytte med grunnflate Ω og tak formet som den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$. I forrige økt regnet vi ut arealet av den krumme veggen - nå skal vi regne ut volumet av hytten. Volumet under grafen til $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skrives

$$\iint_{\Omega} f$$



og beregnes ikke ulikt volumet av et omdreiningslegeme, så la oss varme opp med å repetere dette.¹ Hvis du dreier $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ én gang om x -aksen, får du en slags pølse med variabel tykkelse. Volumet er

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

fordi arealet av pølsens tverrsnitt er gitt ved

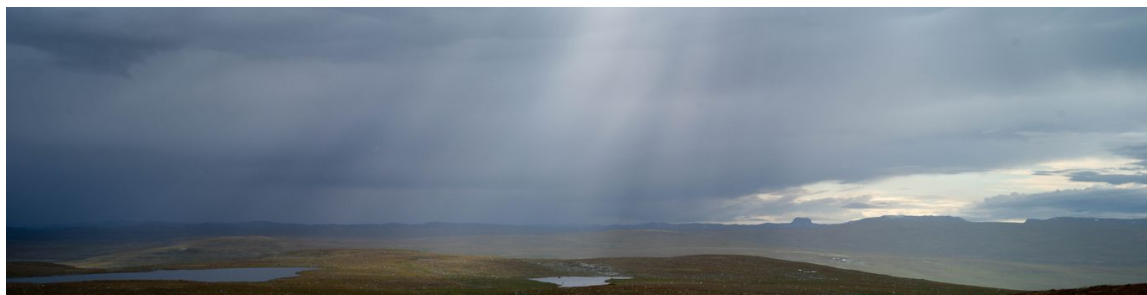
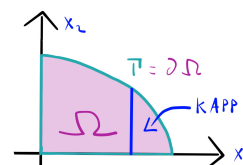
$$A(x) = \pi f^2(x)$$

og hvis du integrerer en funksjon som angir et areal, blir resultatet et volum.

- 1 Drei litt på en bit av sinuskurven, for eksempel mellom to av nullpunktene, og finn volumet.
- 2 Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$.
- 3 Regn ut volumet av Gabriels trompet, altså $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = 1/x$.

Nøkkelen til å forstå volumet av omdreiningslegemer, er å forstå tverrsnittsfunksjonen A . Du må tenke at du har kappet omdreiningslegemet med motorsag og så gir $A(x)$ arealet av tverrsnittet, og så integrerer du denne for å få volumet. Dobbelintegraller fungerer akkurat på samme måte, men $A(x)$ beregnes litt annerledes. La oss nå finne tverrsnittet av grillhytten.

- 4 Du kapper grillhytten i to med en enorm sag. Du tar en bestemt verdi for x_1 og kapper parallelt med x_2 -aksen. Hva er $A(x_1)$?
- 5 Hva blir volumet?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Solid_of_revolution

La oss beregne noen flere volumer. Dersom Ω er et rektangel blir det veldig greit; la oss finne volumet under den ideelle gasslov når $\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^2 \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \int_0^2 \left(\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 \right) dx_2.$$

Dette kalles et **iterert integral**, for det er et integral inni et annet integral. Det innerste integralet gir tverrsnittet som funksjon av x_2 :

$$A(x_2) = \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1$$

6 Hvilken vei gikk motorsaga nå? Finn volumet.

Det er viktig å forstå at motorsaga kan gå begge veier - du velger selv.²

7 Beregn volumet med motsatt integrasjonsrekkefølge.

Det som kan gjøre dobbeltintegraler litt knotete, er at integrasjonsområdet Ω kan være mer komplisert enn et rektangel. La oss prøve trekanten med hjørner i $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$ og $(1, 2)^T$. Knotet er at du får et funksjonsuttrykk i en integrasjonsgrense i det innerste integralet.

8 Sett opp integralet og beregn volumet. Prøv begge veier.

Her er en oppgave fra konten 2024:

9 La $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3.$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(3, 0)$ og $(3, 4)$. Finn volumet under grafen til f .



²Eller, ikke helt faktisk. Det finnes patologiske tilfeller der du må være forsiktig, men de kommer ikke du til å se noe til. Sjekk ut **Fubinis teorem**
https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem
om du er interessert.

Finn volumet under $f(x) = x_1 x_2$ når Ω er (sett opp begge veier)

10 trekanten med hjørner i $(0,0)^T$, $(1,1)^T$ og $(2,0)^T$.

11 diamanten med hjørner i $(1,0)^T$, $(0,1)^T$, $(-1,0)^T$ og $(0,-1)^T$.

12 området mellom parabelen $x_2 = 1 - x_1^2$ og x_1 -aksen.

13 området mellom $x_2 = 1 - x_1^3$ og x_1 -aksen og x_2 -aksen.

Og noen ganger trenger man ikke integrere - volumformlene fra ungdomsskolen gjør jobben. La a være en konstant, og finn

14 $\iint_{|x|^2 \leq a^2} a - |x| \, dx$

15 $\iint_{|x|^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - |x|^2} \, dx$

16 $\iint_{|x|^2 \leq a^2} a \, dx$

Noen ganger kan det bli vel grisete.

17 Finn volumet av grillhytten dersom taket er gitt ved $h(x) = -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8$.

Eller kanskje du må bruke noen gamle triks.

18 Vis at

$$\iint_{\Omega} \frac{dx}{1 - x_1 x_2} = \frac{\pi^2}{6}$$

der Ω er enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$.

Flere oppgaver her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/interaktiv_6.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4105/2024v/plenumsregning_6.pdf



3 - 7 - KOORDINATAVBILDNINGER I

I denne økten skal vi studere funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$, men vi skal tenke litt annerledes på dem enn i vektorfeltøkten, og motivasjonen er en helt annen. Hvis du fikk til oppgave 17 i forrige økt, skrev du opp at volumet er

$$\iint_{\Omega} f \, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \, dx_2 dx_1.$$

Dette integralet er et svineri å beregne for hånd. Men integralet

$$\iiint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-16r^2 \cos^2 \theta - 12r^2 \cos \theta \sin \theta - 18r^2 \sin^2 \theta + 16r \cos \theta + 18r \sin \theta + 8) 12r dr d\theta$$

gir det samme volumet og er trivielt å beregne så lenge du husker Eulers formel. Nå skal vi se på hvordan vi kommer frem til denne formen. Akkurat som i forrige økt, skal vi gå helt tilbake til envariabel kalkulus og repetere litt. Arealet av enhetssirkelen er

