

3 - 1 - FLUENS STOLTE GANG OVER RULLEGARDINEN - LF

- 1 Vi trekker likningen $x_1 + x_2 = 0$ fra $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ og får $x_3 = 1$, og ser at alle vektorer på formen

$$x(t) = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

passer i likningssystemet. Dette er jo en rett linje, og derfor kalles gjerne det å sette opp løsningsvektoren "å parametrisere løsningsrommet".

- 2 Denne kan du løse omtrent på samme måte.

- 3 Her er det antagelig lurt å vite at $x : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

er en finfin parametrisering av enhetssirkelen, og passer derfor i likningen $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Den siste komponenten finner vi ved å skrive $x_3 = -x_1 - x_2$, slik at

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}$$

er en parametrisert kurve som passer i begge likninger.

- 4 Dersom vi setter $x_1 = s$ og $x_2 = -s$, har vi noe som passer i likningen $x_1 + x_2 = 0$ og setter vi

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2 = 2s^2,$$

slik at

$$x(t) = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 2s^2 \end{pmatrix}$$

er det gudd.

- 5 Vi tar utgangspunkt i parametriseringen for enhetssirkelen

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Å justere radien til noe annet enn 1 er bare å gange hele greia med radien, og sentrum flytter vi ved å legge til en konstant vektor. Sirklene har likninger

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = 0 \quad \text{og} \quad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 3 = 0$$

så parametriseringene blir

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

og

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3} \cos \theta \\ 2 + \sqrt{3} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

6 Nok en gang bygger vi videre på gamle ting, og innser raskt at

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}$$

passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Den første likningen er av denne typen med $a = 1/\sqrt{2}$ og $b = 1$, så

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Den tredje komponenten regner vi ut ved å ta $x_3 = -x_1 - x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \sin \theta$, slik at vi får

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \sin \theta \end{pmatrix}.$$

7 En ellipse har parametrisering

$$x(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix},$$

så hvis vi setter sammen

$$y(\theta) = R(\alpha)x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix},$$

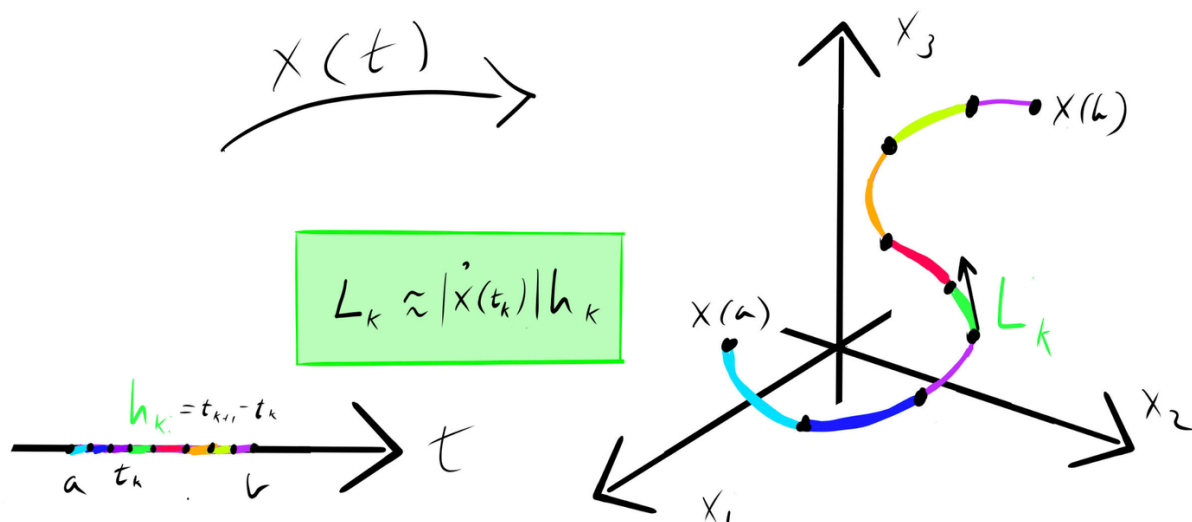
så er vi der. For $\alpha = \pi/4$ får vi

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ b \sin \theta + a \cos \theta \end{pmatrix}.$$

9 Formelen

$$\int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt$$

er en definisjon, og den kan motiveres på flere måter. Steg én er å ta en titt på denne figuren:



Her er intervallet $[a, b]$ på t -aksen partisjonert i n korte linjestykker med lengde h_k . De korresponderende krumme lengdene i x -koordinatsystemet heter L_k , se fargekodene. Buelengden er

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k \approx \sum_{k=0}^{n-1} |\dot{x}(t_k)| h_k,$$

og vi har god tro på at uttrykket på høyre side blir en bedre approksimasjon etter hvert som partisjonen gjøres finere. Men uttrykket til høyre er en venstre riemannsum for funksjonen $|\dot{x}(t)|$, så når partisjonen blir finere, går denne summen mot

$$\int_a^b |\dot{x}(t)| dt.$$

Funksjonen $x : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \ln(1+t^2) \\ 2 \arctan t \end{pmatrix}$$

er spesielt designet til NTH av en ekspert på å konstruere parametriserte kurver man kan beregne buelengden til. Vi finner først tangenten

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{1+t^2} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

og buelengden

$$\int_0^2 |\dot{x}(t)| dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2 \sinh^{-1}(2).$$

10 Tangenten til ellipseparametriseringen er

$$\dot{x}(\theta) = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ b \cos \theta \end{pmatrix}$$

og banefarten er

$$|\dot{x}(\theta)| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

slik at buelengden blir

$$\int_0^{2\pi} |\dot{x}(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

Med $a = 3$ og $b = 4$ blir omkretsen omtrent 22.10. Integralet kalles et **elliptisk integral**, og kan ikke beregnes analytisk. Det er av forskjellige grunner berømt,¹ og kode finner du her: <https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/buelengde/ellipse.py>

11 Vi finner tangenten:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

og buelengden:

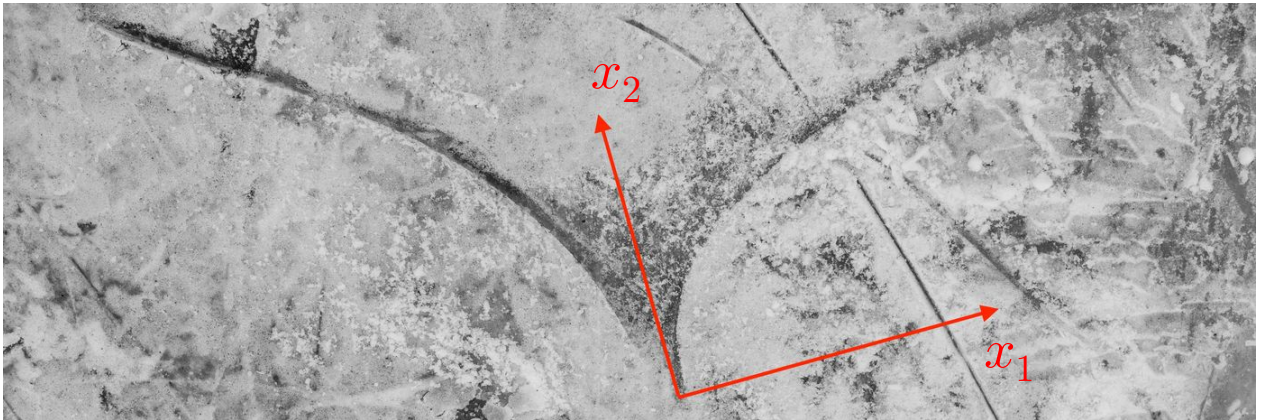
$$\int_a^b |\dot{x}(t)| dt = \sqrt{2} \int_a^b dt = \sqrt{2}(b - a).$$

For buelengdeparametrisering må vi ha et startpunkt, så la oss sette $a = 0$ og $b = t$. Buelengden er i så fall $s = \sqrt{2}t$, så om vi setter inn $t = s/\sqrt{2}$ i den opprinnelige parametriseringen, får vi buelengdeparametriseringen

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos(s/\sqrt{2}) \\ \sin(s/\sqrt{2}) \\ s/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_integral

- 12 Den ser faktisk omtrent sånn ut. Ihvertfall nesten. Om jeg skulle tegna den i forelesning, ville det ikke blitt mer nøyaktig.



- 13 Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

og enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4 + 4t^2}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{|t|\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} \begin{pmatrix} 3t^2/|t| \\ 2t/|t| \end{pmatrix}.$$

La oss se litt på hva alle disse tingene blir når $t \rightarrow 0$. Det er lett å se at

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9t^2 + 4}} = \frac{1}{2}$$

og at

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{|t|} = 0.$$

Men vi har

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{|t|} = 1.$$

og

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{|t|} = -1.$$

slik at

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} T(t) = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette betyr at om du går inn i origo på den negative siden av $t = 0$, peker enhetstangenten rett ned, men når du går utover fra origo på den positive siden av $t = 0$, peker enhetstangenten plutselig rett opp istedet. Den snur momentant 180 grader i $t = 0$ fordi kurven stopper opp og begynner å kjøre motsatt vei.

- 14 Denne ser ut som $x_2 = x_1^2$, bare plott i python og se.
- 16 Deriverer du likningen $T(t)^T T(t) = 1$, får du $2\dot{T}(t)^T T(t) = 0$ så endringen i enhetstangentvektoren står normalt på enhetstangentvektoren. Dette har å gjøre med at enhetstangentvektoren ikke endrer lengde, så det eneste som endres med tiden er retningen den peker.
- 17 La oss gjøre dette for den sirkulære heliksen. Tangenten er

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

og banefarten er

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

så enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

og enhetsnormalen er den normaliserte tidsderiverte av denne:

$$N(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Merk hvordan sistnevnte alltid peker rett inn mot x_3 -aksen. Binormalvektoren er kryssproduktet av disse to, og her vil jeg benytte anledningen til å avsløre et hemmelig triks dere kan bruke for å huske den umulige kryssproduktformelen. Det er relativt lett å huske regnereglene for de imaginære kvaternionene:

$$\begin{array}{lll} ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

I dette kurset skal vi skrive

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Kryssprodukter mellom disse følger den samme tabellen som kvaternionene:

$$\begin{array}{lll} e_1 \times e_2 = e_3 & e_2 \times e_3 = e_1 & e_3 \times e_1 = e_2 \\ e_2 \times e_1 = -e_3 & e_3 \times e_2 = -e_1 & e_1 \times e_3 = -e_2 \end{array}$$

I gamle dager skrev vi i , j og k for disse vektorene, og tabellen er lett å huske siden den øverste raden er syklisk på bokstavene 1 2 3, og forhåpentligvis har du i ryggraden fra gymnasen at

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0.$$

Vi kan bruke disse regnereglene til å beregne kryssproduktet slik:

$$\begin{aligned}
 T \times N &= \frac{-1}{\sqrt{2}} (-e_1 \sin t + e_2 \cos t + e_3) \times (e_1 \cos t + e_2 \sin t) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(-e_1 \times e_1 \sin t \cos t - e_1 \times e_2 \sin^2 t \right. \\
 &\quad \left. + e_2 \times e_1 \cos^2 t + e_2 \times e_2 \sin t \cos t \right. \\
 &\quad \left. + e_3 \times e_1 \cos t + e_3 \times e_2 \sin t \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_3 (\cos^2 t + \sin^2 t) + e_1 \sin t - e_2 \cos t \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ved første øyekast ser det kanskje ikke enklere ut enn å memorisere kryssproduktformelen, men fordelene er at man kan skru av hjernen, så med litt trening er det mye mer praktisk. Krumningen

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \times x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^T x'(t)}\right)^3}$$

er et mål på hvor fort enhetstangenten dreier, og torsjonen

$$\tau(t) = \frac{\left(x'(t) \times x''(t)\right)^T x'''(t)}{|x'(t) \times x''(t)|^2}$$

er mål på hvorvidt kurven ikke er plan i et punkt - null torsjon betyr at kurven ligger i et plan. Begge disse er lette å beregne for den sirkulære heliksen.



3 - 2 - OM KART OG KOMPASS OG TRYKK OG TEMPERATUR - LF

0 Gradientvektoren er

$$f'(x) = (2x_1 + x_2 + 1, x_1 + 2x_2 - 1).$$

Vi setter denne lik null

$$f'(x) = 0,$$

og får likningene

$$2x_1 + x_2 + 1 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

som har løsning $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Nivåkurvene er litt tricky - her gjelder det å ha et øye for smarte koordinattransformasjoner. Vi husker rotasjonsmatrisen

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Koordinatsystemet til x er rotert førtifem grader i forhold til koordinatsystemet y dersom

$$x = R(\pi/4)y$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Setter vi dette inn for x i funksjonen, får vi

$$\begin{aligned} f(x(y)) &= f(Ry) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ &= \frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_2 \end{aligned}$$

og setter vi denne lik en konstant, får vi

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_2 = C,$$

som kan skrives om til

$$3y_1^2 + (y_2 - \sqrt{2})^2 = 2C + 2$$

eller

$$\frac{y_1^2}{(2C+2)/3} + \frac{(y_2 - \sqrt{2})^2}{2C+2} = 1$$

som forteller oss at nivåkurven til $f(x) = C$ er en ellipse med halvakser $\sqrt{(2C+2)/3}$ og $\sqrt{2C+2}$ med sentrum i $y = (0, \sqrt{2})^T$ aka $x = (-1, 1)^T$ aka bunnpunktet.

- 1 Vi setter g inn i f og får den envariable funksjonen

$$f(g(s)) = a(x_1 + s \cos \theta) + b(x_2 + s \sin \theta) + c$$

så kjerneregelen du lærte på skolen gir oss at vi får indreproduktet mellom gradienten og retningen:

$$\frac{d}{ds} f(g(s)) = a \cos \theta + b \sin \theta = (a, b) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Tenk på retningen $(\cos \theta, \sin \theta)^T$ som en dimensjonsløs ting du ganger med s for å få en vektor i $\mathbb{R}^2$.

- 2 Vi får $f'(x) = \beta^T$. Strengt tatt er dette et spesialtilfelle av oppgave 3, men en morsom fun fact kan vel ikke fremsies for ofte.
- 3 Hvis du skriver ut komponentene og tar jacobi, vil du se at $f'(x) = A$. Dette er det første av mange pene eksempler på at regneregler du kjenner fra envariable funksjoner generaliserer pent til flervariabel dersom du setter inn matrisemultiplikasjon overalt der det er vanlig multiplikasjon i regelen du kan fra før.

- 4-5 Sjekk forelesningen i uke 35.

- 6 Her er det bare å skrive om

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

til

$$\nabla^T h(x) = \nabla^T g(f(x)) \nabla^T f(x)$$

og så transponere til

$$\nabla h(x) = \nabla f(x) \nabla g(f(x)).$$

- 7 Vi skriver ut

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

som har gradient

$$(2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})x_2, (a_{12} + a_{21})x_1 + 2a_{22}x_2).$$

som er det samme som $f'(x) = x^T (A + A^T)$. siden

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21} + a_{12} \\ a_{12} + a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vi kan alltid skrive

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

og $\frac{1}{2}(A + A^T)$ kalles den **symmetriske delen** av A , mens $\frac{1}{2}(A - A^T)$ kalles den **skjevsymmetriske delen**. Dekomposisjonen kalles **toeplitzdekomposisjonen**. Siden $\frac{1}{2}(A + A^T)$ er symmetrisk, er $\nabla f = (A + A^T)x$.

