

2 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER V

Det er litt slik med differensiallikninger at dersom de lar seg løse med penn og papir lar de seg gjerne løse med penn og papir på flere forskjellige måter. Vi skal innlede dette semesteret med å kombinere triksene vi lærte om eksponensialfunksjonen i TMA4101, og bruke dem til å hente opp noen nye måter å angripe differensiallikninger på. Vi har nemlig det som trengs for å håndtere **matriseeksponensialfunksjonen**¹

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Grunnen til at vi er interesserte i denne, er at $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ er løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

1 Du kan selv skjønne hvorfor ved å derivere

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

ledd for ledd og så "sjekke" at $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.²

Det er stort sett slik med forskjellige metoder for LTI-systemer at det finnes ikke én metode som alltid gir løsningen på den enkleste måten. Matriseeksponensialfunksjonen gir løsningen på den enkleste måten i noen tilfeller. Men den er et bra påskudd for å ta unna **diagonalisering**. Vi smakte så vidt på dette i TMA4101, nå kan vi gjøre det litt ordentligere. Alle barn i barnehagen vet at

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

har egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2 Sett egenvektorene opp som kolonner i en matrise V og beregn AV . Produktet AV kan faktoriseres på en annen måte der V står på venstre istedet for høyre side. Hvordan?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_exponential

²Jeg sier "sjekke", for det er ganske mye jobb å vise på en stringent måte at dette er riktig. Hvis du vil vite hvordan det skal gjøres ordentlig, kan du lese kap. 2 i Schaeffer og Cain. Hvis ikke, kan du bare derivere ledd for ledd og se hva som skjer.

Dersom

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er

$$AV = V\Lambda.$$

Dette er bare alle egenvektorlikningene til A sammenstilt på matriseform, og du kan gjøre det uansett hvor mange egenvektorer det er for eksempel er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Men dersom A har n lineært uavhengige egenvektorer, eksisterer V^{-1} , og vi kan skrive

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

og siden Λ er diagonal, sier vi at A er **diagonalisert**. Den motsatte implikasjonen holder også; dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ må kolonnene i V være lineært uavhengige egenvektorer til A , og derfor sier vi en matrise er **diagonaliserbar** hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Er disse diagonaliserbare?

3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

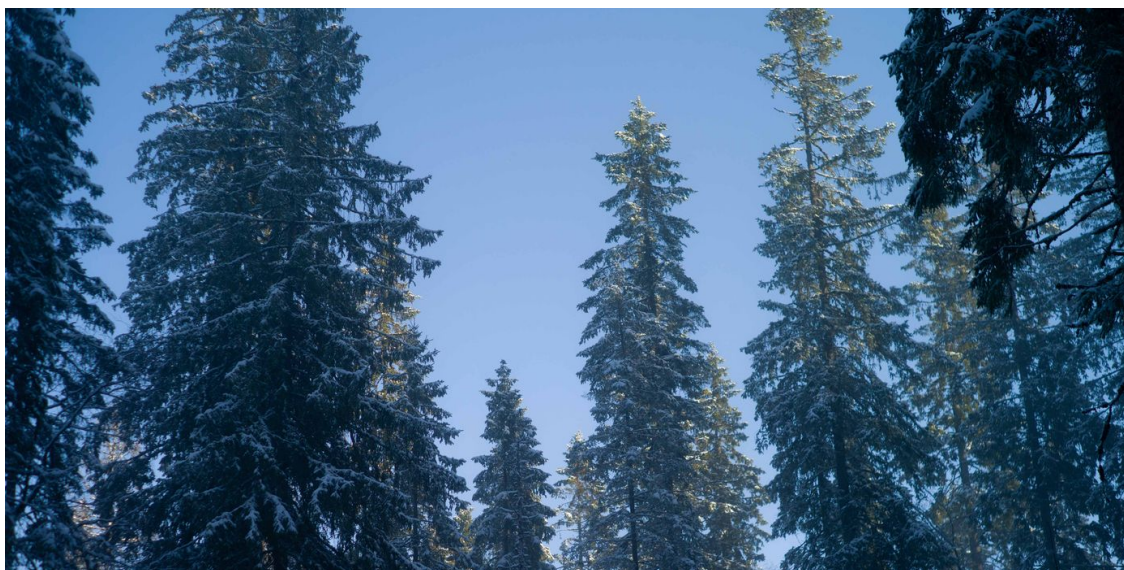
4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dersom A er diagonaliserbar, danner egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^n$. Det er gunstig å bytte til denne basisen når man løser $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, for den **dekobler** likningene. Dersom vi skriver $\mathbf{x} = V\mathbf{z}$, får vi $\dot{\mathbf{x}} = V\dot{\mathbf{z}}$.