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$$

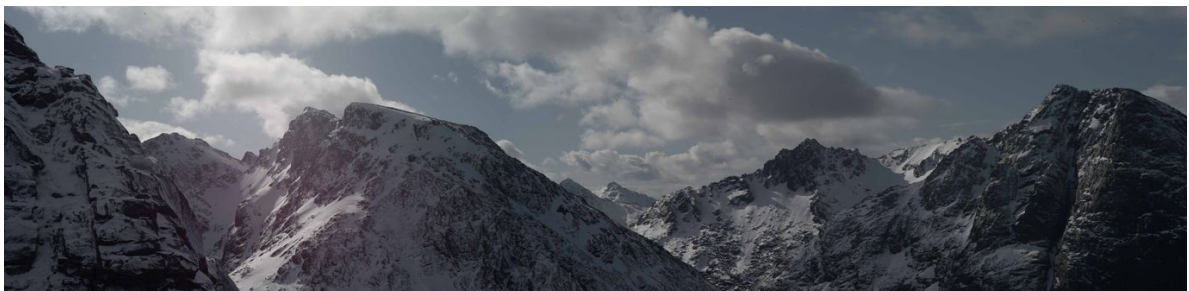
Dette integralet er heller ikke så lett å beregne for hånd med mindre du husker en svær integrasjonstabell, men substitusjonen

$$x = \sin \theta \quad dx = \cos \theta \, d\theta$$

gjør susen:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta) \, d\theta = \pi \end{aligned}$$

- 1 Regn ut arealet av en ellipse med halvaksler a og b . En liknende substitusjon gjør vei i vellinga.



Vi kan fikse krøkkete dobbeltintegraler på liknende vis, men da må vi se funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som **koordinatavbildning** istedet for vektorfelt. Finn bildet av enhetskvadratet under lineæravbildningen $g(x) = Ax$ når A er

$$\boxed{2-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{2-5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{2-6} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \boxed{2-7} \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & 2 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \boxed{2-8} \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Når vi bytta koordinater i enhetssirkelintegralet på første side, måtte vi gange med $\cos \theta$ som kompensasjon for at $\sin \theta$ reiser fra 0 til 1 på en litt annen måte enn identitetsfunksjonen gjør - identitetsfunksjonen går med jevn fart fra 0 til 1, mens sinusfunksjonen går saktere og saktere mot 1 etterhvert som θ nærmer seg $\pi/2$. Dette kommer vi til å måtte kompensere for i dobbeltintegraler også, og da er det viktig å forstå at avbildninger strekker og krymper ting.

- 3 Finn arealet av alle bildene i oppgavene over.

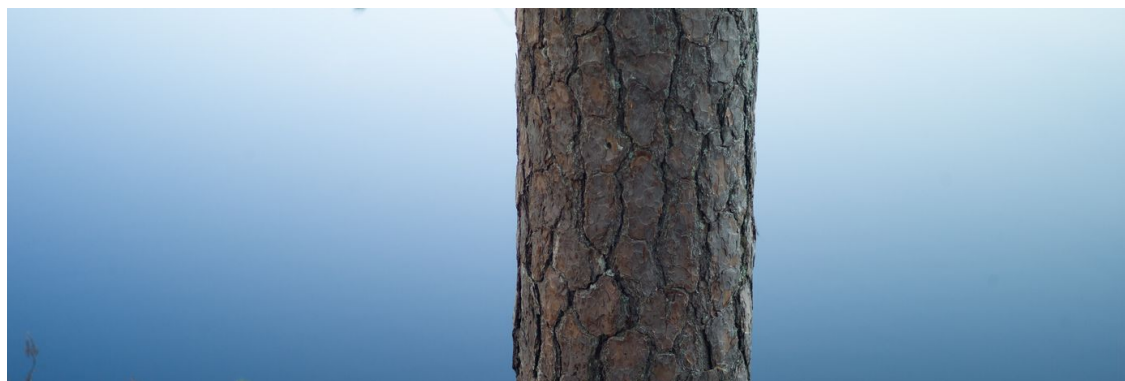
Hvis du skjønnte arealkompensasjonsideen, har du nøkkelen til å forstå dobbeltintegral over tilsynelatende kompliserte definisjonsområder. Hvis du tenker på en todimensjonal riemannsum som en masse små skyskrapere med kvadratisk grunnflate (til høyre ser du et litt patetisk forsøk på å illustrere den ideelle gasslov $f(x) = x_1 x_2$), kan du tenke at koordinatavbildningen forvrenger grunnflatene, og da må du gange alle de små volumene med arealfaktoren. Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er



- 4 parallelogrammet med hjørner i $(0, 0)^T$, $(2, 1)^T$, $(1, 2)^T$ og $(3, 3)^T$.
- 5 et kvadrat med hjørner i $(0, 0)^T$, $(\sqrt{3}/2, 1/2)^T$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)^T$ og $((\sqrt{3}-1)/2, (\sqrt{3}+1)/2)^T$, altså enhetskvadratet rotert tretti grader.
- 6 de andre bildene i oppgave 2 over, samt diamanten fra oppgave 11 i forrige økt.

I oppgavene over er arealutvidelsesfaktoren konstant siden $g(x) = Ax$ er en lineæroperator. For øvrig heter det ikke egentlig "arealutvidelsesfaktoren", det var bare et ord jeg fant på. Det heter egentlig **jacobideterminanten**¹, fordi det er determinanten til jacobimatrisen.

- 7 Finn jacobideterminanten til $g(x) = Ax$ der A er en kvadratisk matrise.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

På forrige side var alt lineæroperatører. Disse hjelper oss til å takle situasjoner der Ω er et parallelogram. For å takle volumet av grillhytten trenger vi noe litt mer komplisert, men trikset er det samme, nemlig å finne en koordinatavbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at Ω er *verdimengden til koordinatavbildningen dersom definisjonsmengden er rektangulær*. Et av de enkleste eksemplene kjenner du allerede godt, nemlig $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x = g(r, \theta) = \begin{pmatrix} g_1(r, \theta) \\ g_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Koordinatparet (r, θ) kalles **polarkoordinater**, og g kalles **polarkoordinatavbildningen**.² Det er ikke så vanlig å tilordne noen bestemt bokstav til koordinatavbildninger, men jeg har valgt å bruke bokstaven g inntil videre. Det vanligste er å bare skrive $x(r, \theta)$ eller noe sånt.³ Dette er kjappere å skrive, men kan lede inn i tvetydighet.

8 Regn ut jacobideterminanten til polarkoordinatavbildningen og finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er den delen av enhetssirkelskiven som ligger i første kvadrant.