8 Når vi fant det kritiske punktet til

$$f(\beta) = (y - X\beta)^T(y - X\beta) = y^T y - 2y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta$$

i TMA4106, gjorde vi slik:

$$\nabla f(\beta) = -2X^T y + 2X^T X\beta = 0$$

og regna ut at

$$X^T X\beta = X^T y$$

eller

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

om du vil.

9 Gradienten er

$$f'(x) = (2a_{20}x_1 + a_{11}x_2 + a_1, a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_2)$$

og det kritiske punktet tilfredsstiller likningssystemet

$$2a_{20}x_1 + a_{11}x_2 = -a_1$$

$$a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 = -a_2.$$

Dette har entydig løsning dersom matrisen er inverterbar og dette skjer hvis og bare hvis

$$4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0.$$

Hvorvidt det er topp eller bunn skal vi komme tilbake til om noen uker, og a_{11} -koeffisienten i den ideelle gasslov er $1/Nk$ mens de andre er null.

10 Gradientene er

$$f'_1(x) = (2(x_1 - 1), 2x_2) \quad \text{og} \quad f'_2(x) = (2(x_1 - 4), 2(x_2 - 2))$$

slik at

$$f'_1(1, 1) = (0, 2) \quad \text{og} \quad f'_2(1, 1) = (-6, -2)$$

Tangentplanene blir

$$p_1(s) = -3 + (0, 2) \begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = -3 + 2(s_2 - 1)$$

og

$$p_2(s) = 7 - (6, 2) \begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = 7 - 6(s_1 - 1) - 2(s_2 - 1).$$

Nullnivåkurvene skjærer hverandre i punktet s som tilfredsstiller

$$2(s_2 - 1) = 3$$

$$6(s_1 - 1) + 2(s_2 - 1) = 7.$$

og dette klarer du nok å regne ut.

11 Nivåkurvene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4$$

tilfredsstiller

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = C$$

og er sirkler med radius $\sqrt{4+C}$ med sentrum i $(1, 0)^T$. Den andre løses på samme måte.

16 Denne oppgaven ser tilforlatelig ut, men peker frem på en veldig viktig ting, spesielt for de som skal lære elektromagnetisme. Vi partiellderiverer og får

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

slik at

$$u'(x) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x^T}{|x|^3}.$$

Dette er en vektor som alltid peker rett inn mot origo, og nivåflatene er dønn sfæriske, altså kuleskall sentrert i origo med radius $1/C$, siden likningen

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = C$$

kan skrives om til

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{C}.$$

17 Vi er interessert i funksjonen

$$g(t) = u(x(t)) = \frac{1}{|x(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Denne er det bare å derivere med hensyn på t , og få

$$g'(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$$

eller bruke kjerneregelen og de foregående oppgavene og få

$$g'(t) = u'(x(t))x'(t) = -\frac{(\cos t, \sin t, t)}{(1+t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

som selvfølgelig blir det samme.

- 18 Et skalarfelt av n variable har n partiellderiverte, og hver av disse er et skalarfelt med n partiellderiverte, så da blir det totalt n^2 dobbellderiverte. De rene dobbellderiverte til u er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = -\frac{1}{|x|^3} + 3\frac{x_k^2}{|x|^5}$$

mens de blandede er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 3\frac{x_k x_l}{|x|^5}$$

- 19 Yes sir, I can harmonic function. I can harmonic function all the night:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= \sum_{k=1}^3 \left(3\frac{x_k^2}{|x|^5} - \frac{1}{|x|^3} \right) \\ &= \left(3\frac{x_1^2}{|x|^5} - \frac{1}{|x|^3} + 3\frac{x_2^2}{|x|^5} - \frac{1}{|x|^3} + 3\frac{x_3^2}{|x|^5} - \frac{1}{|x|^3} \right) \\ &= \left(\frac{3}{|x|^3} - \frac{3}{|x|^3} \right) = 0 \end{aligned}$$

- 20 Cauchy-Riemann-likningene er

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dersom vi deriverer den første likningen med hensyn på x og den andre likningen med hensyn på y og antar at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

(dette er sant, men litt for hardt for oss å bevise), får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Likeledes får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

ved å derivere C-R-likningene henholdsvis med hensyn y og x og anta likhet mellom de blandede dobbellderiverte til u (som nok en gang er sant, men for vanskelig for oss å bevise). Real- og imaginærdelene til en kompleks deriverbar funksjon er altså harmoniske funksjoner!

UKENS NØTTER

- 1 Det er nå generelt slik at det å vise at noe ikke er sant dersom det ikke er sant, ofte kan være lettere enn å bevise at noe er sant dersom det er sant. Grenseverdier er ikke så enkle å håndtere i flervariabel kalkulus, men denne eksisterer ikke, og det kan vi se ved å bytte til polarkoordinater

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

og sette inn i uttrykket for f :

$$f\left(\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}\right) = \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = 2 \cos \theta \sin \theta$$

Nå ser vi at denne funksjonen er konstant på alle rette linjer ut fra origo, men med forskjellig funksjonsverdi $2 \cos \theta \sin \theta$ på hver linje. Disse linjene møtes i origo, så det er klart at grenseverdien der ikke kan eksistere. Hva skulle den vært?

- 2 Denne oppgaven er mest med for å illustrere at det også kan være vanskelig å avgjøre om en grenseverdi eksisterer når den ikke eksisterer. Vi prøver samme triks som i sted, og får

$$f\left(\begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}\right) = \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^4 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{2r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

Hvis vi bestemmer oss for en verdi for θ og så lar $r \rightarrow 0$ slik at x går mot origo, kan det ved første øyekast se ut som om grenseverdien er null, siden telleren går mot null og nevneren mot $\sin^2 \theta$, men dette er feil. Hvis vi sniker oss inn i origo på en slik måte at $\sin^2 \theta$ går mot null etterhvert som vi nærmer oss origo ved å reise inn langs kurven $x_2 = x_1^2$ istedet, får vi

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}\right) = \frac{2x_1^4}{2x_1^4} = 1.$$

som helt klart går mot 1 når $x_1 \rightarrow 0$. Så denne grenseverdien eksisterer visst heller ikke, men det var litt vanskeligere å oppdage.



3 - 3 - OM LANDEGRENSER - LF

- 1 Vi setter gradienten til h lik null:

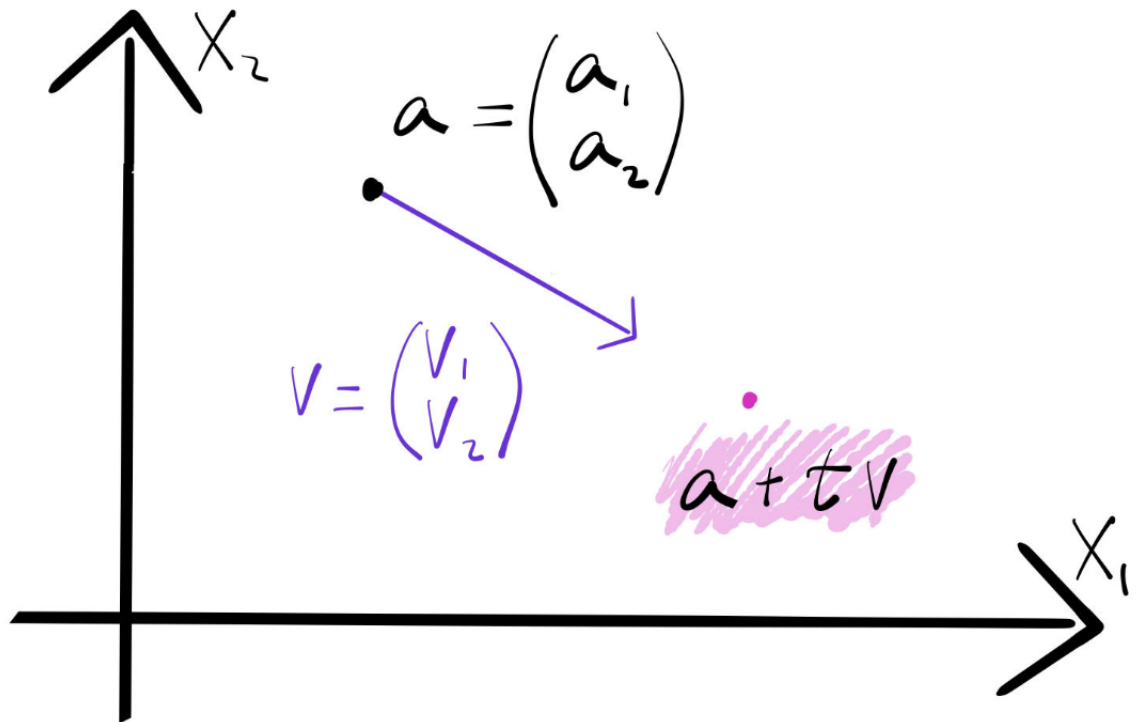
$$-2x_1 - x_2 + 4 = 0$$

$$-x_1 - 4x_2 + 6 = 0$$

som løses av $x_2 = 8/7$, $x_1 = 10/7$. Vi vet ikke at vi er på en topp og ikke en bunn, men det skal vi finne ut av i denne økten.

- 2 Se oppgave 4.

- 3 La oss sende en rett linje gjennom punktet a slik:



Parametriseringen for den rette linjen er

$$x(t) = a + tv = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

La oss definere

$$g(t) = f(x(t)) = f(a + tv)$$

og så bruke kjerneregelen på g , og få

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x(t))x'(t) \\ &= f'(a + tv)v \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv). \end{aligned}$$

Nå kan gjenta denne suksessen og derivere dette uttrykket med kjerneregelen, og få

$$\begin{aligned} g''(t) &= v_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv) \right) + v_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv) \right) \\ &= v_1 \left(v_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a + tv) + v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a + tv) \right) + v_2 \left(v_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a + tv) + v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a + tv) \right) \end{aligned}$$

Hvis du nå skriver ut

$$\begin{aligned} v^T A v &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1^2 a_{11} + v_1 v_2 a_{12} + v_1 v_2 a_{21} + v_2^2 a_{22}, \end{aligned}$$

ser du at vi kan skrive

$$g''(t) = v^T f''(a + tv)v$$

der

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Vi kan nå taylorutvikle g :

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \dots \\ &= f(a) + (f'(a)v)t + (v^T f''(a)v)\frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Merk ellers at

$$g'(0) = f'(a)v$$

som vi kjenner igjen som den retningsderiverte til f i a .

- 4** La a være et av f sine kritiske punkt. Vi tar en motorsag og snitter flaten til $f(x)$ langs den parametriserte linjen $a + tv$, og så taylorutvikler vi motorsagsnittfunksjonen $g(t) = f(a + tv)$ om $t = 0$, slik som i forrige oppgave. Siden $f'(a) = 0$ dersom a er et kritisk punkt, blir taylorutviklingen

$$f(a + tv) = f(a) + (v^T f''(a)v)\frac{t^2}{2} + \dots$$

Dersom t er bitteliten og f oppfører seg bra nok til at $(v^T f''(a)v)\frac{t^2}{2}$ fullstendig dominerer alle leddene som kommer etter, kan vi nå konkludere med følgende tabell. La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $f''(a)$.

- Dersom λ_1 og λ_2 er positive, er a et bunnpunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 er negative, er a et toppunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 har forskjellig fortegn, er a et sadelpunkt.
- Dersom en av dem er null, gir testen ingen konklusjon.

Hvordan kan vi være så freidige? Siden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

for alle funksjoner du kommer til å plages med¹ er $f''(a)$ symmetrisk, og følgelig ortogonalt diagonaliserbar. La u_1 og u_2 være ortogonale egenvektorer til $f''(a)$. Disse utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$, så vi kan alltid skrive

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

og regne ut den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} v^T f''(a) v &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T f''(a) (c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T (\lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2) \\ &= \lambda_1 c_1^2 |u_1|^2 + \lambda_2 c_2^2 |u_2|^2 \end{aligned}$$

Dette uttrykket er helt klart positivt for alle v i det første tilfellet, og konklusjonen følger siden vi følgelig alltid legger noe til $f(a)$ i nærheten av a når vi beveger oss bittelitt vekk fra a . Samme resonnement dersom egenverdiene er negative. Dersom egenverdiene har forskjellig fortegn, kan vi bruke samme resonnement på $v = u_1$ og $v = u_2$ og konkludere med at det finnes en retning der vi går nedover og en retning der vi går oppover, slik at a er en sadel. Hvis en av egenverdiene er null, finnes det en retning der $v^T f''(a) v = 0$, og i så fall trenger vi flere ledd i Taylorrekken for å konkludere. Hvis begge egenverdier er null, er $f''(a)$ nullmatrisen, og da sier andreordensleddet ingenting om hva slags punkt a er.

Dersom alle egenverdier er positive, sier vi ellers at matrisen er positivt definit. Tilsvarende for negative egenverdier.

Hessematrisen til fjellet i oppgave 1 er

$$f''(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

som har karakteristisk polynom

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(4+\lambda) - 1 = 7 + 6\lambda + \lambda^2$$

og egenverdier

$$\lambda = -3 \pm \sqrt{2}$$

som begge er negative, og følgelig kan vi være sikker at dette er en fjelltopp og ikke en dalbunn.

¹Det finnes patologiske unntak, slik som for eksempel $\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, der de blandede andreordens partiellderiverte ikke er like, men disse er konstruert av matematikere for å krangle med folk som er uforsiktige nok til å påstå at de blandede andreordens partiellderiverte alltid er like. Se ukens nøtter.

- 5 Hessematrisen er $X^T X$ og denne er som kjent positivt definit dersom X har full rang, så da må det kritiske punktet være et minimumspunkt.

- 6 Du må lete etter maksima og minima til de tre envariable funksjonene

$$h(x_1, 0) = -x_1^2 + 4x_1 + 8 \quad x_1 \in [0, 4]$$

$$h(0, x_2) = -2x_2^2 + 6x_2 + 8 \quad x_2 \in [0, 3]$$

$$h(4 \cos \theta, 3 \sin \theta) = -16 \cos^2 \theta - 12 \cos \theta \sin \theta - 18 \sin^2 \theta + 16 \cos \theta + 18 \sin \theta + 8 \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

Det er trivielt å se at de to første har globale minima i endepunktene og globale maksima i kritiske punkter. Den siste er uhåndterlig med penn og papir.