7 Vis at $\dot{\mathbf{z}} = \Lambda\mathbf{z}$ og skriv opp løsningen $\mathbf{z}$. Hva blir $\mathbf{x}$?



Jobben er å forstå hvordan vi beregner matriseeksponensialfunksjonen på en effektiv måte. Det er faktisk et åpent spørsmål hvordan man beregner denne optimalt.³

- 8 Steg én for å forstå dette er å skrive ut hva matriseeksponensialfunksjonen blir på komponentform dersom A er en diagonalmatrise.

Dette er greit å vite, siden

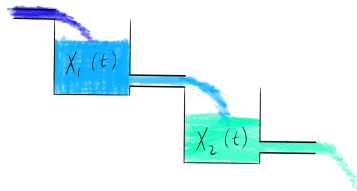
$$A = V\Lambda V^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^A = Ve^{\Lambda}V^{-1}.$$

- 9 "Sjekk" dette også.

Har du fulgt med til nå vil du kanskje innvende at vi ikke har vunnet noe særlig - å løse $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ innebærer fremdeles å finne egenverdiene og egenvektorene til A . Men styrken i matriseeksponensialfunksjonen

kommer til syne når A er defekt. Du husker forhåpentligvis strømming i tank:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}$$



Her kommer det rent vann inn i den øverste tanken, og vi antar det er perfekt blanding i begge tanker, og så har jeg satt farten til én liter per sekund slik at systemet skal bli pent og pyntelig.

- 10 Er matrisen diagonaliserbar? Hva er løsningen?

³<https://www.cs.jhu.edu/~misha/ReadingSeminar/Papers/Moler03.pdf>

TMA4101/4106/4111/4121



Vi vet at matrisemultiplikasjon ikke er kommutativt. Men dersom A og B kommuterer, er

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

- [13] Denne er litt hårete, tipper de fleste må slå det opp. Det står i Schaeffer og Cain, men Perko⁴ har en enda penere løsning.

Vi kan nå skrive

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

- [14] Sjekk at I og N kommuterer.

Det er viktig på grunn av følgende oppgave.

- [15] Sjekk at

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

O YES! Var ikke det pent så vet ikke jeg.

- [16] Systemet med tankene og konsentrasjonene har to lineært uavhengige løsninger. Nå har du alle. Løs med initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



⁴<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4613-0003-8>

Matrisen $\lambda I + N$ er den grunnleggende byggesteinen i **jordandekomposisjonen**⁵ til A :

$$A = VJV^{-1}$$

Dette er en dekomposisjon med en **blokkdiagonal**⁶ matrise

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

der J_k er kvadratiske matriser på formen

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Alle matriser kan jordandekomponeres, og jordandekomposisjonen degenererer til vanlig diagonalisering dersom A er diagonaliserbar, men beviset er altfor hardt for TMA4106. Har man jordandekomponeringen til A , kan man i prinsippet løse absolutt alle systemer på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, siden

$$e^{At} = Ve^{Jt}V^{-1}$$

og

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{når} \quad N = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

17 Vis.

Matrisen N på forrige side kalles **nilpotent**, siden den forsvinner om du ganger den med seg selv nok ganger. Dette trikset kan du bruke på følgende systemer. Løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dersom A er

$$\begin{array}{llll} \text{18} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{19} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{20} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{21} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(Hint: Du kan hacke oppgave 15.)