9 Et område Ω er begrenset av

$$1 \leq r \leq 2 \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Skisser Ω og finn volumet under den ideelle gasslov på Ω .

Akkurat som linjeintegraler over skalarfelt kan tolkes som massen til en tråd der skalarfeltet gir massetettheten, kan dobbeltintegraler tolkes som massen til en flat ting Ω dersom f er massetettheten i vekt per areal:

$$m = \iint_{\Omega} f$$

Massesenteret⁴ er gitt ved

$$\frac{1}{m} \iint_{\Omega} x f(x) dx = \frac{1}{m} \left(\frac{\iint_{\Omega} x_1 f(x) dx}{\iint_{\Omega} x_2 f(x) dx} \right).$$

Anta konstant massetetthet, og finn massesentrene til

10 alle områdene på forrige side.

11 et kakestykke.

Det er ellers ikke bare i dobbeltintegraler koordinattransformasjoner er nyttige. Fysikere simpelthen elsker områder med radiell symmetri, for det første fordi slike områder er lette å gjøre beregninger på, antagelig også fordi de er lette å produsere. En overfres eller en drill lager jo sirkulære hull. Det er nok billigere å produsere strømkabler med sirkulære enn elliptiske tverrsnitt.

12 Fysikere elsker også Laplaces likning. Vis at laplaceoperatoren blir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polarkoordinater, og finn alle løsninger av laplaces likning som ikke avhenger av θ .

²https://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

³https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_common_coordinate_transformations

⁴https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_18.html

I uttrykket for standardnormalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

er det en multiplikasjonsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som skyldes at arealet under en sannsynlighetstetthet må være 1. Det sies at Lord Kelvin⁵ under en forelesning spurte ut i salen om det var noen som visste hva en matematiker var for noe. Ingen svarte. Da skrev han opp likningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

pekte på den og sa:

“En matematiker er en som synes dette er like innlysende som det er for deg at $2 \cdot 2 = 4$.”

- 13 Vi vet at $e^{-x^2/2}$ ikke kan antideriveres på noen enkel måte, men nå kan vi få has på integralet over allikevel. Regn ut at

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ved å beregne I^2 med polarkoordinater.

Det finnes mange smarte koordinatavbildninger. Husk at tommelfingerregelen for å finne korrekt koordinatavbildning er at Ω skal være bildet av et gunstig område, helst et rektangel.

- 14 Finn en gunstig koordinatavbildning dersom Ω er ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

og finn volumet av grillhytten.

- 15 Du går en skitur på en øy gitt ved

$$h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$$

der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum.

- 16 Finn volumet under den ideelle gasslov når Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 2x_1^2, \quad x_1 = x_2^2 \quad \text{og} \quad x_1 = 2x_2^2.$$

- 17 Her er en gammel eksamensoppgave. La $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 4$$

der Ω er ellipseskiven gitt ved

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + (x_1 - x_2)^2 \leq 1.$$

Finn volumet under grafen til f .

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Lord_Kelvin

3 - 8 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM II

Arbeidet en kraft f gjør på noe som reiser langs kurven Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, får vi ved å prikke med enhetstangentvektoren til Γ og linjeintegre:

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot T(t) |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b f_1(x(t)) \dot{x}_1(t) + f_2(x(t)) \dot{x}_2(t) dt$$

Husk ellers definisjonen av partiellderivert:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f_1(x_1, x_2 + h_2) - f_1(x_1, x_2)}{h_2}$$

Det må være klart at dersom f er kraft, får de partiellderivate benevnning kraft per meter. I statikken som byggingeniørene lærer kalles kombinasjonen av $f_1(x_1, x_2 + h_2)$ og $f_1(x_1, x_2)$ et **kraftpar**. Dette skal vi bruke til å tolke de partiellderivate i jacobimatrisen til $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- 1 Anta du har et bitte lite kvadrat med hjørner i $(x_1 \pm h, x_2 \pm h)^T$. Anta kraften omtrent konstant på hver av sidekantene og finn det totale arbeidet f gjør på en partikkel som reiser én gang rundt kanten.

Analysens fundamentalteorem kommer i mange flere varianter enn den du lærte på skolen. I denne økten skal vi ta unna en variant som heter **Greens teorem**. Den kommer i to ekvivalente versjoner. La oss studere uttrykket

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

- 2 Hvis kvadratet i oppgaven over hadde vært basen i en todimensjonal riemannsumskyskraper, hva er volumet? Hva er sammenhengen mellom dette volumet og arbeidet du fant?



Gjorde du forrige side sånn noenlunde, kom du frem til at volumet under

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

på et lite område gir deg arbeidet f gjør på en partikkel som reiser rundt kanten av området. Greens teorem sier at volumet under den på Ω gir deg arbeidet rundt $\partial\Omega$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds$$

Her er det selvfølgelig masse betingelser - $\partial\Omega$ må være stykkevis glatt, enkeltsammenhengende og traversert mot klokken, og kraftfeltet f må ha kontinuerlige partiellderiverte på en åpen omegn som inneholder Ω . Alt dette står i Arnes bok om du er interessert.

- 3 En bortadgående laminær vannstrøm utøver en kraft gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

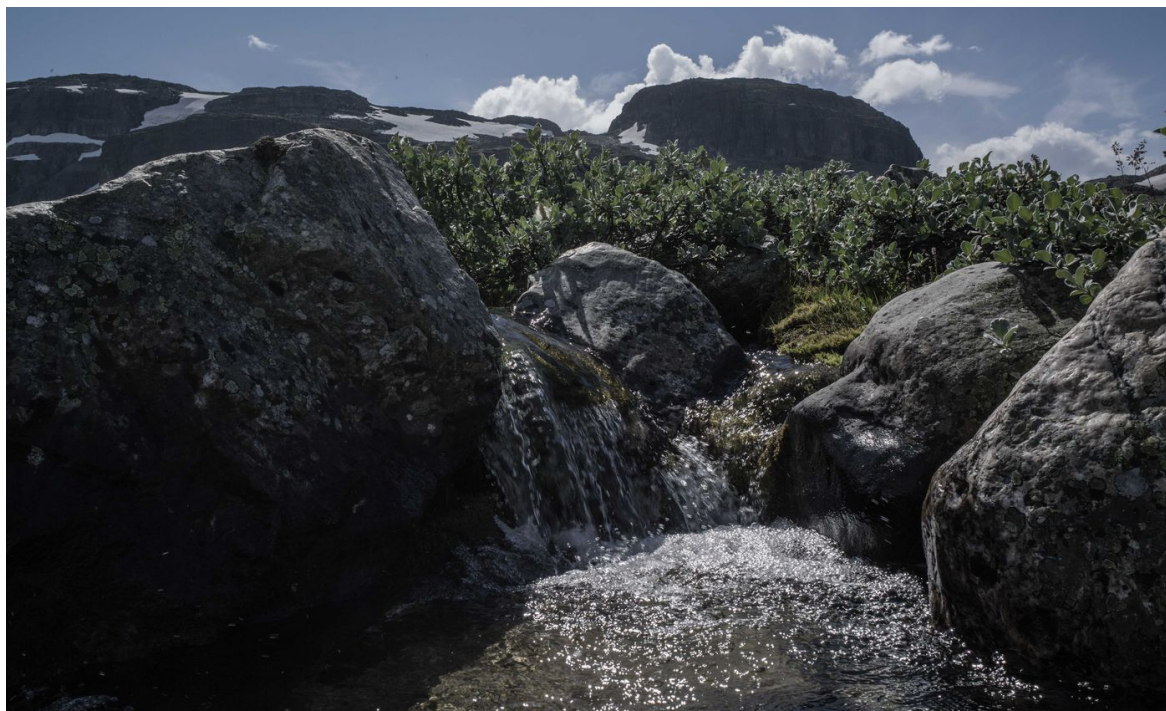
Finn det totale arbeidet kraften gjør på noe som reiser én gang rundt en sirkel sentrert i $(1, 1)^T$ med radius 1. Regn ut arbeidet både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Den laminære vannstrømmen over gir oss faktisk et lurt triks for å beregne arealet av Ω .