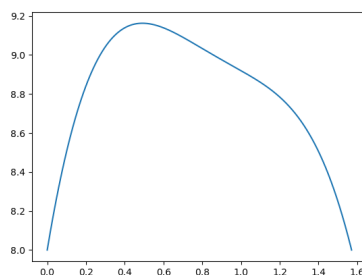
- 7 Siden f er et andreordens polynom, kan vi skrive

$$f(a + tv) = f(a) + (v^T f''(a) v) \frac{t^2}{2},$$

og siden $f''(a)$ er negativt definit, vil funksjonsverdien i et tilfeldig punkt i $\mathbb{R}^2$ være funksjonsverdien i det kritiske punktet pluss noe negativt. Derfor er det klart at det kritiske punktet er et globalt maksimum. Minimumspunktene må sitte på $\partial\Omega$, så la oss sjekke. Funksjonsverdiene på de rette delene har åpenbart minimum i endepunktene, og funksjonsverdiene på den krumme delen av $\partial\Omega$ kan skrives

$$h(4 \cos \theta, 3 \sin \theta) = -12 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin^2 \theta + 16 \cos \theta + 18 \sin \theta - 8 \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

så her må vi nesten plote litt:

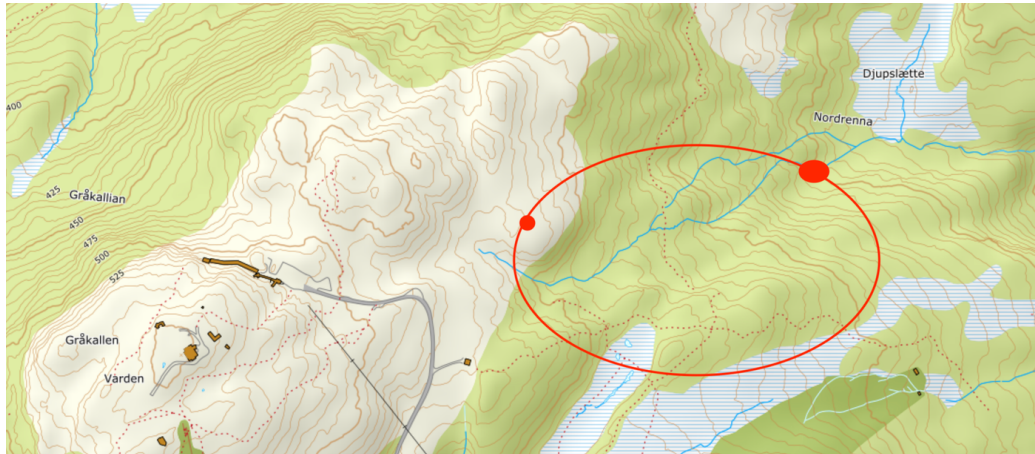


Det er klart fra figuren at de lokale minima finnes i endepunktene også på den krumme delen, så da må vi sjekke

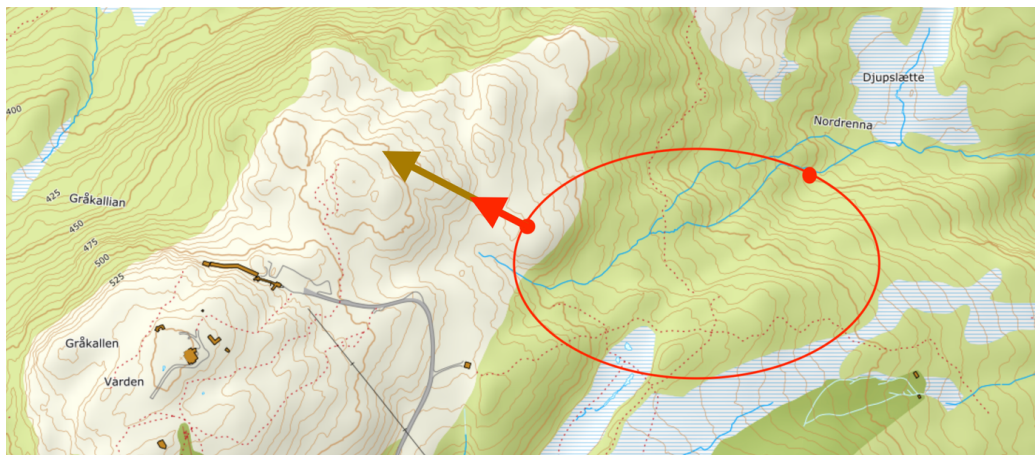
$$f(0, 0) = f(4, 0) = f(0, 3) = 8$$

og globalt minimum er 8.

- 8 Lagranges multiplikator metode er basert på en ide som er veldig enkel å forstå om man har det klart for seg hvordan gradienten til en funksjon skal tolkes geometrisk. Den er også til god hjelp dersom man ønsker en enkel huskeregel nettopp for å huske gradientens geometriske tolkning. Hvis jeg sier at man går en tur på den elliptiske kurven i figuren under, klarer de aller fleste uten å tenke seg om merke av turens høyeste og laveste punkt:



Nå gjelder det å tenke på f (altså den funksjonen du skal maksimere eller minimere) som en funksjon som beskriver fjellet du går på. Nivåkurvene til f er det som er printa som ekvidistanselinjene på et vanlig turkart. Den snedige ideen til lagrange var å se på turtrajektorien som nivåkurven til en eller annen annen funksjon g , og så innse at i f sine topp-, bunn- eller sadelpunkter **må gradienten til f være parallell med gradienten til g , siden gradienter og nivåkurver står normalt på hverandre.**



Denne ideen gir tre likninger

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ g(x) &= c\end{aligned}$$

som kan løses for x og λ . Det er litt forskjellige betingelser ute og går; f og g må være deriverbare, og gradientene kan ikke være null, og du må ikke være i endepunktet for trajektorien og litt forskjellig.

Alternativt kan vi parametrisere kurven og bruke kjerneregelen og få

$$\nabla^T f(x(t)) \dot{x}(t) = 0$$

siden $f(x(t))$ har et lokalt maksimum og

$$\nabla^T g(x(t)) \dot{x}(t) = 0$$

siden $g(x(t))$ er konstant.

9 Gradienten til L er

$$\begin{aligned} L'(x) &= \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}(x), \frac{\partial L}{\partial x_2}(x), \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x) \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), c - g(x) \right) \end{aligned}$$

og setter vi denne lik null, får vi lagrangelikningene siden trajektorien er gitt ved $g(x) = c$. Vi kan nå prøve oss på den krumme delen av $\partial\Omega$, som har likning

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

slik at

$$g(x) = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9}.$$

Gradienten til g er

$$g'(x) = \left(\frac{x_1}{8}, \frac{2x_2}{9} \right)$$

mens gradienten til h regnet vi ut i oppgave 1:

$$f'(x) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 4x_2 + 6)$$

Alt i alt får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4 &= \lambda \frac{x_1}{8} \\ -x_1 - 4x_2 + 6 &= \lambda \frac{2x_2}{9} \\ \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

De to første likningene kan skrives om til

$$\begin{aligned} (\lambda + 16)x_1 + 8x_2 &= 32 \\ 9x_1 + 2(\lambda + 18)x_2 &= 54 \end{aligned}$$

og i dette tilfellet synes jeg det er kjappast å bare invertere matrisen og skrive

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2(\lambda + 16)(\lambda + 18) - 72} \begin{pmatrix} 2(\lambda + 18) & -8 \\ -9 & (\lambda + 16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 54 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda + 16)(\lambda + 18) - 36} \begin{pmatrix} 2(\lambda + 18) & -8 \\ -9 & (\lambda + 16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setter vi denne inn i ellipselikningen, får vi en fjerdegradslikning som er uhåndterlig med penn og papir, men triviell å løse med en numerisk likningsløser.

10 Gradienten til fjellet er

$$h'(x) = (-2x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2)$$

og setter vi

$$g(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1,$$

blir

$$g'(x) = (2x_1, x_2/2)$$

Lagrangelikningene blir

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= 2\lambda x_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= \lambda x_2/2 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 2(1 + \lambda)x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (4 + \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dersom matrisen er inverterbar, er $x = 0$ den eneste løsningen, og dette punktet ligger ikke på ellipsen, så da får vi nesten kreve at determinanten

$$p(\lambda) = 2(1 + \lambda)(4 + \lambda) - 2 = 2\lambda^2 + 10\lambda + 6$$

blir null, noe som skjer når

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Likningen $2(1 + \lambda)x_1 + x_2 = 0$ gir i såfall at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2(1 + \lambda) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \pm \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter inn disse punktene i ellipselikningen, får vi

$$s^2 \left(1 + \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{13})^2 \right) = 1,$$

slik at

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{13})^2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{4 + (3 \pm \sqrt{13})^2}}.$$

Alt i alt har vi nå de fire punktene

$$\pm \frac{2}{\sqrt{4 + (3 \pm \sqrt{13})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \pm \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Nå er det bare å putte disse inn i h og sjekke hvilken som gir størst verdi.

11 Vi setter

$$g(x) = 6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2,$$

og beregner

$$f'(x) = (1, 2)$$

og

$$g'(x) = (12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2), 12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)).$$

slik at lagrangelikningene blir

$$12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2) = \lambda$$

$$12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = 2\lambda$$

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3$$

nå er det kanskje ryddigst å sette $u = x_1 + x_2$, $v = x_1 - x_2$, slik at likningssystemet blir

$$12u + 4v = \lambda$$

$$12u - 4v = 2\lambda$$

$$6u^2 + 2v^2 = 3$$

Gausseliminasjon av de to første likningene gir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og setter vi denne i ellipselikningen, får vi

$$\lambda^2 \left(\frac{6}{64} + \frac{2}{64} \right) = 3$$

som gir

$$\lambda = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

Siden f er plan, gir en av disse maksimum, og den andre minimum; de faktiske x -koordinatene finner vi ved å løse likningssystemene

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og evaluere f for å finne hva som er maksimum og hva som er minimum.

12 Vi setter lengdene i X og vekten i y . Dersom han har målt de samme kolbene to ganger i samme rekkefølge men med forskjellig enhet, kommer disse kolonnene til å være tilnærmet parallelle, og følgelig får ikke X full rang. Dersom to av kolonnene i X er parallelle, er også to av kolonnene i $X^T X$ parallelle, og da vil python klage på at $X^T X$ ikke er inverterbar når han løser normallikningene $X^T X \beta = X^T y$.

14 La $g(\beta) = |\beta|^2$. Gradienten til

$$f(\beta) = (y - X\beta)^T (y - X\beta) = y^T y - 2y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta$$

er fortsatt

$$\nabla f(\beta) = -2X^T y + 2X^T X\beta = 0$$

men nå skal den settes parallell med

$$\nabla g(\beta) = 2\beta.$$

Vi får

$$-X^T y + X^T X \beta = \lambda \beta.$$

som gir

$$(X^T X - \lambda I) \beta = X^T y$$

eller

$$\beta = (X^T X - \lambda I)^{-1} X^T y.$$

15 Denne ble litt for komplisert for penn og papir. Det er visst komplisert i virkeligheten også, se her: https://en.wikipedia.org/wiki/Ridge_regression

16 Singulærverdiene til enhetsmatrisen er alle lik 1, så dette er trivielt.

17 Aksiomene er

- $\|x\| > 0$ dersom $x \neq 0$
- $\|ax\| = |a|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

I TMA4106 sjekket vi at (x, x) er et indreprodukt, så det første er greit. Aksiom to følger av lineariteten til indreproduktet, mens aksiom tre er trekantulikheten, også bevist i TMA4106. Vi må skissere algebraiske kurver på formen

$$x^p + y^p = 1$$

Dersom $p = 1$ får vi fire likninger på formen

$$\pm x + \pm y = 1$$

alt etter i hvilken kvadrant vi er i, så vi får en klassisk diamant. Når $p \rightarrow \infty$, får du ∞ -normen

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$$

for når p blir stor, er

$$\sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p} \approx \sqrt[p]{|x_l|^p} = |x_l|$$

der x_l er det største elementet. For $p = \infty$ får vi likningen

$$\max(|x|, |y|) = 1$$

som rett og slett blir enhetskvadratet. For $p = 2$ får vi den vanlige enhetssirkelen, og for andre p får vi forskjellige mellomting mellom $p = 1$ og $p = \infty$, se figur her:

<https://math.stackexchange.com/questions/1746413/p-norm-with-p-to-infinity>
eller her:

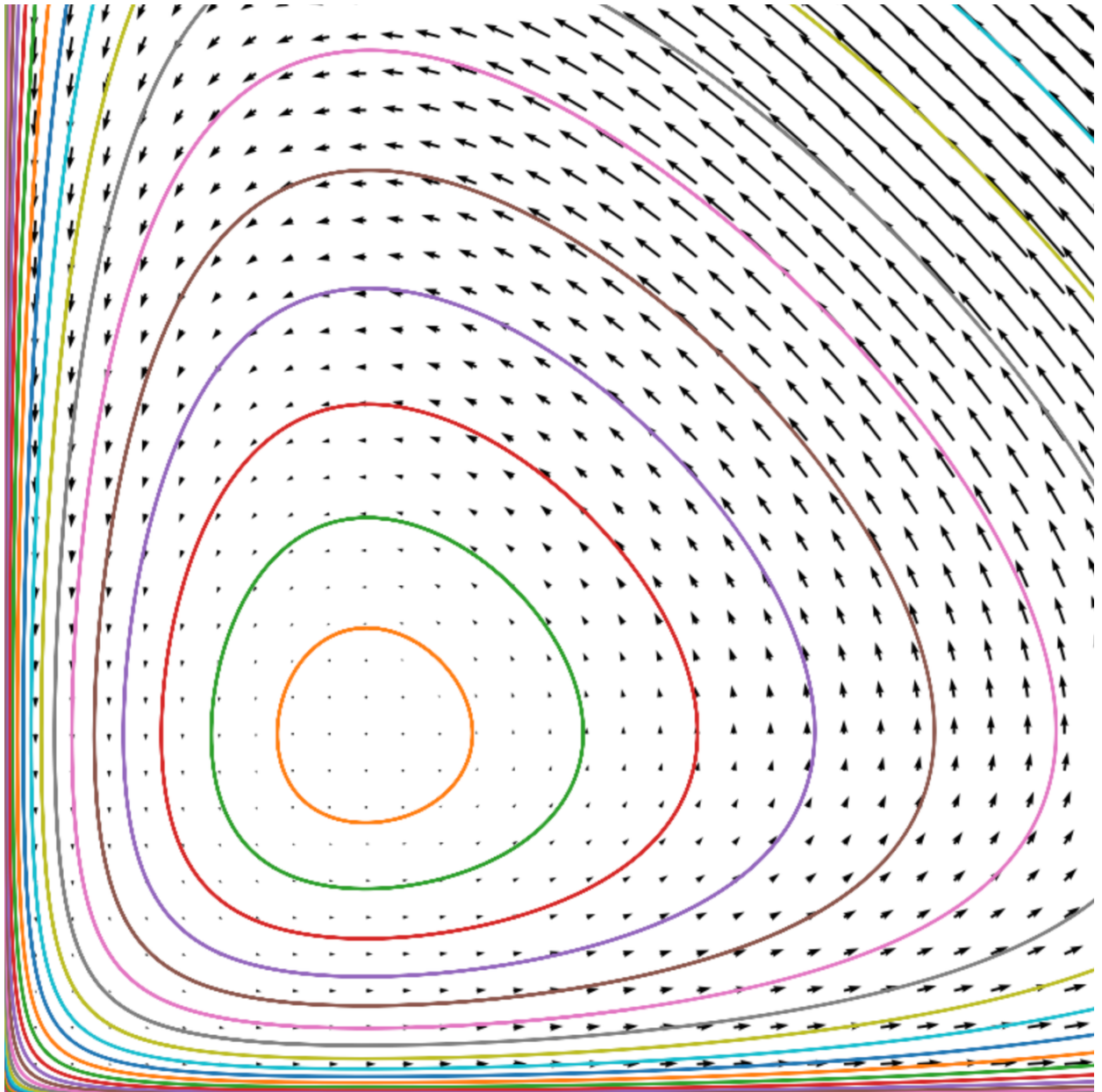
[https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_\(mathematics\)#Properties](https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_(mathematics)#Properties)

- 18 Hvis du inverterer svd-dekomposisjonen til A , vil du se at du snur singulærverdiene på hodet når du inverterer A .
- 19 Dersom $\partial\Omega$ har et knekkpunkt, vil ekstremalpunktene på $\partial\Omega$ kunne havne her, se for eksempel konten i 24. En sirkel i en-normen har knekkpunkter på koordinataksene, så da settes noen av komponentene i β lik null når man finner ekstremalverdiene.
- 20-22 Dette kommer ikke på eksamen.