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix

Det som gjenstår er å vite hvordan man finner V dersom A ikke er diagonaliserbar. Kolonnene i V består av **generaliserte egenvektorer**⁷ til A . En generalisert egenvektor $\mathbf{v}$ er en vektor som tilfredsstiller likningen

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

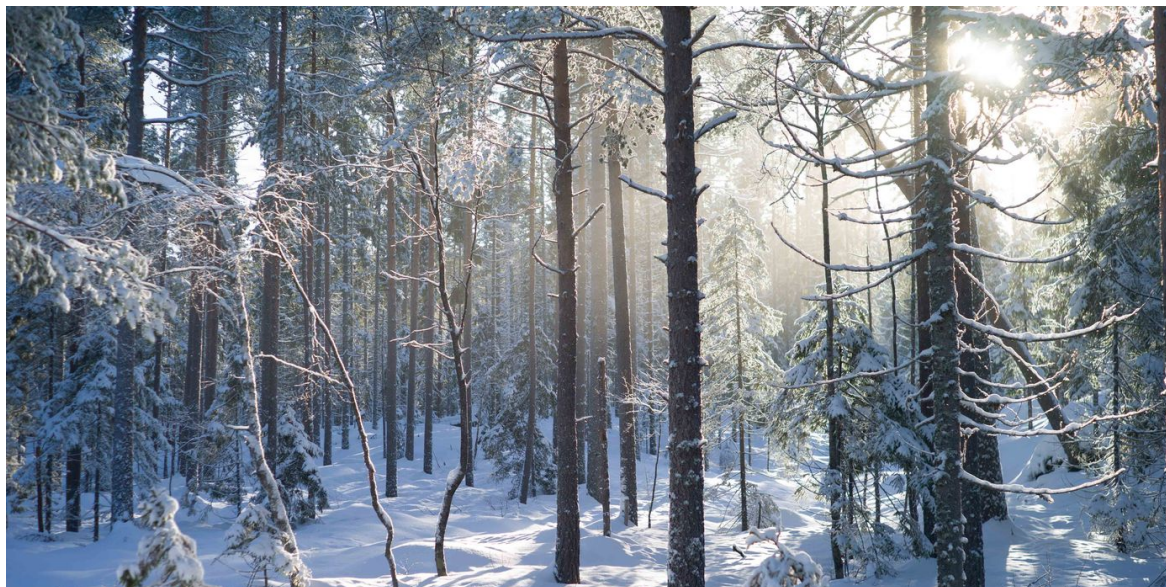
og det går an å vise at dersom multiplisiteten til λ er n , kan man alltid finne n lineært uavhengige generaliserte egenvektorer. Men det er ikke nødvendig å gjøre det så komplisert - du kan finne J basert på multiplisiteten til egenverdiene og så bruke likningene $AV = VJ$ til å regne ut de generaliserte egenvektorene.

22 Finn jordandekomposisjonen til

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

og løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ med initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_eigenvector

UKENS NØTTER

For LTI-systemer er det slik at noen numeriske metoder som egentlig er implisitte, blir eksplisitte allikevel.

- 1 Vis at Euler eksplisitt på $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I + hA) \mathbf{x}_k,$$

at euler implisitt blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1} \mathbf{x}_k$$

og at trapesmetoden blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2}A\right) \mathbf{x}_k.$$

Kjør alle på

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

og sammenlikne med den analytiske løsningen fra økt 1-7.

Hvis du skal opphøye en matrise A i en stor potens, er det veldig greit å ha diagonaliseringen, siden

$$A^n = (V\Lambda V^{-1})^n = V\Lambda^n V^{-1}.$$

Det er nemlig veldig lett å opphøye en diagonalmatrise i n .