- 4 Bruk Greens teorem til å vise at arealet av Ω er

$$\int_a^b x_1(t) \dot{x}_2(t) dt$$

dersom $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriserer $\partial\Omega$ mot klokken. Finn arealet omsluttet av **astroiden** $x(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$.



I begynnelsen er det ikke så godt å huske om arbeidet per areal er gitt ved

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

og det er bare konvensjon som gjør at Greens teorem skrives opp med den første og ikke den andre. Derfor skal vi begynne å bruke ∇ -operatoren til å lage noen enkle huskereglar. Da må vi først ta et gjensyn med en gammel fiende - **kryssproduktet**.¹

[5] Kryssproduktet mellom to vektorer x og y kan skrives som et matrise-vektorprodukt

$$y \times x = Sx.$$

der $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Hva blir S ?

Matrisen S er lett å huske, og gir oss derfor den mest praktiske formelen for kryssproduktet. Vi skal få god nytte av denne matrisen dette året. Nå skal vi sette inn ∇ for y og definere **rotasjonen**² til $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\nabla \times f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Hvis du ser nøye på denne, ser du at tredjekomponenten er innmaten i dobbeltintegralet i Greens teorem.³ Vi tenker derfor på uttrykket

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

som rotasjonen til vektorfeltet

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

og dette er underforstått slik at vi kan skrive $\nabla \times f$ uansett om f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ eller en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$. I førstnevnte tilfelle tenker nok mange på rotasjonen som en skalar siden $\nabla \times f$ alltid er parallell med x_3 -aksen. Dette kommer vi tilbake til i TMA4121.

Finn rotasjonen til

[6] polarkoordinattransformasjonen. [7] det elektriske feltet fra en punktladning.

[8] den laminære vannstrømmen $f(x) = (x_3, 0, 0)^T$.

[9] det meningsløse vektorfeltet $f(x) = (x_2, x_3, x_1)^T$ fra forrige eksamen i TMA4121.

[10] et konservativt vektorfelt. [11] Ax der $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. [12] Ax der A er symmetrisk.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_product

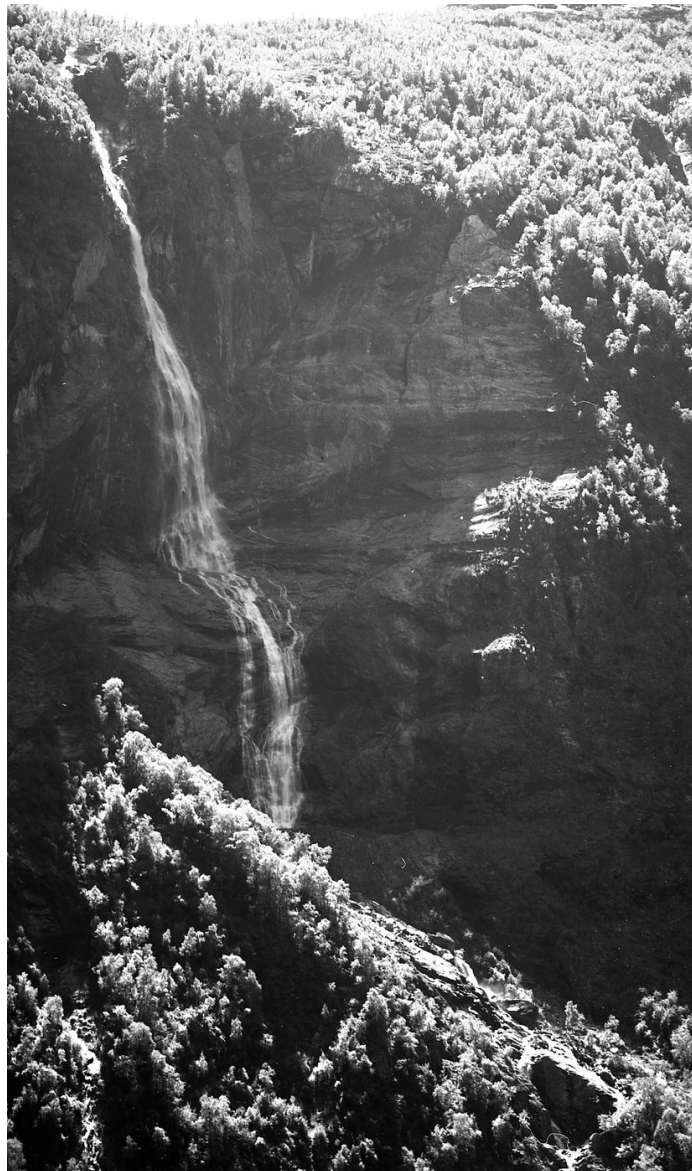
²[https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Curl_(mathematics))

³Dette er ikke tilfeldig - Greens teorem er et spesialtilfelle av en tredimensjonal variant som kalles Stokes' teorem: https://en.wikipedia.org/wiki/Stokes%27_theorem
Dette kommer vi tilbake til.