3 - 4 - OM VÆR OG VIND OG KRAFT - LF

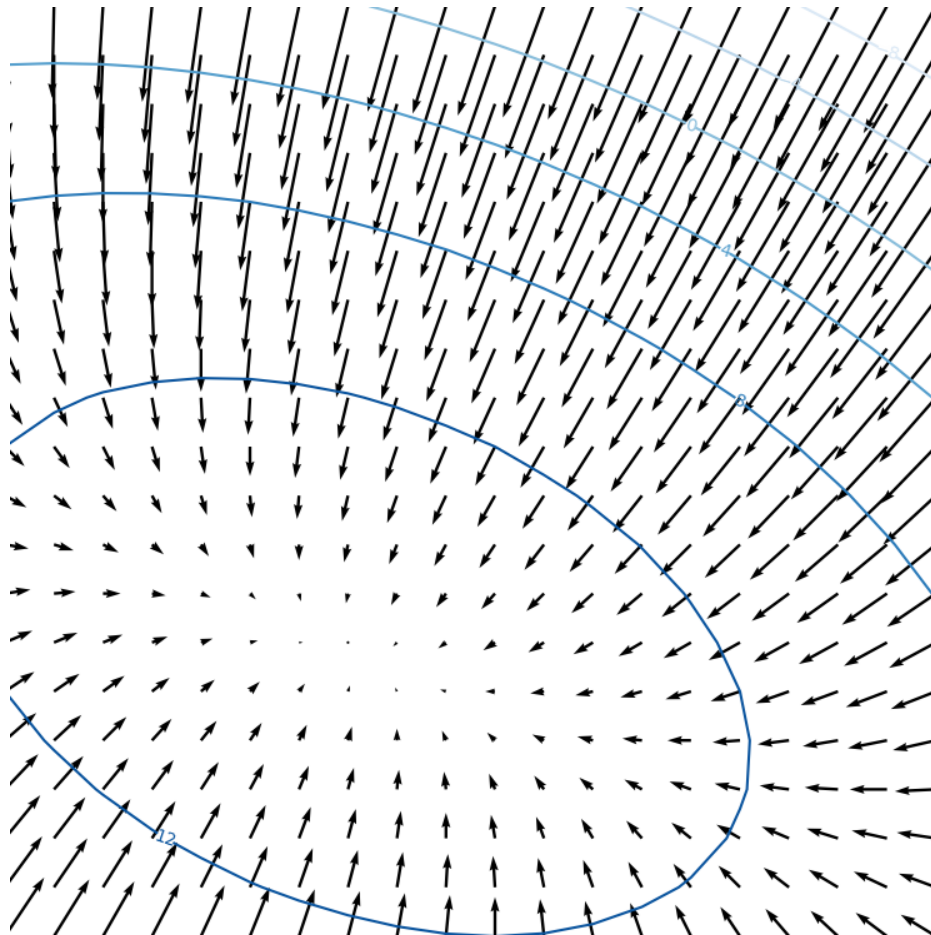
0 Øst-sørøstlig svak vind.

1 Her er noen numeriske løsninger plotta oppå vektorfeltet - merk hvordan løsningstrajektoriene er parallelle med vektorfeltpilene:



2 Dette er oppgave 2 på eksamen i TMA4106 våren 2025:
<https://mortano.folk.ntnu.no/eksamen/>

- 3 Se side 124 her: <https://mortano.folk.ntnu.no/notater/sivingmatte.pdf>
- 4 Her er konturplot og gradientfeltplot av fjellet på første side i forrige økt. Merk hvordan gradientpilene står normalt på nivåkurvene.



- 5 De blandete partiellderiverte til et skalarfelt er like unntatt i patologiske unntak, så du kan sjekke om

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Dersom dette er tilfelle er det bare å sette i gang og lete etter potensialfunksjon.

- 6 Det er to tidevannsbølger på jorden - én fra solen og én fra månen. Den fra månen dominerer, men når månen, jorden og solen står på en rett linje (sann ca ved fullmåne og ingen måne), kommer topp og bunn samtidig og så blir det lavere fjære og høy flo. Hvis du da har litt for kort fortøyning og ikke noe dragtau til land, kan båten stikke av. Det gjorde vår båt en gang. Den tok med seg hele fortøyningen og seilte av gårde! Selv en liten båt kan løfte en fortøyning på flere hundre kilo av sjøbunnen.
- 7 Hvis vi setter massene m_1 i origo, m_3 i $r = 1$ og m_2 i punktet a der $0 < a < 1$, kan vi finne punktet der gravitasjonskreftene balanserer hverandre ved å sette opp gravitasjonskreftene på

m_2 fra m_1 og m_3 lik hverandre:

$$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = \frac{Gm_2m_3}{(1-a)^2}$$

Ganger vi opp med $a^2(1-a)^2$ og løser for a , får vi

$$a = \frac{m_1 \pm \sqrt{m_1m_3}}{m_1 - m_3}$$

der den ene løsningen gir et punkt mellom origo og $r = 1$ der kreftene balanserer hverandre. Den andre gir et punkt bortenfor $r = 1$ der kreftene er like store men rettet samme vei.

8 Vi husker at

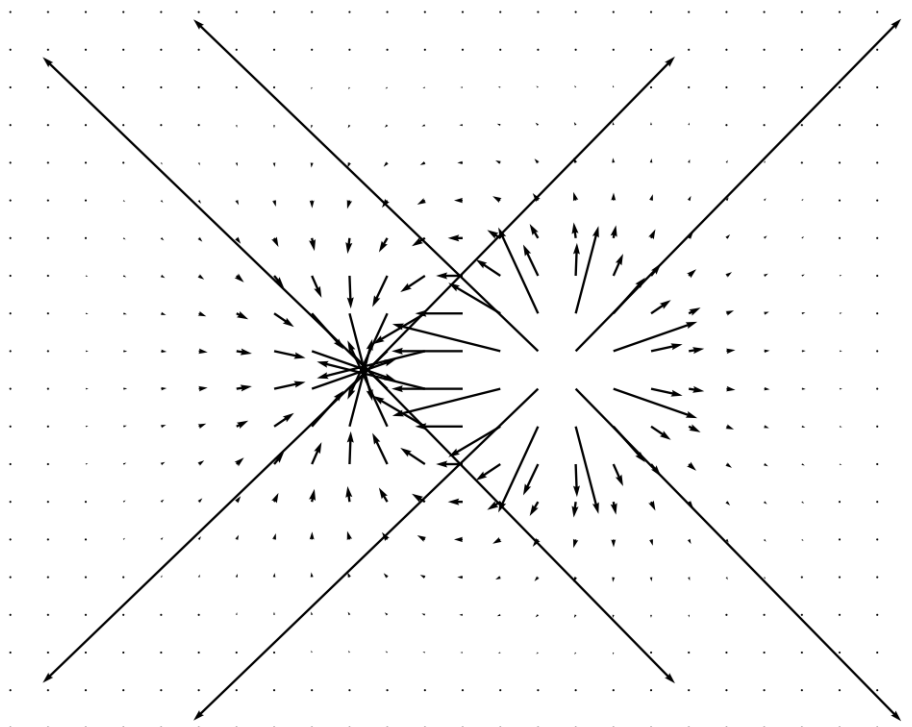
$$u'(x) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x^T}{|x|^3}$$

så vi har altså at

$$\nabla u(x) = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{x}{|x|^3}$$

$$F(x) = -Gm_1m_2u'(x)^T.$$

9 Det er ikke så lett å lage et pent plot av dette med vektorpiler, for det elektriske feltet helt innerst mot ladningen blir helt ekstremt sterkt. Så her er et plot som ser veldig stygt ut og tar litt tid å bli vant med, men det lyver ikke. Ikke noe lagrange punkt her nei.



10 - 1

$$f'(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5} \\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{|x|^5} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|x|^3} I - \frac{3}{|x|^5} xx^T \right)$$

10 - 2 Denne blir null. Dette er det samme som å si at spenningen til en punktladning i ro er en harmonisk funksjon - se oppgave 11 i økt 3-2.

11 Et stringent bevis er litt for hardt for TMA4111, men den korte forklaringen er at en similaritetstransformasjon

$$A = VBV^{-1}$$

ikke endrer hverken spor eller egenverdier, og da ser vi av jordandekomposisjonen

$$V^{-1}AV = J$$

at sporet til A må være det samme som summen av egenverdiene, siden begge disse er summen av diagonalelementene i J .

12 Dette er på en måte litt trivielt, likningen

$$\dot{q} = p$$

sier bare det samme som definisjonen av p og q , mens $l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$ gir

$$\dot{p} = -\frac{g}{l} \sin q$$

når du bytter ut θ med q og $\dot{\theta}$ med p .

13 Jacobimatrisen til

$$L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{g}{l} \cos q$$

er

$$L'(p, q) = (p, -\frac{g}{l} \sin q)$$

som er den transponerte til høyresiden i pendelsystemet.

14 Lagrangefunksjonen

$$L(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2$$

har en gradient som er den transponerte til høyresiden i klossesystemet

$$\dot{q} = p$$

$$\dot{p} = -q$$

- 15 Dette blir hamiltonfunksjonen

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{g}{l} \cos q.$$

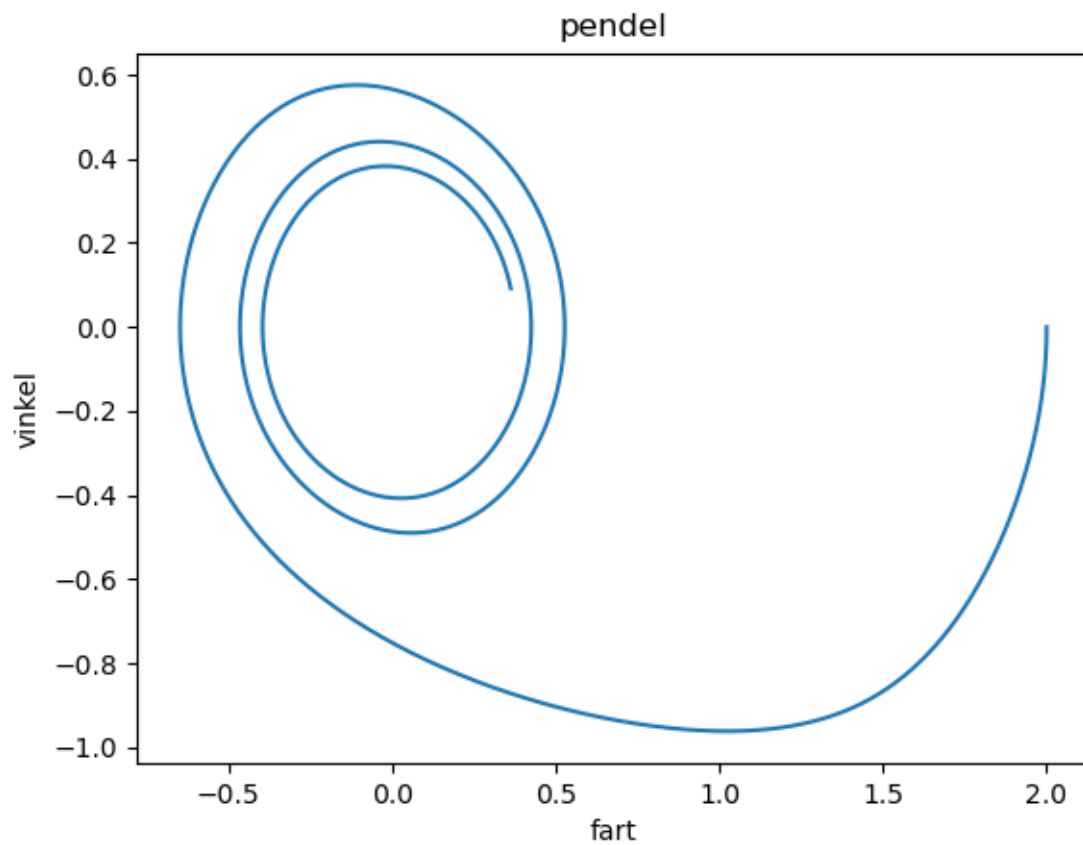
- 16 Dersom vi deriverer $H(q(t), p(t))$ med kjerneregelen, får vi

$$\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = 0$$

siden vi antar

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

- 17 Dersom du har luftmotstand eller friksjon eller sånt, kan ikke vektorfeltet være konservativt. Dette skal vi se i neste uke.



3 - 5 - LINJEINTEGRALER I - LF

- 1 Dette gjør jeg ganske nøye i forelesning.
- 2 Det enkleste er å kreve at kurven er glatt, og den enkleste måten å få dette til på er å kreve at komponentene er deriverbare og at $\dot{x}(t) \neq 0$ for alle t i definisjonsmengden. Da vet du at kurven aldri stopper opp og at den aldri snur og kjører bakover.
- 3 Brugdens trajektorie Γ er parametrisert ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

der $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$. Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, ds &= \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x(t)) |\dot{x}(t)| \, dt \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (1 + \cos t \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{2\pi} 2 + \sin(2t) \, dt = \frac{1}{2} (3\pi - 1). \end{aligned}$$

Brugden spiser altså $\frac{1}{2} (3\pi - 1)$ plankton på sin tur fra x_2 -aksen til x_1 -aksen. Ordet "plankton" er avledet fra det greske ordet for "å drive", så plankton er en fellesbetegnelse for levende ting i havet som ikke kan svømme horisontalt. Noen typer plankton kan svømme vertikalt, og det er mye som er plankton som man ikke tenker på som plankton.¹

- 4 Vi må først parametrisere den rette linjen. Dette kan gjøres på mange måter, men for eksempel $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Linjeintegralet blir

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_0^1 (1 + (1-t)t) \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

- 5 Vi kan prøve $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Plankton>

Denne kurven reiser også fra $(1,0)^T$ til $(0,1)^T$, men med varierende fart (først sakte og så fortere). Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^1 (1 + (1-t^2)t^2) \sqrt{(-2t)^2 + (2t)^2} \, dt \\ &= \int_0^1 (1 + t^2 - t^4) |2\sqrt{2}t| \, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

6 Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f \, ds &= \int_0^{4\pi} -(-t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{4\pi} t \, dt = 8\pi^2 \sqrt{2}.\end{aligned}$$

7 Tre meter ganger ti newton blir tretti newtonmeter eller joule som vi sier. Massen til tingen er uvesentlig.

8 Så da blir det tre meter ganger ti newton ganger cosinus til førtifem som er en på roten av to.

9 Tyngdekraften er

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

og fluens trajektorie kan parametriseres ved $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

dersom vi legger startpunktet i origo og punktet på pulten i $(3, 0, 1)^T$. Arbeidet blir

$$W = \int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_0^1 (0, 0, -mg) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -mg \cdot (1 - 0)$$

eller $-mgh$ som vi ville sagt på skolen. Arbeidet er negativt fordi fluens må jobbe mot tyngden.

10 Parametriseringen er $x : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$W = \int_{\Gamma} F \cdot ds = \int_0^{4\pi} (t, 0, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = - \int_0^{4\pi} t \sin t \, dt = 4\pi.$$

Her får altså steinbiten litt hjelp av vannstrømmen.

- 11 Dersom vi tidsderiverer $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$, og bruker Newtons andre lov, får vi

$$\dot{E}(t) = m\ddot{x}^T \dot{x} = F^T \dot{x},$$

og integrerer vi igjen, får vi

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t) dt.$$

så arbeidet som gjøres av netto kraft er lik endring i kinetisk energi. Fysikerne kaller dette **arbeidsenergieoremet** eller noe i den dur.² Den kinetiske energien i 7 skal være lik arbeidet utført, så da blir det roten av to ganger tretti joule delt på fem kilo, så omtrent 3,5 meter per sekund tenker jeg. Ditto på 8. Kraften oppover bidrar bare til å avlaste gulvet litt, mens arbeidet i bevegelsesretning gir kinetisk energi.

Det som er lurt å vite om arbeid, er at noen ganger slipper du faktisk å beregne integralet. Det er derfor jeg plaget deg med gradientfelter i forrige økt. Grunnen til at et vektorfelt sies å være konservativt dersom det er gradienten til et skalarfelt, er at det korresponderer til fysikernes ide om konservativt kraftfelt. Dersom netto kraft er gitt ved $F(x) = -V'(x)^T$, gir kjerneregelen en enkel formel for arbeidet.

- 12 Dersom netto kraft er $F(x) = -V'(x)^T$, blir

$$\begin{aligned} E(b) - E(a) &= \int_{\Gamma} F \cdot ds \\ &= \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t) dt \\ &= - \int_a^b V'(x(t)) \dot{x}(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t)) dt = V(x(a)) - V(x(b)) \end{aligned}$$

slik at

$$E(b) + V(x(b)) = E(a) + V(x(a)).$$

Fysikere bruker T istedet for E for kinetisk energi, men vi bruker allerede T for enhetstangentvektor, temperatur, matrisetransponering og periode, så kvota begynner å bli litt full.

- 13 Her er det bare å evaluere tyngdepotensialet i de to punktene og ta differansen. En av tingene som dissiperer energi i solsystemet er faktisk tidevannsbølgene tyngdekraften lager på legemer. Det er dette som er grunnen til at månen alltid vender den samme siden inn mot jorden,³ og grunnen til at Io har massevis av vulkaner.⁴

- 14 Det blir vel

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

Siden det elektriske feltet har benevnning kraft per ladning, må vel potensialet ha benevnning kraft ganger meter per ladning eller joule per coulomb eller spenning som vi sier på godt norsk. Coulombkraften er kraften som holder alt sammen, inkludert stolen du sitter på, så ikke kjødd med den.

²"The work-energy theorem" på engelsk.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_locking

⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Io_\(moon\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Io_(moon))

3 - 6 - DOBBELTINTEGRALER - LF

- 1 Volumet av en dreining av sinuskurven mellom to nullpunkter er

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 1 - \cos(2x) \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

- 2 Vi dreier enhetssirkelfunksjonen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ og får

$$2\pi \int_0^1 1 - x^2 \, dx = 2\pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4\pi}{3}.$$

- 3 For et vakkert volum:

$$\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \pi$$

- 4 Den krumme delen av randen er en kvart ellipse med likning

$$\frac{x_1^2}{4^2} + \frac{x_2^2}{3^2} = 1$$

og løser vi denne for x_2 og tar det positive rotutdraget, får vi

$$x_2 = \sqrt{3^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4^2}\right)} = \frac{3}{4} \sqrt{(16 - x_1^2)}.$$

Takhøyden er $f(x) = x_1 x_2$, så kapper vi grillhytten i to parallelt med x_2 -aksen, er arealet av tverrsnittet gitt ved

$$A(x_1) = \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} x_1 x_2 \, dx_2.$$

- 5 Volumet blir

$$\begin{aligned} \int_0^4 A(x_1) \, dx_1 &= \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} dx_1 \\ &= \frac{9}{32} \int_0^4 x_1 (16 - x_1^2) \, dx_1 = 18 \end{aligned}$$

- 6 Hvis du integrerer takhøyden $x_1 x_2$ fra $x_1 = 0$ til $x_1 = 1$, får du tverrsnittet

$$A(x_2) = \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1$$

så motorsaga gikk horisontalt denne gangen. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x_2 \, dx_2 = 1.\end{aligned}$$

- 7] Hvis du integrerer takhøyden $x_1 x_2$ fra $x_2 = 0$ til $x_2 = 2$, får du tverrsnittet

$$A(x_1) = \int_0^2 x_1 x_2 \, dx_2$$

så motorsaga går vertikalt. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 x_2^2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1 \\ &= 2 \int_0^1 x_1 \, dx_1 = 1.\end{aligned}$$

- 8] La oss først la saga gå vertikalt. Hypotenusen i trekanten er gitt ved $x_2 = 2x_1$, så arealet av tverrsnittet blir

$$A(x_1) = \int_0^{2x_1} x_1 x_2 \, dx_2,$$

og volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_0^{2x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 x_2^2 \Big|_0^{2x_1} dx_1 \\ &= 2 \int_0^1 x_1^3 \, dx_1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lar vi saga gå andre veien, får vi tverrsnittsfunksjonen

$$A(x_2) = \int_{x_2/2}^1 x_1 x_2 \, dx_1,$$

slik at volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^2 \int_{x_2/2}^1 x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1=x_2/2}^{x_1=1} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4} x_2^2\right) x_2 \, dx_2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Her er en oppgave fra konten 2024:

9 Vi beregner

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^3 \int_0^{4x_1/3} x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \, dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^3 x_1^2 (4x_1/3) + \frac{1}{3} (4x_1/3)^3 + \frac{1}{2} x_1 (4x_1/3)^2 - 3x_1 (4x_1/3) - \frac{3}{2} (4x_1/3)^2 + 3 (4x_1/3) \, dx_1 \\ &= \int_0^3 \frac{4}{3} x_1^3 + \frac{64}{81} x_1^3 + \frac{8}{9} x_1^3 - 4x_1^2 - \frac{8}{3} x_1^2 + 4x_1 \, dx_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^4 + \frac{16}{81} \cdot 3^4 + \frac{2}{9} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{8}{9} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 \\ &= 27 + 16 + 18 - 36 - 24 + 18 = 19\end{aligned}$$

10 Her er det enklest å la saga gå horisontalt først. Den ene skrå delen av randen har likning $x_2 = x_1$, og den andre har likning $x_2 = 2 - x_1$, så integralet blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_{x_2}^{2-x_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1=x_2}^{x_1=2-x_2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left((2-x_2)^2 - x_2^2\right) x_2 \, dx_2 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Går vi motsatt vei må vi dele opp integralet, så det blir litt mer herk:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_0^{2-x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = \frac{1}{3}.$$

Husk alltid å tegne opp, ellers er det lett å tenke feil.

11 Dette integralet går fint å sette opp i én smell, men da må vi ha noen triks vi skal lære kommende uke. I påvente av det, må vi nesten sette det opp i to deler enten slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^0 \int_{-x_1-1}^{x_1+1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_0^1 \int_{x_1-1}^{1-x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = 0$$

eller slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^0 \int_{-x_2-1}^{x_2+1} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_{x_2-1}^{1-x_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = 0$$

At integralene blir null, får vi fra symmetrien til Ω og $f(x) = x_1 x_2$.

- 12 Parabelen er surefjes og skjærer x_1 -aksen i $x_1 = \pm 1$, så volumet blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x_1^2} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = 0$$

Også her blir integralet null på grunn av symmetrien til Ω og $f(x) = x_1 x_2$. Integralet kan også settes opp slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x_2}}^{\sqrt{1-x_2}} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = 0$$

- 13 Kurven $x_2 = 1 - x_1^3$ skjærer x_1 -aksen i $x_1 = 1$, og x_2 -aksen i $x_2 = 1$, så volumet blir

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1^3} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 (1 - x_1^3)^2 \, dx_1 = \frac{9}{80} \end{aligned}$$

eller

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{1-x_2}} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \frac{9}{80}.$$

- 14 Her er integranden en kjegle med høyde a (slik som du har på fotballbanen, formet som en pyramidal ting med sirkulært tverrsnitt), og den skjærer $x_1 x_2$ -planet i en sirkel med radius a , så volumet blir en tredjedel av grunnflate ganger høyde, altså $\pi a^3/3$.

- 15 Dette er bare en halv kule med radius a , så volumet blir $\frac{2\pi}{3}a^3$.

- 16 En sylinder med høyde a og grunnflate πa^2 , så volumet blir πa^3 .

- 17 Hårete greier:

$$\iint_{\Omega} f \, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{16-x_1^2}} -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \, dx_2 dx_1$$

så denne tar vi med et triks vi skal lære kommende uke.

- 18 Siden $|x_1 x_2| \leq 1$ på enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dx}{1 - x_1 x_2} &= \iint_{\Omega} \sum_{k=0}^{\infty} (x_1 x_2)^k \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_{\Omega} (x_1 x_2)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

At det i dette tilfellet går greit å bytte om rekkefølgen på sum og integral har vi ikke lært, men pytt sann. Vi er da ingeniører.

3 - 7 - KOORDINATAVBILDNINGER I - LF

1 Arealet blir πab . Jeg kommer ikke til å be deg om å beregne envariable integraler på eksamen.

2-1-4 Så lenge matrisen har full rang blir bildet av enhetskvadratet alltid et parallellogram med sidekanter lik kolonnene i matrisen.

2-5 Her er kolonnene lineært avhengige, så alle punktene på enhetskvadratet legger seg på den rette linjen fra origo til $(2, 2)^T$.

2-6 Dette blir enhetskvadratet dreid vinkelen α mot klokken, om en rotasjonsakse som sitter i origo.

2-7 Vi har

$$\begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & 2 \cos \alpha \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

så denne dreier enhetskvadratet og strekker det med en faktor 2 i alle retninger.

2-8 Her ser vi at

$$\begin{pmatrix} 2 \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så denne strekker med en faktor 2 i x_1 -retningen og dreier så vinkelen α mot klokken.

3 Her er det bare å ta determinanten av matrisene.

4 Så Ω er et parallellogram, og vi kunne i og for seg delt integralet i tre slik:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_{x_1/2}^{2x_1} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_{x_1/2}^{x_1/2+3/2} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 + \int_2^3 \int_{2x_1-3}^{x_1/2+3/2} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1,$$

men dette er jo litt knotete. Vi kan heller observere at koordinattransformasjonen fra oppgave 2-1 tar enhetskvadratet til Ω , så om vi trækker funksjonsverdiene inn på enhetskvadratet med transformasjonen Ax og tar volumet under dem må vi gange med 3 for å kompensere:

$$\iint_{\Omega} f = 3 \int_0^1 \int_0^1 (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) \, dx_2 dx_1$$

5 Samme greia her, men rotasjonsmatrisen strekker ikke areal, så det er nok å bare evaluere den ideelle gasslov i de roterte koordinatene:

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^1 (x_1 \cos(\pi/6) - x_2 \sin(\pi/6))(x_1 \sin(\pi/6) + x_2 \cos(\pi/6)) \, dx_2 dx_1$$

6 Diamanten er bildet av enhetskvadratet under den **affine avbildningen**

$$y = \sqrt{2}R(\pi/4) (x - (1, 1)^T/2)$$

der $R(\pi/4)$ er matrisen som roterer $\pi/4$ mot klokken (en affin avbildning er en lineæravbildning pluss en konstant). Eventuelt kunne vi kjørt enhetskvadratet flytta litt ned, og justert med integralgrensene slik:

$$\iint_{\Omega} f = 4 \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (x_1 \cos(\pi/4) - x_2 \sin(\pi/4))(x_1 \sin(\pi/4) + x_2 \cos(\pi/4)) dx_2 dx_1$$

7 Lureoppgave. Vi har tidlig i semesteret funnet at $g'(x) = A$ så jacobideterminanten til g er determinanten til A .

8 Vi beregner

$$g'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

og determinanten blir følgelig

$$\det g'(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

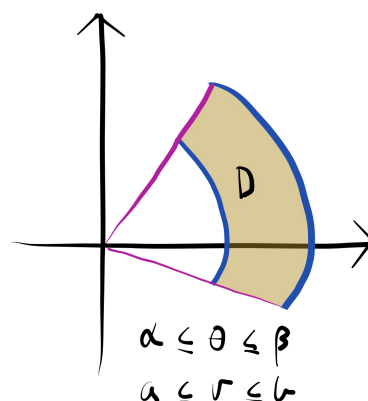
Siden rektangelet $[0, 1] \times [0, \pi/2]$ går til enhetssirkelskivens bit i første kvadrant, blir volumet

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta.$$

9 Dette blir likt som forrige oppgave, men med litt andre integrasjonsgrenser.

$$\iint_{\Omega} f = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = 0.$$

Her er en generisk figur:



10 Siden massetettheten ρ er konstant, får vi

$$m = \rho \iint_{\Omega} 1 = \rho \cdot |A|$$

der A er matrisen i lineæravbildningen. Så må vi integrere funksjonene x_1 og x_2 . For eksempel er massesenteret til den tingen i 2-1 gitt ved

$$\frac{1}{m} \iint_{\Omega} x f(x) dx = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} x_1 f(x) dx \\ \iint_{\Omega} x_2 f(x) dx \end{pmatrix} = \frac{1}{3\rho} \begin{pmatrix} 3\rho \int_0^1 \int_0^1 2x_1 + x_2 dx_2 dx_1 \\ 3\rho \int_0^1 \int_0^1 x_1 + 2x_2 dx_2 dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

- 11 La oss si at kakestykket Ω ligger med spissen i origo og går vinkelen α ut på hver side av x_1 -aksen, har radius a og massetetthet ρ . Massen er $m = \rho\alpha a^2$, og massesenteret blir

$$\frac{1}{m} \iint_{\Omega} x f(x) dx = \frac{1}{\rho\alpha a^2} \begin{pmatrix} \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \cos \theta dr d\theta \\ \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta \end{pmatrix} = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 12 Vi setter

$$u(x) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = v(r, \theta)$$

La oss først derivere litt. Med hensyn på r får vi

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} \sin \theta$$

og

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} \sin \theta \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} \sin \theta \right) \sin \theta \end{aligned}$$

Så deriverer vi med hensyn på θ , og får

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x_1} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r \cos \theta$$

og

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r \cos \theta \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \theta} r \sin \theta + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x_1} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x_2} r \sin \theta \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r \cos \theta \right) r \sin \theta \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r \cos \theta \right) r \cos \theta \\
 &\quad - \frac{\partial u}{\partial x_1} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial x_2} r \sin \theta
 \end{aligned}$$

Hvis du nå tar noen av disse og deler litt på noen r -er og setter dem sammen og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

13 En klassiker! Siden

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx_2 dx_1 \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi,
 \end{aligned}$$

må

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

14 Denne her

$$x = g(r, \theta) = \begin{pmatrix} ar \cos \theta \\ br \sin \theta \end{pmatrix}$$

tar rektangelet $[0, 1] \times [0, \pi/2]$ til den kvarte ellipseskiven. Jacobideterminanten blir abr , og volumet av grillhytten blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (-16r^2 \cos^2 \theta - 12r^2 \cos \theta \sin \theta - 18r^2 \sin^2 \theta + 16r \cos \theta + 18r \sin \theta + 8) 12r dr d\theta.$$

15 Du går en skitur på en øy gitt ved

$$h(x) = 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$$

der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum. Koordinattransformasjonen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

er en rotasjon på $\pi/4$. Setter vi dette inn for x i funksjonen, får vi

$$\begin{aligned} f(x(y)) &= 1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 \end{aligned}$$

og setter vi denne lik en konstant, får vi

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1 - C,$$

som er ellipser. På havnivået er $C = 0$, slik at vi får ellipsen med likning

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1.$$

slik at halvaksene er $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$. Lar vi Ω være området gitt ved