3 - 9 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM III

I økt 3-1 satte vi opp enhetstangent- og enhetsnormalvektor til en kurve Γ , og i økt 3-5 fant vi arbeidet en kraft gjør på noe som reiser langs Γ ved å prikke kraften med enhetstangenten og linjeintegrere. I forrige økt koblet vi dette integralet på rotasjonen til et vektorfelt. Nå skal vi se hva som skjer når vi prikker med normalvektoren istedet for tangentvektoren, og koble dette på divergensen til vektorfeltet. Det leder til en annen versjon av Greens teorem.

- 1 Du står i en elv med vadebukser. Elven har konstant dybde på én meter, og elvens fart i meter per sekund er gitt ved $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Du har en kurve Γ parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ og du lurer på hvor mye vann som krysser denne kurven per tidsenhet.



Fluksen¹ til vektorfeltet f over Γ får vi ved å prikke med enhetsnormalvektoren og integrere:

$$\int_{\Gamma} f \cdot N ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot N(t) |\dot{x}(t)| dt = \int_a^b f_1(x(t)) \dot{x}_2(t) - f_2(x(t)) \dot{x}_1(t) dt$$

Men her må vi være litt forsiktige. I økt 3-1 satte vi opp normalvektoren som den deriverte av enhetstangenten. Grunnen til dette er at retningen til normalvektoren forteller hvilken vei kurven krummer og lengden forteller oss om kurvens krumning.

2 Regn ut normalvektoren til $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

og forklar hvorfor vi må være forsiktige med å bruke denne definisjonen av normalvektor i fluksintegralet.

Derfor er vi nødt til å innføre litt ny notasjon. Det er vanlig å skrive

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasen i $\mathbb{R}^3$, og dette skal vi gjøre. I tråd med denne konvensjonen setter vi e_n til å bety **enhetsnormalvektoren ut fra** $\partial\Omega$. Dersom $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ må vi altså være litt forsiktige med hvordan denne beregnes. Det finnes en tilsvarende formel for utnormalvektoren til flater i $\mathbb{R}^3$, dette kommer vi tilbake til i økt 3-12.

3 Finn e_n når Ω er enhetssirkelskiven i $\mathbb{R}^2$. Hva om Ω er en ellipse istedet? Enhetskulen i $\mathbb{R}^3$?



¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Flux>

Divergensen

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

gjør en liknende jobb for fluksen som rotasjonen gjør for arbeidet.

- 4 Ta rektangelet fra forrige økt og anta at f er omtrent konstant på hver av sidekantene, og finn sånn omtrent den totale fluksen ut av rektangelet.

Divergensen er et mål på hvor mye vektorfeltet ekspanderer i hvert punkt, og Greens teorem kan også formuleres som at volumet under divergensen til f på Ω skal være lik f sin fluks ut av $\partial\Omega$:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n ds$$

- 5 En bortadgående laminær vannstrøm har hastighet gitt ved

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finn den totale fluksen ut av sirkelen sentrert i $(1,1)^T$ med radius 1. Regn ut fluksen både direkte og med Greens teorem og dobbeltsjekk at du får det samme svaret.

Dersom divergensen til f er null overalt, sier vi at f er **divergensfritt**. Det skjer i den virkelige verden dersom f er en inkompressibel væske. Vann er for eksempel så og si inkompressibelt, mens gass er alt annet enn inkompressibelt.

- 6 En viktig klasse skalarfelter har divergensfritt gradientfelt. Hva slags skalarfelter er dette?

Dersom rotasjonen til f er null, sier vi at f er **rotasjonsfritt**. Gravitasjonskraften og coulombkraften er begge rotasjonsfrie.

- 7 Vis at et konservativt vektorfelt er rotasjonsfritt.

TMA4101/4106/4111/4121



3 - 10 - LINJEINTEGRALER II

Studiet av funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ kalles **kompleks analyse**. Dette brukes i matematisk fysikk, men anvendelsene er avanserte, så det er ikke trivielt å motivere.^{1 2 3} Skal du drive med lineær reguleringsteknikk eller avansert kvantefysikk kommer du til å trenge det. Vi skriver

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

der $z = x + yi$ er en uavhengig kompleks variabel og u og v er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Visualiseringsteknikkene er i samme gate som for koordinatavbildninger.

1 La Ω være en kvart sirkelskive med radius 2 i første kvadrant. Hvordan ser $f(\Omega)$ ut dersom

$$f(z) = z? \quad f(z) = z^2? \quad f(z) = 1/z?$$

En funksjon som hadde litt praktisk nytte tidlig i luftfartens historie var joukovskyaerofoilen:

$$f(z) = z + 1/z$$

Bildet av forskjellige sirkler under denne avbildningen ser omtrent ut som tverrsnittet av en flyvinge, og du kan faktisk estimere løftet med penn og papir hvis du er god i kompleks analyse, jf. oppgave 6 og 7 i forrige uke.⁴



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_field_theory

²https://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_field_theory

³https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Joukowski_transform

Funksjoner fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ oppfører seg fundamentalt annerledes enn reelle funksjoner, og dette medfører at det finnes noen ekstra triks. Vi sier at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon$$

og vi sier at f er deriverbar i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. Den aller siste oppgaven i TMA4106 var å utlede cauchyriemannlikningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

og i oppgave 20 i økt 3-2 viste du at under antagelsen om videre deriverbarhet er både u og v harmoniske funksjoner:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Dette er sant også uten antagelser om videre deriverbarhet, men det er for vanskelig for oss å bevise. Grunnen til at komplekse funksjoner er nyttige i fysikk er at de enkleste modellene for væskeflyt,⁵ stasjonær varmeledning⁶ og elektrostatikk⁷ involverer harmoniske funksjoner. Da nyttiggjør man seg følgende triks.

- 2 Real- og imaginærdelen til en kompleks deriverbar funksjon er ikke bare harmoniske funksjoner. Vis at nivåkurvene til den ene står ortogonalt på nivåkurvene til den andre.



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Potential_flow

⁶https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

⁷https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_07.html

For hundre år siden var komplekse funksjoner uunværlige i praktisk modellering av væskeflyt, stasjonær varmeledning og elektrostatikk, og nå for tiden er de uunværlige i avansert kvantefysikk, men disse anvendelsene er i tidligste laget for oss å gå løs på. Forhåpentligvis skjønner du nå at komplekse funksjoner kan brukes til noe. La oss finne ut mer om hvordan de oppfører seg.