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 \leq 1$$

tar koordinattransformasjonen over oss fra rektangelet $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ til Ω , og volumet av øyen blir

$$\iint_{\Omega} f = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

16 Siden Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 2x_1^2, \quad x_1 = x_2^2 \quad \text{og} \quad x_1 = 2x_2^2.$$

får vi vel prøve oss på noen nye koordinater v_1 og v_2 slik at $v_1 = 1$ gir $x_2 = x_1^2$, $v_1 = 2$ gir $x_2 = 2x_1^2$, $v_2 = 1$ gir $x_1 = x_2^2$ og $v_2 = 2$ gir $x_1 = 2x_2^2$. Dette lukter av likningene

$$x_2 = v_1 x_1^2 \quad \text{og} \quad x_1 = v_2 x_2^2.$$

Setter vi den første inn i den andre, får vi

$$x_1 = v_2 v_1^2 x_1^4,$$

og setter vi den andre inn i den første, får vi

$$x_2 = v_1 v_2^2 x_2^4,$$

slik at alt i alt er

$$x = g(v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt[3]{v_1^2 v_2} \\ 1/\sqrt[3]{v_1 v_2^2} \end{pmatrix}$$

en koordinattransformasjon som tar kvadratet $[1, 2] \times [1, 2]$ til Ω . Så er det bare å brette opp ermene og beregne jacobideterminanten. Først beregner vi

$$g'_1(v) = \frac{-1}{3(v_1^2 v_2)^{4/3}} (2v_1 v_2, v_1^2) \quad \text{og} \quad g'_2(v) = \frac{-1}{3(v_1 v_2^2)^{4/3}} (v_2^2, 2v_1 v_2)$$

slik at jacobideterminanten blir

$$|g'(v)| = \frac{1}{3v_1^2 v_2^2}.$$

og integralet blir

$$\iint_{\Omega} f = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{3v_1^3 v_2^3} dv_2 dv_1 = \frac{3}{64}.$$

17 Ellipsen er dreid $\pi/4$ radianer rundt origo. Koordinattransformasjonen

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2)$$

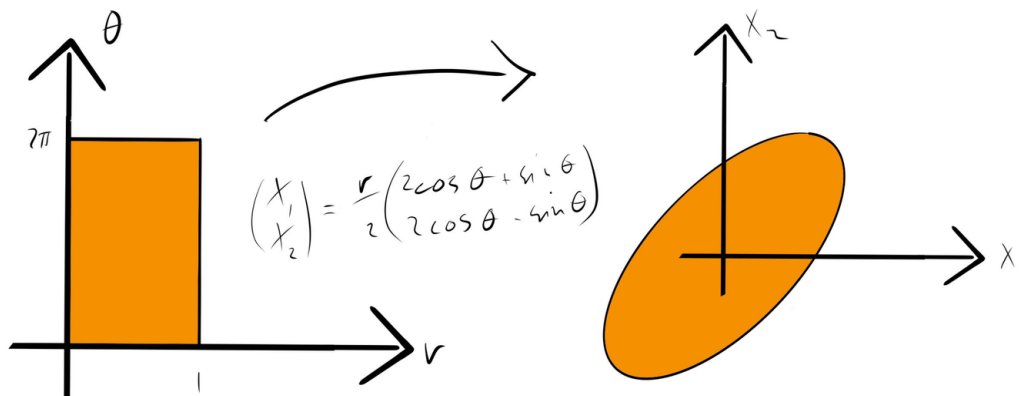
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1)$$

er en ren rotasjon og ellipselikningen blir

$$\frac{y_1^2}{2} + 2y_2^2 = 1$$

som forteller oss at halvaksene er $\sqrt{2}$ og $1/\sqrt{2}$. Videre ser du forhåpentligvis at en fornuftig koordinattransformasjon er

$$x(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}r \cos \theta \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta - \sin \theta \\ 2 \cos \theta + \sin \theta \end{pmatrix}.$$



Vi beregner jacobideterminanten:

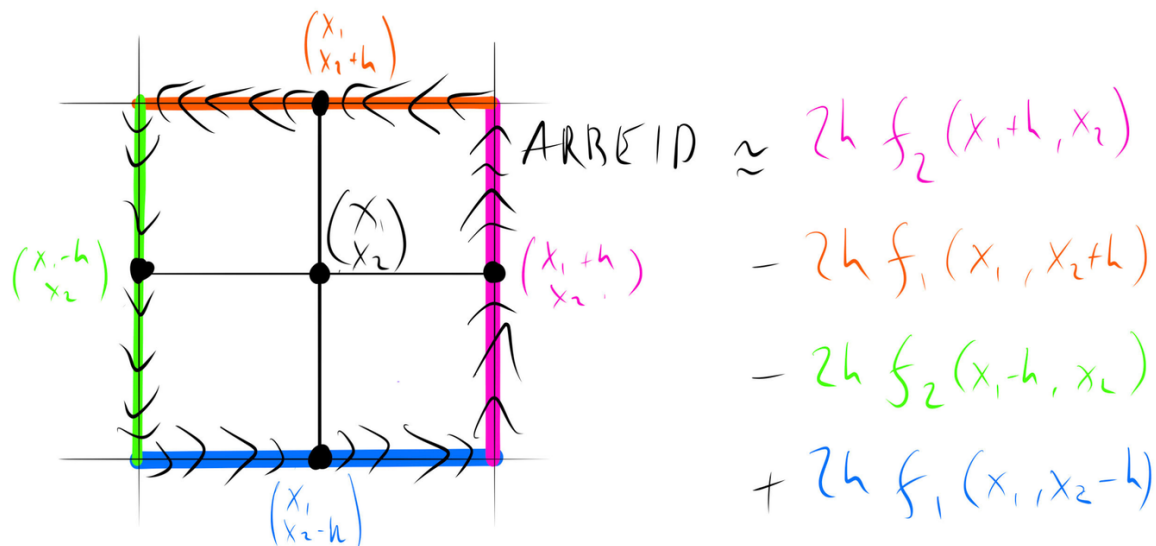
$$\frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r$$

og integrerer:

$$\begin{aligned} \iint_D f \, dx &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r}{2} (2 \cos \theta - \sin \theta) + 2 \left(\frac{r}{2} (2 \cos \theta + \sin \theta) \right) + 4 \right) r \, d\theta \, dr \\ &= 8\pi \int_0^1 r \, dr = 4\pi \end{aligned}$$

3 - 8 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM II - LF

1-2 Se forelesning 7. oktober. Her er figur:



3 Vi får vel begynne med å parametrisere sirkelen slik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

og beregne tangentvektoren:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

og beregne arbeidet:

$$W = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)(-\sin t) dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi$$

Beregner vi venstresiden i Greens teorem

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds$$

istedet, får vi dobbeltintegralet

$$- \iint_{\Omega} dx = -\pi$$

4 La

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Fra Greens teorem ser vi

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} 1 \, dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot ds = \int_a^b x_1(t) \dot{x}_2(t) \, dt.$$

Likeledes gir vektorfeltet

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

at

$$|\Omega| = - \int_a^b x_2(t) \dot{x}_1(t) \, dt.$$

Arealet omsluttet av astroiden blir

$$3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt.$$

Dette ser grise ut, men er faktisk veldig kjapt å ta med Eulers formel, siden

$$\int_0^{2\pi} e^{int} \, dt = 0$$

så lenge $n \neq 0$ er et heltall. Vi beregner først

$$\begin{aligned} \cos^4 t \sin^2 t &= -\frac{1}{64} (e^{it} + e^{-it})^4 (e^{it} - e^{-it})^2 \\ &= -\frac{1}{64} (e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) (e^{2it} - 2 + e^{-2it}) \end{aligned}$$

Alt unntatt konstantleddene i dette uttrykket kommer til å integrere til null, så må bare samle opp dem, og får følgende

$$3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt = -\frac{3}{64} \cdot (4 - 6 \cdot 2 + 4) \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

5] Jeg tror jeg holder fast ved at det enkleste er å sette opp matrisen

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$x \times y = Sy.$$

Da slipper jeg å tenke, for jeg vet at matrisen må være skjevsymmetrisk, og en fordel er at Rodrigues' rotasjonsformel blir enkel å skrive opp. Husk å puste med nesen - det er bra for blodtrykket: <https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11178300/>

6 Dersom

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

får vi

$$\nabla \times g = \frac{\partial g_2}{\partial r} - \frac{\partial g_1}{\partial \theta} = (1 + r) \sin \theta.$$

7 Dette blir nullvektoren - jacobimatrisen er symmetrisk, se oppgave 10-1 i økt 3-4 eller oppgave 10 i denne økten.

8 $\nabla \times f = (0, 1, 0)^T = e_2$.

9 $\nabla \times f = -(1, 1, 1)^T = -e_1 - e_2 - e_3$.

10 Dette blir nullvektoren, jf. oppgave 5 i økt 3-4.

11 $\nabla \times (Ax) = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})^T$, altså vektoren w med $S(w) = A - A^T$.

12 Dette blir nullvektoren av samme grunn som i oppgave 7 og 10 - jacobimatrisen er symmetrisk.

3 - 9 - ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM III - LF

1 Denne gjorde jeg ganske nøye i forelesning.

2 Enhetstangenten blir

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

og normalvektoren slik den er definert i 3-1 blir

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos t \sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}} \\ \frac{\cos^2 t \sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}} - \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} \frac{\cos t}{1 + \cos^2 t} \\ \frac{\cos^2 t}{1 + \cos^2 t} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{3/2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et plot av $x(t)$ er bare sinuskurven slik du tegna den på skolen og merk at $\dot{T}$ alltid peker den veien sinuskurven krummer innover.

3 Parametriseringen for en ellipse med halvakser a og b er

$$x(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

og denne bytter ikke vei på krumningen, så her er det trygt å derivere enhetstangenten. Enhetstangenten er

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

og den deriverte av denne er

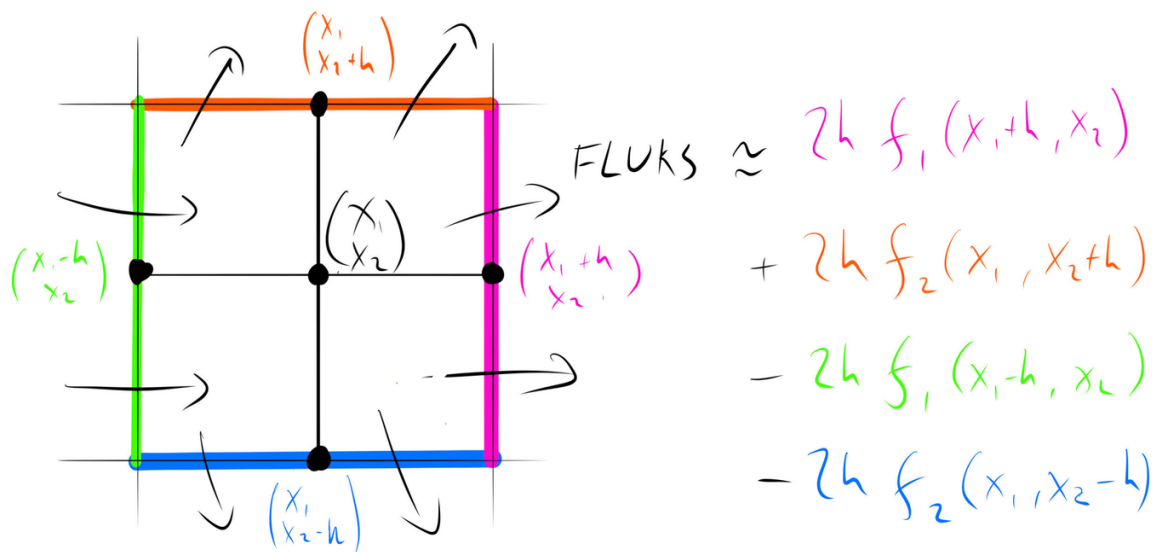
$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= - \frac{(a^2 - b^2) \cos t \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos t \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Denne krummer innover, så vi får utnormalvektor

$$-\dot{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos t \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \right)$$

som normaliseres for å få e_n .

- 4 Denne gjorde jeg ganske nøye i forelesning. Her er figur:



- 5 Her blir fluksen null. Venstresiden i

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \int_{\partial\Omega} f \cdot e_n ds$$

er jo null siden integranden er det. Vi dobbeltsjekker ved å regne ut fluksen. Parametriseringen for sirkelen er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

og enhetsutnormalvektoren er

$$e_n = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

slik at fluksen blir

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot e_n ds = \int_0^{2\pi} (1 + \sin t) \cos t dt = 0.$$

- 6 Dersom strømningsfeltet er konservativt, er det gradienten til et skalarfelt, og dersom skalarfeltet er harmonisk, er divergensen til flytfeltet null. Dette betyr at væsken er inkompressibel - dette kommer vi tilbake til i TMA4121. Det er også lett å sjekke at rotasjonen til en gradient er null, så litt forenklet kan vi si at gradienten til en harmonisk funksjon er en modell av inkompressibel og rotasjonsfri væskeflyt. Ikke en spesielt bra modell kanskje, men i gamle dager var det det de hadde.

- 7 Det er også lett å sjekke at rotasjonen til en gradient er null:

$$\nabla \times \nabla f = 0,$$

så litt forenklet kan vi si at gradienten til en harmonisk funksjon er en modell av inkompressibel og rotasjonsfri væskeflyt. Ikke en spesielt bra modell kanskje, men i gamle dager var det det de hadde. Dette kommer vi også tilbake til i TMA4121.

3 - 10 - LINJEINTEGRALER II - LF

1 Funksjonen

$$f(z) = z$$

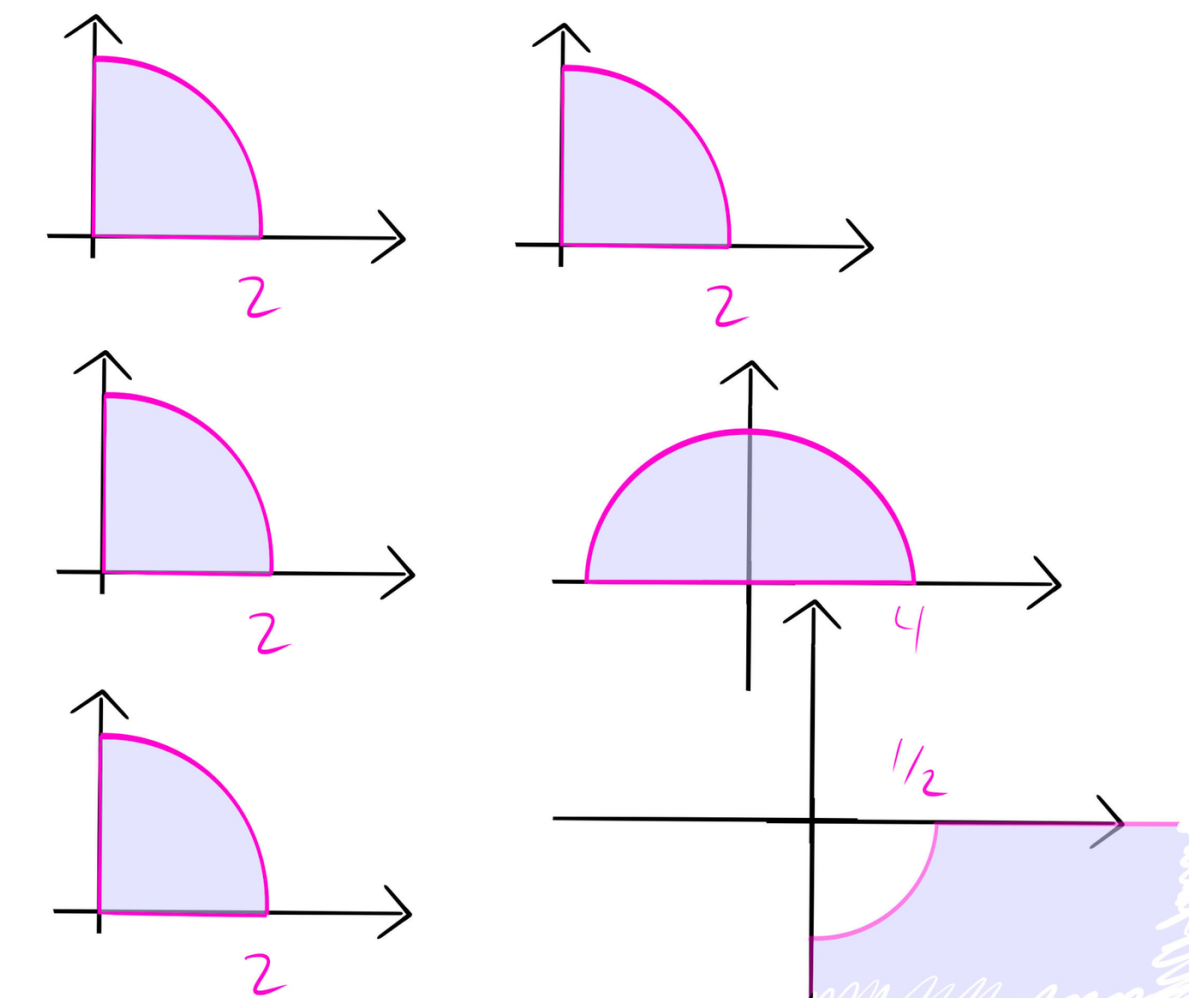
kalles enhetsavbildningen og gjør ingenting med z , så bildet av Ω blir bare Ω . På de to neste er det lurt å skrive $z = re^{i\theta}$. Vi får

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

og da ser vi at radien kvadreres og argumentet dobles. Med andre ord blir bildet av Ω en halv sirkel med radius 4. Så ser vi at

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

slik at $1/z$ sender Ω til alt utenfor en kvartsirkel med radius $1/2$ i fjerde kvadrant.



- 2 Her er det bare å vise at skalarproduktet av gradientene til u og v er null ved å bruke cauchyriemannlikningene. Jeg gjorde det i forelesning.

- 3 Vi beregner

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

slik at $u(x, y) = x^2 - y^2$ og $v(x, y) = 2xy$. Du finner plot av nivåkurvene til real- og imaginærdelen i samme koordinatsystem her:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_07.html

- 4 Vi husker fra TMA4106 at

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + yi) \\ &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\end{aligned}$$

Å tegne nivåkurvene til disse er nok litt i hardeste laget for eksamen.

- 5 Denne er lett å beregne:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Tror nok ikke jeg ber deg om å skissere disse heller på eksamen.

- 6 Denne er også lett å beregne:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Nivåkurvene til disse er ikke så ille, vi skriver

$$c = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

nei vent, la oss omdøpe konstanten C litt:

$$\frac{1}{c} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Da får vi

$$cx = x^2 + y^2$$

eller

$$\frac{c^2}{4} = (x - c/2)^2 + y^2$$

slik at vi får sirkler sentrert i $(c/2, 0)$ med radius $|c|/2$. Omtrent samme for v .

- 7 Hm:

$$x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Nivåkurvene til disse er litt verre, vi har ikke trent på å skissere algebraiske kurver av tredje grad i både x og y .

8 Funksjonen er

$$f(z) = \bar{z} = x - yi$$

så real- og imaginærdelene blir $u(x, y) = x$ og $v(x, y) = -y$. Dette paret tilfredsstiller ikke den første cauchyriemannlikningen, så da kan ikke f være deriverbar. Merk at u og v er harmoniske funksjoner, og nivåkurvene står ortogonalt på hverandre. Så en kompleks deriverbar funksjon lar seg ikke avspise med hvilket som helst par med harmoniske funksjoner med ortogonale nivåkurver.

9 $z(t) = 1 + i + 2e^{it}$.

10 En parametrisering for den kvarte sirkelen er $z(t) = e^{it}$ der $t \in [0, \pi/2]$, så integralet blir

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^{\pi/2} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{\pi/2} e^{3it} dt = \frac{1}{3} e^{3it} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} (e^{3\pi i/2} - 1) = \frac{1}{3} (-1 - i).$$

11 En parametrisering for den rette linjen er $z(t) = 1 - (1 - i)t$ der $t \in [0, 1]$, så integralet blir

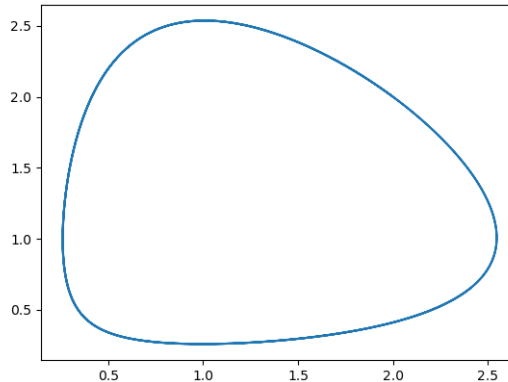
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^2 dz &= \int_0^1 (1 - (1 - i)t)^2 \cdot (-1 + i) dt \\ &= (-1 + i) \int_0^1 (1 - (1 - i)t)^2 dt \\ &= \frac{1}{3} (1 - (1 - i)t)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} (-i - 1) \end{aligned}$$

12 Da får vi null siden integralene er like.

- 13 Jeg tror jeg velger å integrere over lotkavolterrakurven, smelt opp i det komplekse planet. Det finnes som vi vet ingen pen parametrisering for denne, men vi får

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = 0.$$

Dette er på grunn av Cauchys teorem - f er nemlig kompleks deriverbar, og da er integralet over alle lukkede kurver null, akkurat som for linjeintegral over konservative vektorfelt.



- 14 Hvis du gjør som Cauchy og antar at u og v har kontinuerlige partiellderiverte (og at Γ er stykkevis glatt og alt det der) kan du faktisk vise dette fra Greens teorem. Trikset er å studere vektorfeltet $F = (u, -v)^T$. La Γ være en lukket kurve som omslutter området Ω . Vi beregner

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) + i(u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot T ds + i \int_{\Gamma} F \cdot N ds \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} dA + i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} dA = 0. \end{aligned}$$

Nå går det an å vise at dette er sant uten å gjøre alle de nødvendige antagelsene på u og v for å bruke Greens teorem, men dette er mye vanskeligere, og på Cauchys tid visste de ikke så mye om komplekse funksjoner. Om du synes komplekse funksjoner er artig, kan du sjekke ut bøkene til Ahlfors eller Stein.

- 15 En parametrisering for den kvarte sirkelen er $z(t) = e^{it}$ der $t \in [0, \pi/2]$, så integralet blir

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_0^{\pi/2} e^{-it} i e^{it} dt = \frac{\pi i}{2}$$

En parametrisering for den rette linjen er $z(t) = 1 - (1 - i)t$ der $t \in [0, 1]$, så integralet blir

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \bar{z} dz &= \int_0^1 (1 - (1 + i)t) \cdot (-1 + i) dt \\ &= (-1 + i) \int_0^1 (1 - (1 + i)t) dt \\ &= (-1 + i) \left(t - (1 + i) \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= (-1 + i) \frac{1 - i}{2} = i\end{aligned}$$

Merk at forskjellige integrasjonskurver gir forskjellig integral. Dette er analogt til å integrere et ikkekonservativt vektorfelt langs to forskjellige kurver. Lotkavolterrakurven går dessverre ikke å integrere over med penn og papir, for det finnes ikke eksplisitt uttrykk for den og ikke er f deriverbar heller.

- 16 Vi må seff ha parametrisering for enhetssirkelen i det komplekse planet:

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \quad z'(\theta) = ie^{i\theta}.$$

Så er det bare å integrere:

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

- 17 https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number

- 18 Vi må seff ha parametrisering for den gitte sirkel

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \quad z'(\theta) = ire^{i\theta}.$$

Så er det bare å integrere:

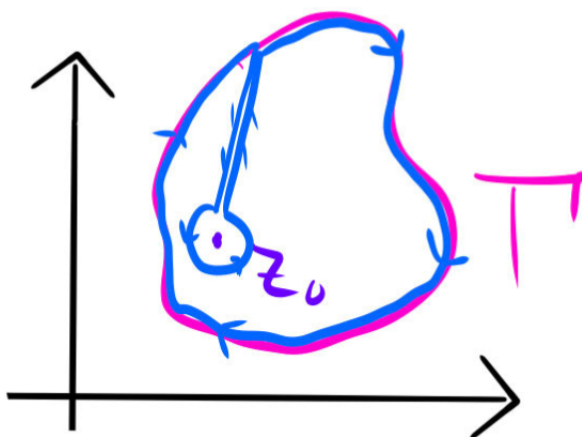
$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} ire^{i\theta} d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

- 19 Vi skriver om integranden og beregner

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} dz = \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma} \frac{1}{z - 1} dz - \int_{\Gamma} \frac{1}{z + 1} dz \right) = \pi i.$$

Det første av disse integralene er et spesialtilfelle av oppgavene over, mens det andre blir null på grunn av Cauchy's teorem. Jeg glemte å skrive at sirkelen skulle være traversert mot klokken, men det kan du ta som underforstått.

- 20 Her er trikset å innse at du kan lage en kurve som ser slik ut:



Siden den blå kurven går i et område der integranden er deriverbar, er integralet over den blå kurven null, og de to rette bitene inn og ut fra sirkelen kansellerer, så må integralet over den rosa kurven være det samme som integralet over sirkelen, og dette beregnet vi i oppgave 18. Det er null om z_0 er på utsiden eller $n \neq -1$, og $2\pi i$ om z_0 er på innsiden og $n = -1$.

21 Hvis f er analytisk, eksisterer grenseverdien

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

så funksjonen

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

er analytisk. Cauchys integralteorem gir

$$0 = \int_{\Gamma} g = \int_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz$$

og som gir

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

$$\boxed{22} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \quad \boxed{23} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz = 0 \quad \boxed{24} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz = -\pi i \quad \boxed{25} \int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^4} dz = 0$$

$$\boxed{26} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z} dz = 0 \quad \boxed{27} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \quad \boxed{28} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz = 0 \quad \boxed{29} \int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^4} dz = -\frac{\pi i}{3}$$

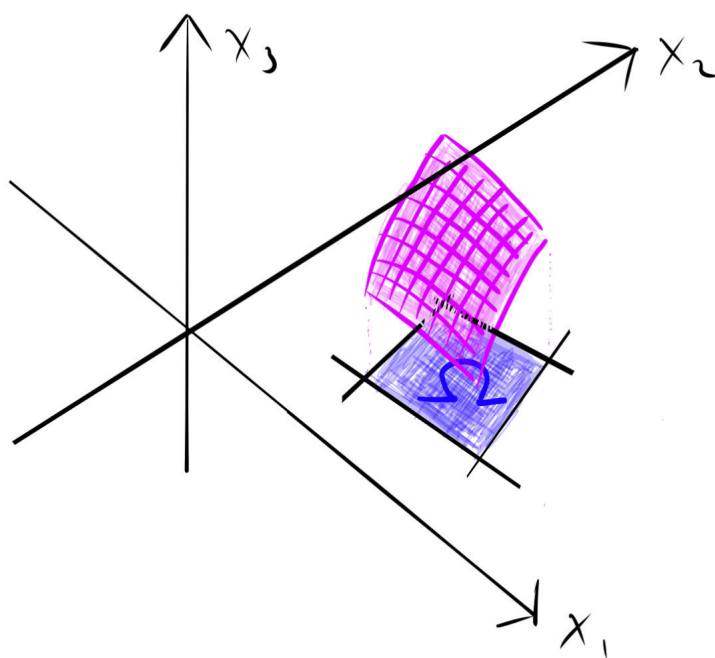
3 - 11 - LAPLACEOPERATOREN I - LF

- 0 Dette gjorde jeg i forelesning - den andre versjonen av Greens teorem blir

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds = \iint_{\Omega} \Delta u.$$

Den første versjonen blir bare $0 = 0$ dersom u er deriverbar nok; dette visste vi jo allerede.

- 1 La oss se på en liten bit av et trommeskinn:



Vi antar likeledes at molekylene i biten kun beveger seg rett opp og ned, slik at masse ganger akselerasjon til biten blir

$$\rho |\Omega| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

der $|\Omega|$ er arealet til Ω . Det som er nytt og litt komplisert å forstå her er at dersom spenningen er gitt ved $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$, målt i newton per meter, er kraften på et linjestykke Γ gitt ved et linjeintegral:

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Gamma} \sigma_1 ds \\ \int_{\Gamma} \sigma_2 ds \\ \int_{\Gamma} \sigma_3 ds \end{pmatrix} = \int_{\Gamma} \sigma ds$$

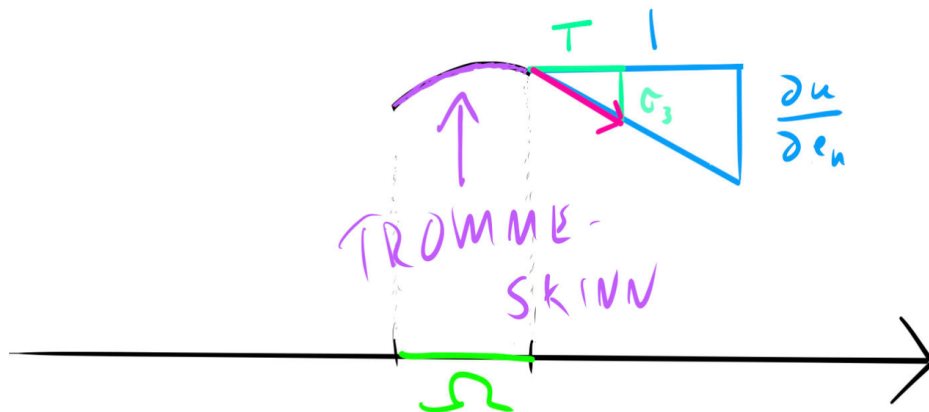
Merk at det ikke står $\sigma \cdot s$ i det siste integralet, for dette er ikke et arbeid, men en kortform for linjeintegral med tre vektorkomponenter. Eulers bevegelseslikninger¹ sier nå at for å finne akselerasjonen til den lille biten, må vi summere opp kontaktkreftene langs overflaten av biten - dette skal vi se mye nøyere på i TMA4121. Siden biten kun beveger seg opp og ned, er vi kun interessert i den vertikale komponenten av strekket, så kraften blir

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_3 ds$$

der σ er strekkets vertikalspenning. Antagelsen om isotropi og konstanthet i horisontalretning gir at spenningen normalt på $\partial\Omega$ alltid er den konstante spenningen T :

$$(\sigma_1, \sigma_2)e_n = T$$

Hvis vi nå ser på biten med trommeskinn fra siden slik:



ser vi at

$$F = \int_{\partial\Omega} \sigma_3 ds = T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds$$

og bruker vi Greens teorem, får vi

$$T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds = T \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx \approx T|\Omega| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

slik at

$$F \approx T|\Omega| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

og setter vi denne lik akselerasjonen, får vi bølgelikningen

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

eller

$$\rho \ddot{u} = T \Delta u$$

om du vil.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_laws_of_motion

- 2 Vi har en plate som er dekket av Glava over og under slik varmeenergi kun strømmer horisontalt langs platen. La Ω være en liten bit av platen. Vi kan sette opp endring i indre energi slik:

$$\frac{d}{dt} c \iint_{\Omega} u = c \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Konstanten c inneholder info om varmekapasiteten, platens tykkelse og alt det der. Endring i indre energi må være lik det som strømmer ut gjennom $\partial\Omega$, så vi må ha

$$c \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} q \cdot n \, ds$$

der q er varmefluksen. I mange materialer er denne proporsjonal med temperaturgradienten men motsatt rettet, slik at vi får

$$c \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} = k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} \, ds = k \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dette må gjelde for alle små biter av platen, så da må integrandene være like, og vi får

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Dette er varmelikningen med $\alpha = k/c$. Utledningen står også her: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

Husk at varmelikningen ikke bare er en modell for varmeflyt, men også for diffusjon, derfor kalles den gjerne diffusjonslikningen:

https://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation

Utledningen er identisk, man bare bytter ut temperatur med konsentrasjon, energikonservering med massekonservering, og Fouriers varmelov med Ficks diffusjonslov som sier nøyaktig det samme.