3 Finn real- og imaginærdelene til $f(z) = z^2$ og tegn nivåkurvene deres i samme koordinatsystem.

4 Gjenta for $f(z) = \sin z$, 5 $f(z) = e^z$, 6 $f(z) = 1/z$ 7 og $f(z) = z + 1/z$.

Alt det der med cauchyriemann og så videre er en blanding av fascinerende og forvirrende når man ser det første gang. Det er mye greier med komplekse funksjoner, og vi er over i en del av matematikken som av mange betraktes mer som en form for kunst enn en form for vitenskap. Studiet av det helligste av det hellige, nemlig Riemanns ζ -funksjon⁸

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{alle primtall } p} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

er en gren av den komplekse analysen.⁹

8 Her hadde det vært artig med en oppgave om Riemanns ζ -funksjon, men jeg fant ingenting som hadde passelig vanskelighetsgrad, så du får avspises med å bruke Cauchy-Riemann-likningene til å sjekke at $f(z) = \bar{z}$ ikke er deriverbar istedet. Skisser nivåkurvene til real- og imaginærdelen.

Arbeidshesten i kompleks funksjonsteori er det komplekse linjeintegralet:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt$$

Her er f en kompleks funksjon og Γ en glatt kurve i det komplekse planet, parametrisert av $z(t)$. Tangentvektoren til $z(t)$ er gitt ved $z'(t)$. For eksempel

$$z(t) = e^{it} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

er en parametrisering av enhetssirkelen, med tangent $z'(t) = ie^{it}$.

9 Finn en parametrisering for en sirkel med radius 2 og sentrum i $1 + i$.

Det komplekse linjeintegralet oppfører seg litt som linjeintegral over vektorfelt. Regn ut

$$\int_{\Gamma} z^2 dz$$

der Γ er en

10 kvart enhetssirkel fra realaksen til imaginæraksen i det komplekse planet.

11 rett linje mellom de samme punktene som i forrige oppgave.

12 først langs den ene av disse kurvene og så tilbake langs den andre.

13 en tilfeldig kurve etter ditt frie valg.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

⁹Hvis du virkelig er interessert i primtall, må du kunne kompleks funksjonsteori - du får faktisk en million dollar om du finner ut om riemannhypotesen er sann eller ikke. Gødtere enn prim som de sier på Gjøvik.
https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

Oppgave 10-13 er konstruert for at du skal oppdage noe som kalles **Cauchys integralteorem**.¹⁰ Det kan formuleres på flere måter, men det enkleste er å si at dersom f er deriverbar på Ω og Γ er en lukket stykkevis glatt kurve i Ω , er

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

- 14 Hvis du gjør som Cauchy og antar at u og v har kontinuerlige partiellderiverte (og at Γ er stykkevis glatt og alt det der) kan du faktisk vise dette fra Greens teorem. Trikset er å studere vektorfeltet $F = (u, -v)^T$.

Problemene starter hvis det inni integrasjonskurven finnes ett eller flere punkter der funksjonen ikke er deriverbar. Da kan integralet bli null eller ikke.

- 15 Gjenta oppgave 10-13, men med $f(z) = \bar{z}$ istedet for z^2 .

Funksjonen i oppgave 15 er ikke deriverbar noe sted. Dette er en situasjon man ikke støter på så ofte i anvendelser. Det vanligste er at man må integrere noe som har en singularitet i et punkt z_0 . Dette er et punkt der funksjonen ikke er definert, og i kompleks analyse kalles punktet en **pol**.¹¹ Dersom integrasjonskurven omslutter en pol, kan alt skje, integralet kan bli null eller ikke.

- 16 Beregn $\int_{\Gamma} z^n dz$ for alle heltallige n , der Γ er enhetssirkelen traversert mot klokken.

- 17 Et klassisk ikke-konservativt vektorfelt er

$$f(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

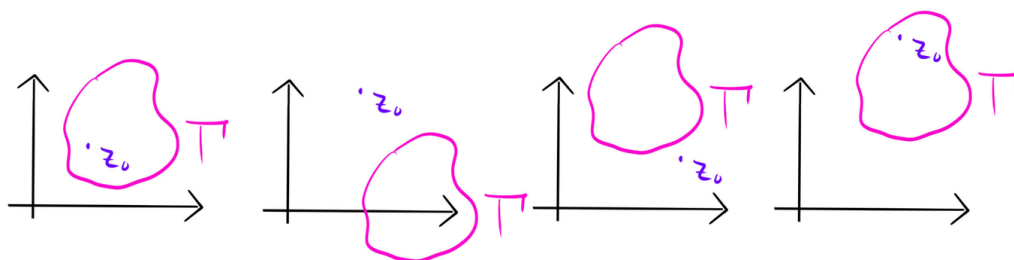
La Γ nok en gang være enhetssirkelen traversert mot klokken, og finn $\int_{\Gamma} f \cdot ds$.

- 18 Beregn $\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$ der Γ er en sirkel sentrert i z_0 med radius r for alle heltallige n .

I anvendelser er det selvfølgelig gunstig å kombinere Cauchys integralteorem med kjente resultater og lure triks heller enn å slite seg ut på antiderivasjon.

- 19 Beregn $\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz$ der Γ er en sirkel sentrert i 1 med radius 1. (Hint: Skriv om integranden.)

- 20 Under har jeg tegna noen kurver. Beregn $\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz$ for alle kurvene og alle heltallige n .



¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_theorem

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Zeros_and_poles

Dersom f er analytisk i z_0 , er også funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

analytisk i z_0 siden grenseverdien

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

er i orden. Dette kan vi bruke til å utlede noe som kalles **Cauchys integralformel**.

- 21 Bruk Cauchys integralteorem på en enkel lukket kurve Γ som omslutter punktet z_0 , og utled formelen

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Cauchys integralformel kan generaliseres til

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

men utledningen er litt mer involvert, så den dropper vi. Cauchys integralformler gir oss en smart teknikk for å beregne integraler. La Γ være enhetssirkelen, traversert mot klokken.

22 $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$

23 $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz$

24 $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz$

25 $\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^4} dz$

26 $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz$

27 $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz$

28 $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz$

29 $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz$

Som du ser er det et system her. Dette kommer vi tilbake til i TMA4121, når vi skal ha om residyregning. (Dere som har regtek i høst har kanskje bruk for cauchys argumentprinsipp.¹² Etter denne økten bør det være mulig å forstå sånn nogenlunde hva det går i.)



¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Argument_principle

3 - 11 - LAPLACEOPERATOREN I

Løsningen til Laplaces likning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

på rektangelet $[0, \pi] \times [0, \pi]$ med randkrav

$$u(x_1, 0) = u(0, x_2) = u(\pi, x_2) = 0$$

og

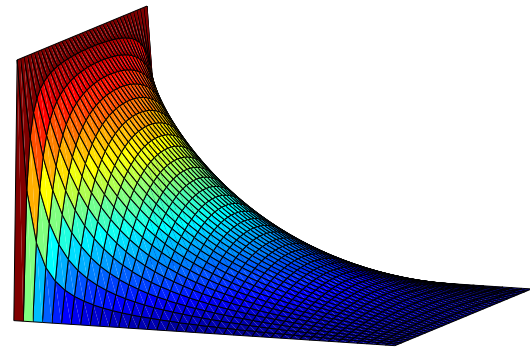
$$u(x_1, \pi) = f(x_1).$$

er

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh nx_2 \sin nx_1,$$

der

$$A_n = \frac{2}{\pi \sinh n\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$



Stasjonær varmeflyt, $f(x) = 1$.

Dette kunne vi regna ut i TMA4106, men det var så mange andre liknende ting der og kurset var stort og hardt nok, så jeg gadd ikke ta det med. Laplaceoperatoren

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

for skalarfelt og divergensen

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

til vektorfelt er i slekt med hverandre og dukker opp så ofte i fysikk at vi bør ta en økt om dem. Vi må nesten se hvordan de dukker opp i anvendelser før vi går videre.

- 0 Skriv opp begge versjonene av Greens teorem dersom $f = \nabla u$ der u er et skalarfelt av to variable. Hva blir fluksen ut av Ω dersom u er en harmonisk funksjon?



Den andre versjonen

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot f = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n \, ds$$

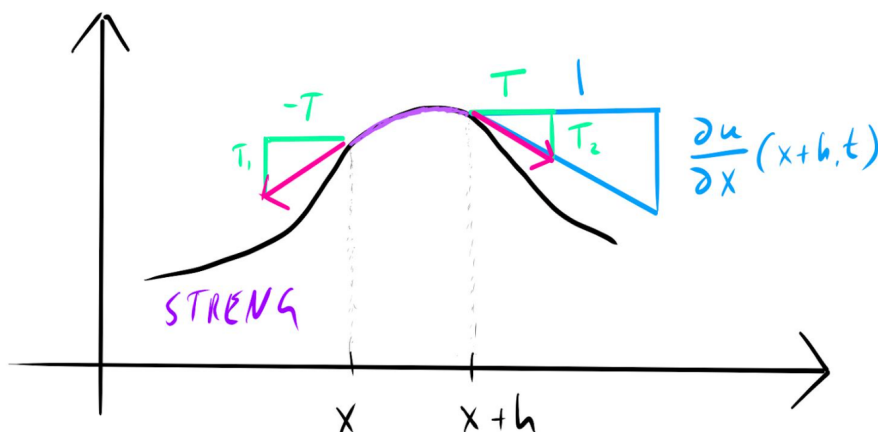
av Greens teorem blir

$$\iint_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot e_n \, ds$$

dersom $f = \nabla u$. Den retningsderiverte $\nabla u \cdot e_n$ dukker opp så ofte at det er smart å ha en egen notasjon:

$$\frac{\partial u}{\partial e_n} = \nabla u \cdot e_n$$

Når vi studerte den første versjonen av Greens teorem, tolket vi f som kraft, og i den andre versjonen tolket vi f som flyt. Nå skal vi utlede bølgelikningen for en vibrerende membran ved å kombinere tolkningen av f som kraft med den andre versjonen. La oss først repetere bølgelikningen for en streng.



Vi antar at den horisontale strekkraften T (i newton) er lik overalt, slik at molekylerne i den lille lilla biten av strengen kun beveger seg rett opp og ned, ikke frem og tilbake. Dette betyr at massen til den lille biten er ρh dersom massetettheten ρ er gitt i kilo per meter. Netto vertikal kraft på biten er $T_1 + T_2$, så Newtons andre lov $F = ma$ gir

$$T_1 + T_2 = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

der $u(x, t)$ er høyden over likevekt. Siden dekomponeringen av strekkraften danner en trekant som er kongruent med trekanten som gir stigningstallet til u med hensyn på x , kan vi skrive

$$T_1 + T_2 = T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right),$$

og hvis vi deler Newtons andre lov på h og lar $h \rightarrow 0$, får vi bølgelikningen for en streng:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Strekraften på en streng måles i Newton. På gitarstrengpakken står strengestrekkingen oppgitt i kilo, for strengens stramhet kan sammenlignes med stramheten du får ved å henge et lodd på den. For et membran må vi egentlig ha en ide om noe som kalles **spenningstensoren**.¹ Dette er en matrise som i hvert punkt angir **spenningene**² i et materiale under last. I tre dimensjoner måles disse i Pascal³ men siden vi har et membran, er det enklere å neglisjere tykkelsen og tenke kraft per meter. Vi skal anta at det finnes en horisontal spenning T som er isotrop og konstant og at den ikke endres når membranet strekkes, analogt til den horisontale strekkraften i forrige utledning.

1 Utled bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

for et vibrerende membran, for eksempel et trommeskinn.

(Hint: Se på en liten bit Ω av membranen, finn kraften på Ω langs $\partial\Omega$, bruk det samme kongruenstriket som for strengen, og avslutt med Greens teorem.)

Hvis vi nå går tilbake til å tenke flyt, kan vi også utlede varmelikningen med hjelp fra Greens teorem og Fouriers varmelov

$$q = -\kappa \nabla u$$

der q er varmekraften u er temperaturen og κ en fysisk konstant som kalles den termiske konduktiviteten.⁴ Tenk at du har en plate som er dekket av Glava over og under, slik at varme kun kan strømme langs med platen.

2 Utled varmelikningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right).$$

Vi kan også legge en stein på et trommeskinn. Denne gir et trykk p (målt i pascal) på skinnen.

3 Utled Poissons likning

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

for et trommeskinn i ro med horisontalt strekk T og trykk p .

4 Laplaces likning $\Delta u = 0$ dukker opp som spesialtilfelle av alle disse, på litt forskjellige måter. Hvordan?

5 Vis at laplaceoperatoren er **rotasjonsinvariant**, altså at de rene partiellderiverte summerer til det samme også om du roterer koordinatsystemet.

6 La Ω være en sirkelskive med radius r , sentrert i x . Vis at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u$$

dersom u er harmonisk på et område som inneholder Ω .

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_\(mechanics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_(mechanics))

³[https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_\(unit\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal_(unit))

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conductivity_and_resistivity

UKENS NØTTER

- 1 Utled oppgave 6 fra Cauchys integralformel.
- 2 Finn uttrykket for trommeskinnet på bildet under.
(Hint: Anta at skinnet har beholdt sin sirkulære form sett ovenfra.)