- 3 Her er det bare å bytte ut alt på høyre side i utledningen av bølgelikningen med det som kreves for at trommeskinnet skal være deformert men i ro. La oss anta at trommeskinnet utsettes for et statisk trykk $f(x)$ og så må strekkreftene i skinnet balansere de eksterne trykkreftene slik at trommeskinnet ikke flytter på seg. Vi bruker Greens teorem slik som i bølgelikningen og får strekkreftene

$$T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial e_n} \, ds = T \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \, dx$$

og trykkreftene er

$$\iint_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Setter vi disse lik hverandre og antar at Ω er vilkårlig valgt, må integrandene være like. Dette kalles Poissons likning:

$$\frac{f}{T} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

og er den inhomogene varianten av Laplaces likning. Se også utledning her:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_12.html

- 4 I oppgave 1 og 2 får vi en harmonisk funksjon om vi antar at løsningen er **stasjonær**, altså uavhengig av tid, slik at $\ddot{u} = 0$ og $\dot{u} = 0$. I oppgave 3 får vi harmonisk funksjon om $p = 0$.

- 5 Vi må sjekke at dersom

$$x = Ry = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

og $v(y) = u(Ry)$ er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}$$

så lenge R er rotasjonsmatrisen. La oss derivere i vei:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_2} = -\sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} &= -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\sin \alpha \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Hvis du nå legger sammen de rene andre ordens partiellderiverte og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Et spesialtilfelle er at om u er harmonisk, er også v harmonisk.

- 6 Dersom Ω er en sirkelskive sentrert i x med radius r , kan vi definere oss en funksjon ϕ og skrive

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) r \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

La oss derivere litt og bruke Greens teorem:

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u'(x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} r d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial e_n} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{\Omega} \Delta u = 0
 \end{aligned}$$

Dette viser at ϕ ikke endrer seg med r . Den konstante verdien må være

$$\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u ds = u(x)$$

slik at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u ds.$$

Det siste steget er kanskje ikke helt innlysende for alle, men middelverdisatsen kommer i en versjon for integraler, skroll deg litt nedover her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem

Konsekvensen er at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a),$$

og vår grenseverdioperasjon for ϕ er den samme, bare at vi har rullet sammen arket f er tegna på til en sylinder med radius r og så er u høyden til sylinderen som funksjon av r og θ . Vi tar det neste integralet i polarkoordinater og regner i vei:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(x_1 + p \cos \theta, x_2 + p \sin \theta) p d\theta dp \\
 &= \frac{u(x)}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi p dp = u(x)
 \end{aligned}$$

Dette kalles altså middelverdisatsen. En harmonisk funksjons funksjonsverdi er alltid lik gjennomsnittet av funksjonsverdiene både på alle omliggende sirkler og alle omliggende sirkelskiver:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u ds = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u$$

UKENS NØTTER

1 Dette gjorde jeg i forelesning i uke 44.

2 Nå er jeg litt lei av å skrive alle disse partiellderiverte. La oss introdusere notasjonen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Dirichletproblemet består i å løse

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{på } \Omega \\ u &= g & \text{på } \partial\Omega \end{aligned}$$

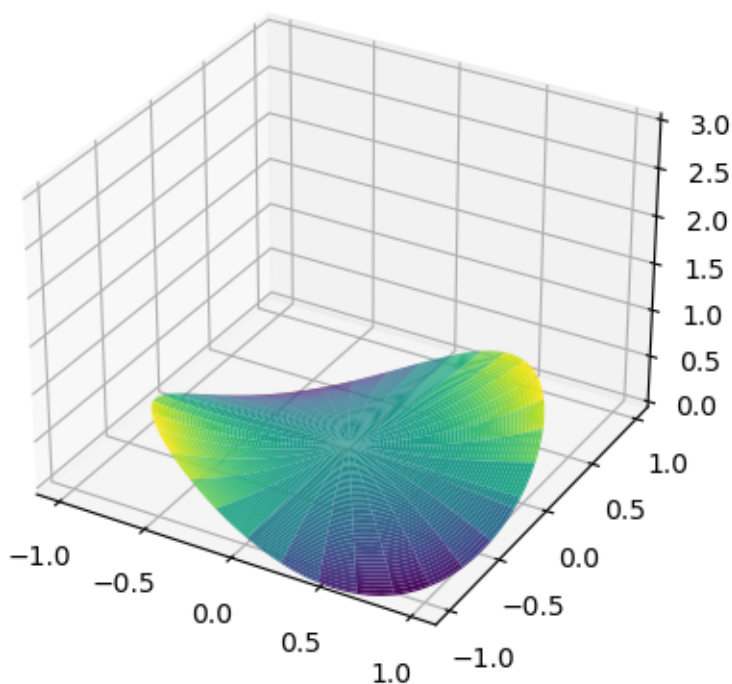
Dette problemet har entydig løsning, og om Ω er en sirkel sentrert i origo med radius a , finnes det faktisk en eksplisitt formel:

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(a \cos \phi, a \sin \phi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

Utledningen er litt for grisete for TMA4111, men det er i samme gate som oppgave 6, bare mer jobb. Integralet på høyre side er stort sett umulig å beregne for hånd, men trivielt å beregne med numerisk integrasjon. Du finner kode her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/harmonisk/>

og trommeskinnet ser omtrent sånn ut:



3 - 12 - FLATEINTEGRALER - LF

1-3 Disse gjorde jeg i forelesning den 30. oktober. Jeg skal få tegnet noen ordentlige figurer etterhvert, men slikt tar litt tid.

4 Hvis vi tenker at kuppelen står vertikalt slik som på en typisk bygning, kan vi gjøre noe slikt

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} p(z) \cos \theta \\ p(z) \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

og la definisjonsmengden være $[0, 2\pi) \times [0, 1]$.

5 Funksjonen i oppgave 1 er en lineærabildning, du ganger bare arealet av definisjonsmengden med

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{11}$$

og vips så har du arealet av flaten. For sylinderflaten beregner vi

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1,$$

så arealet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 dz d\theta = 2\pi.$$

Parametriseringen til enhetskuleskallet er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

slik at flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = \sin \varphi.$$

Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra. Nå er det bare å integrere:

$$\iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\theta d\varphi = 4\pi.$$

Er radien r , justerer vi bare parametriseringen slik:

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

og regner likeledes ut at

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = r^2 \sin \varphi.$$

og at

$$\iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi \, d\theta d\varphi = 4\pi r^2.$$

6 Parametrisering for et kuleskall med radius 9 er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 9 \cos \theta \sin \varphi \\ 9 \sin \theta \sin \varphi \\ 9 \cos \varphi \end{pmatrix},$$

men vi må finne en fornuftig definisjonsmengde. Dersom $x_3 = 2$, er $\varphi = \arccos 2/9$, så definisjonsmengden blir $[0, 2\pi) \times [0, \arccos 2/9]$, og arealet blir

$$\iint_\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(2/9)} 81 \sin \varphi \, d\varphi d\theta = 2\pi \cdot 81 \cdot (1 - 2/9) = 126\pi.$$

7 La oss gå for det ideelle gasslovtaket, det blir mer enn komplisert nok. Taket er gitt ved $f(x) = x_1 x_2$, så en fin parametrisering er

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} 4r \cos \theta \\ 3r \sin \theta \\ 12r^2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix},$$

med definisjonsmengde $[0, 1] \times [0, 2\pi)$. Flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \cos \theta \\ 3 \sin \theta \\ 12r \sin 2\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4r \sin \theta \\ 3r \cos \theta \\ 12r^2 \cos 2\theta \end{pmatrix} \right| = 12r \sqrt{1 + 16r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta}.$$

Jeg må innrømme at jeg ikke gadd å beregne kryssproduktet over; jeg brukte en annen formel. Dersom flaten Σ faktisk er grafen til et skalarfelt f , er

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

en finfin parametrisering, og flateelementet blir

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2}.$$

Sett opp denne og bytt koordinater slik som i økt 3-7 og vips så har du flateelementet. Arealet av taket blir

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} 12r \sqrt{1 + 16r^2 \cos^2 \theta + 9r^2 \sin^2 \theta} \, d\theta dr,$$

som ikke er helt godt å beregne for hånd, men trivielt med numeriske metoder.

- 8 Overflatearealet til det halve enhetskuleskallet er 2π , og massesenteret blir

$$\frac{1}{2\pi\rho} \begin{pmatrix} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta \\ \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin^2 \varphi \, d\varphi d\theta \\ \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

- 9 La oss si at radien er r . Vi beregner

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dersom du tenker at cylinderen har en topp og en bunn på konstante verdier av z , kan du parametrisere disse enkelt. La oss si at bunnen er i $z = 0$, da får du

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og du kan selv sjekke at normalvektoren blir

$$e_n = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alt etter hvilken vei du ganger sammen tangentene.

- 10 Vi beregner

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin^2 \varphi \\ -\sin \theta \sin^2 \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix},$$

å nei å nei det ble visst inn-normalvektor. Vi prøver igjen med mere hell:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin^2 \varphi \\ \sin \theta \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- 11 La oss ta et tetraeder Ω i første oktant begrenset av koordinatplanene og et skrått plan som skjærer koordinataksene i $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ og $(0, 0, 3)$. En parametrisering for det skrå planet er for eksempel

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 - 3x_1 - 3x_2/2 \end{pmatrix}$$

og utnormalvektoren blir

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parametriseringer for de andre flatene er for eksempel

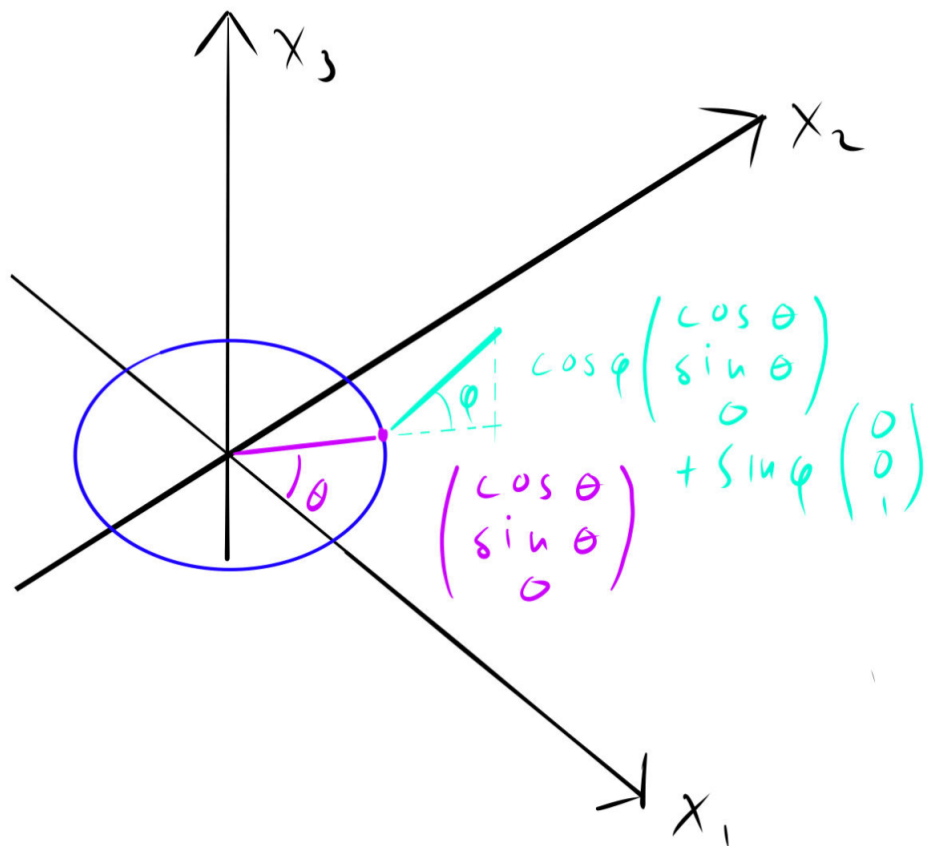
$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

for den i x_1x_2 -planet og

$$g(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for den i x_1x_3 -planet og så videre.

12 Vi kan lage parametrisering for en smultring ved å se på følgende figur:



Setter vi sammen en lineærkombinasjon av disse slik:

$$g(\theta, \varphi) = r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2 \cos \varphi) \cos \theta \\ (r_1 + r_2 \cos \varphi) \sin \theta \\ r_2 \sin \varphi \end{pmatrix}$$

blir bildet av $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ under g en smultring dersom $r_2 < r_1$:
<https://en.wikipedia.org/wiki/Torus>

13 Vektorfeltet er

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La Ω være cylinderen fra oppgave 9. Vi må regne ut

$$\iint_{\partial\Omega} f \cdot dS = \iint_{\text{Topp}} f \cdot dS + \iint_{\text{Bunn}} f \cdot dS + \iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot dS.$$

De to første integralene er null siden f står ortogonalt på utnormalvektorene på topp og bunn, jf oppgave 9. Fluksen ut sylinderflaten blir også null, men det får vi nesten beregne, la oss si at radien er r og høyden h :

$$\iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h zr \cos \theta \, dz d\theta = 0$$

Hvis du beregner fluksen ut av kulen, tetraederet og smultringen, vil du også finne at den er null. Alle disse integralene lar seg fint beregne, men det finnes et triks for å finne ut av det raskere. Dette trikset kalles divergensteoremet og er bare Greens teorem i tre dimensjoner. Skjønte du Greens teorem i to dimensjoner, klarer du antagelig å gjette deg til hvordan det ser ut, og vi skal ha det i uke 46.

14 Coulombfeltet fra en punktladning q plassert i origo er:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og parametriseringen til et kuleskall med radius r er

$$z(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

slik at utnormalvektoren blir (merk rekkefølgen på faktorene slik at vi får ut- og ikke inn-normalvektor)

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} \times \frac{\partial z}{\partial \theta} = r^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Så beregner vi

$$E(z(\theta, \varphi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Til slutt er det bare å integrere:

$$\begin{aligned}
 \iint_S E \cdot dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \cos \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \left(r^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right) d\theta d\varphi \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \varphi + \sin^2 \theta \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi d\theta d\varphi \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}.
 \end{aligned}$$