Takk til Lars i TSO for fuktskadd skarptrommeskinn med form ikke helt ulik $f(x) = x_1 x_2$.

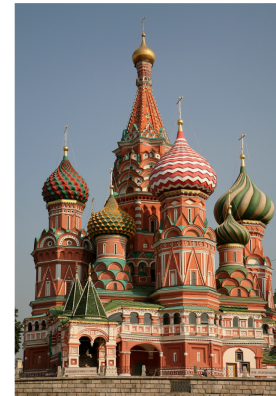
3 - 12 - FLATEINTEGRALER

I likningen for trommeskinnet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

er det gjort en antagelse om at en bit av skinnet kun beveger seg rett opp og ned. Dette er nok ikke langt fra sannheten for et elastisk trommeskinn, men for bølge på havet er det åpenbart feil. Bølger bryter når de kommer inn på grunt vann, og da er ikke vannspeilet et skalarfelt lenger. Et skalarfelt vil aldri se ut som et terreng med overhengende stup, og aldri som en løkkuppel eller en smultring eller en pølse. Derfor har vi **parametrisert flate**.^a Dette er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$.

^ahttps://en.wikipedia.org/wiki/Parametric_surface



Vasilijkatedralen ved Røde plass har flere løkformede kupler.

Vasilijkatedralen
Av W. Bulach.
Lisens: CC BY SA 4.0

<https://snl.no/løkkuppel>

Forskjellen mellom tovariable skalarfelt og parametriserte flater er analog til forskjellen mellom funksjoner av én variabel og parametriserte kurver. Både $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$y = f(x)$$

og $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

tenker vi på som kurver i planet, men funksjonstypene oppfører seg forskjellig. Du kan for eksempel ikke angi en kurve som krysser seg selv med førstnevnte. Hva slags flate angir $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

1 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1],$

2 $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, 1],$

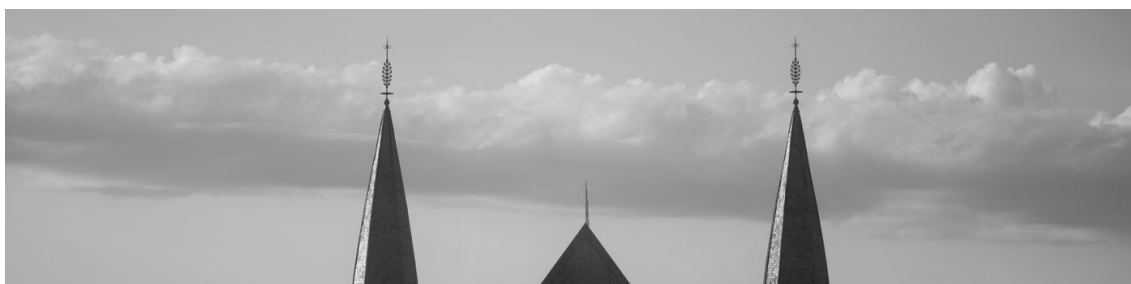
3 $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, \pi],$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ?$$

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ z \end{pmatrix} ?$$

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} ?$$

- 4** Funksjonen $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $p(x) = (40x - 4)(x - 1)^4$ ser nå i bunn og grunn ut som tverrsnittet av en kuppel, spør du meg. Bruk p til å sette opp en passelig parametrisering for en typisk løkkuppel.



Det første vi må lære er å regne ut overflatearealet til en parametrisert flate. Størrelsen

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|$$

er analog til jacobideterminanten, og arealet til Σ parametrisert ved $g : \Omega \rightarrow \Sigma$ er

$$\iint_{\Sigma} dS = \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx.$$

Du kan faktisk tenke på en koordinatavbildning fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ som en parametrisert flate som har x_3 -komponent lik null overalt.

5 Finn arealet til flatene i oppgave 1-4.

6 La Σ være den del av kuleflaten med ligning $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9^2$ som ligger over planet $x_3 = 2$. Finn arealet av Σ .

Den som har vært med å bygge et tak, vet at takets massetetthet målt i vekt per areal er langt fra uniform. I et tak finnes det sperrer, isolasjon, undertak, blikkplater, skruer og vinkeljern og så videre. På Revneset er alt skeivt, så isolasjonen i taket er 5 cm på det tynneste og 20 cm på det tykkeste. Når man konstruerer store bygg er dette selvfølgelig viktig å vite, for man må vite hvordan lasten på takkonstruksjonen er fordelt. Takets totalvekt er

$$\iint_{\Sigma} \rho dS = \iint_{\Omega} \rho(g(x)) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx$$

der Σ er taket og $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ takets parametrisering.

7 Finn vekten av taket på grillhytten fra økt 3-5 dersom du antar konstant massetetthet.

Massesenteret til flaten Σ med massetetthet $\rho(y)$ er gitt ved

$$\frac{1}{\iint_{\Sigma} \rho dS} \begin{pmatrix} \iint_{\Sigma} y_1 \rho(y) dS \\ \iint_{\Sigma} y_2 \rho(y) dS \\ \iint_{\Sigma} y_3 \rho(y) dS \end{pmatrix}.$$

8 Finn massesenteret til et halvt kuleskall med konstant massetetthet.



La flaten være parametrisert ved $g(x)$. De partiellderiverte

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

er begge tangentvektorer til flaten, og følgelig er en av enhetsnormalvektorene til flaten gitt ved

$$e_n = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|}$$

så lenge ingen av tangentene er nullvektoren noe sted. Dette er vi vant til nå - parametriseringer får ikke lov til å stoppe opp eller snu eller noe sånt. Finn utnormalvektorer til

9 en sylinder.

10 en kule.

11 et tetraeder.

12 en smultring.

Har man forstått formelen for flateintegral over skalarfelt, blir fluksintegraler greit. Tenk igjen at du står ute i en elv med vadebukser og holder en tom bilderamme under vann og måler hvor mange liter vann som flyter gjennom rammen per tidsenhet. Vannstrømmen f er en funksjon fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, og strømmen gjennom et punkt på flaten (i liter per kvadratmeter per sekund) er gitt ved

$$f \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|}$$

slik at den totale utstrømningen gjennom flaten Σ (i liter per sekund) er

$$\iint_{\Sigma} f \cdot e_n \, dS = \iint_D f(g(x)) \cdot \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|} \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \, dx = \iint_D f(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \, dx.$$

13 Regn ut fluksen til den laminære vannstrømmen fra økt 3-5 ut av alle områdene i oppgave 9-12.

Vi regner også fluksen til elektriske felt.

14 En punktladning q står i origo. Finn fluksen ut gjennom et kuleskall sentrert i origo.