- 2 Prøv å kjøre euler eksplisitt med stor h . Kan du forklare?
Hint: Diagonaliser $I + hA$ i python og se på egenverdiene.



2 - 2 - DIFFERENSIALLIKNINGER VI

Alle barn i barnehagen vet at den homogene differensiallikningen

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

er en modell for et masse-demper-system eller en rcl-krets eller andre ting. Ingeniører kaller slikt for **LTI-systemer**, eller **lineære og tidsinvariante systemer**. "Lineær" betyr at venstresiden er en lineæroperator på den ukjente, og "tidsinvariant" betyr at ingen av koeffisientene avhenger av t . Dersom vi slenger på en gitt funksjon av t på høyre side slik:

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t)$$

sier vi at likningen er **inhomogen**. En fysiker ville sagt at vi hadde et **drevet system**, for funksjonen f kjører på med sitt uavhengig av løsningen x . I kybernetikk eller prosesseteknikk kalles f en **forstyrrelse**, mens andre kaller det **påtrykk**. I masse-demper-systemet tenker du på f som en ekstern kraft og i rcl-kretsen som en spenningskilde. Løsningen er alltid

$$x = x_h + x_p$$

der x_h er et element i nullrommet til problemets lineæroperator og x_p er en løsning som skyldes forstyrrelsen f . Vi kaller x_h **den homogene løsningen** og x_p **den inhomogene løsningen** eller **partikulærløsningen**. Disse kan finnes på mange forskjellige måter.¹ La oss begynne med å repetere litt. Løs

$$\boxed{1} \quad \dot{x}(t) + 2x(t) = \cos t, \quad x(0) = 0$$

$$\boxed{2} \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{3} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ der } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningen kalles gjerne systemets **respons**; man tenker at det fysiske systemet responderer på forstyrrelsen f med oppførselen x . Det er fire responser som er spesielt viktige i anvendelser:

Naturlig respons: Systemets respons på $f(t) = 0$

Sprangrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$

Frekvensrespons: Systemets respons på $f(t) = e^{i\omega t}$

Impulsrespons: Systemets respons på $f(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$

¹Oppskrift finner du her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4106/2021v/notater/orke.pdf>

eller i kapittel 5.9 i Arnes bok.

Mer om fysikken finner du her:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html

Alle disse kan analyseres med verktøykassen du har, men la oss ta unna et viktig triks. Siden

$$\frac{d}{dt}(x(t - t_0)) = \dot{x}(t - t_0)$$

ser vi at dersom

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = f(t) \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

er $z(t) = x(t - t_0)$ en løsning av

$$\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = f(t - t_0) \quad z(t_0) = x_0 \quad \dot{z}(t_0) = v_0.$$

Det er derfor vi kaller systemet tidsinvariant. Samme påtrykk på et senere tidspunkt gir samme respons, altså samme kurve bare flytta litt på tidsaksen. Dette trikset er effektivt for å håndtere sprangresponsen. La oss begynne med å definere **enhetssprangfunksjonen**:²

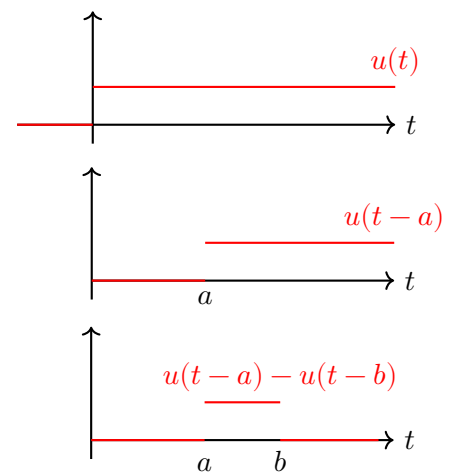
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

Denne kan du tenke på som en bryter som slår noe på ved tiden $t = 0$. Vi kan slå på ved tiden $t = a$ istedet:

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \geq a, \end{cases}$$

eller slå på ved $t = a$ og av igjen ved $t = b$:

$$u(t - a) - u(t - b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } t \geq b. \end{cases}$$



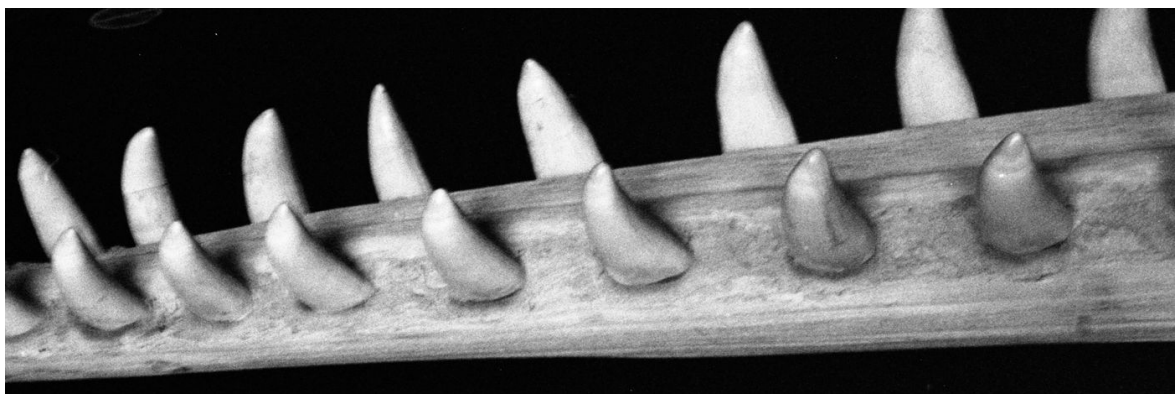
Løs initialverdiproblemene og plott. Bruk oppg. 2 og $x(t - t_0)$ -trikset.

$$\boxed{4} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t - 1) \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{5} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t - 2) \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{6} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t - 1) - u(t - 2) \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

$$\boxed{7} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = u(t - 1) \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$$



²Også kalt "heavisidefunksjonen" etter Oliver Heaviside som introduserte den i elektroteknikken
https://en.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside.

Så frekvensresponsen. Du vet at eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren:

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

og dette bør gi deg et ganske bra hint om den inhomogene løsningen til

$$\boxed{8} \quad \ddot{x} + \dot{x} + x = e^{i\omega t}.$$

Partikulærløsningen i oppgaven over skrives gjerne

$$x_p(t) = \frac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1} e^{i\omega t} = H(i\omega) e^{i\omega t}$$

der

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{\text{det karakteristiske polynom}}.$$

Eigenverdien $H(i\omega)$ til egenvektoren $e^{i\omega t}$ er det de fleste ingeniører mener når de sier "frekvensresponsen". Funksjonen H kalles **systemfunksjonen** i elektroteknikk og **transferfunksjonen** eller **overføringsfunksjonen** i reguleringsteknikk og prosesseteknikk. Materialteknikere kaller den **impedansen**.³ Frekvensresponsen forteller noe om hvordan systemet reagerer på forskjellige frekvenser. Nå lur du sikkert på hvorfor vi ikke bruker sinus eller cosinus når vi har lyst til å påtrykke en bestemt frekvens, og svaret er at det kan vi, men da blir regningen mer knotete. Sinusfunksjonen er egenvektor til noen spesielle lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer, men eksponensialfunksjonen er egenvektor til *alle* lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorer, og derfor er den mer praktisk i bruk. Hvis du på død og liv vil bruke cosinus istedet for eksponensialfunksjonen kan du det, men da er det best å utnytte systemfunksjonen.

$$\boxed{9} \quad \text{Løs } \ddot{x} + \dot{x} + x = \cos \omega t.$$

Man får mye informasjon om et system ved å se hvordan det reagerer når man sender gjennom sinusoidale påtrykk. I akustikk, elektro, impedansspektroskopi og en del andre anvendelser er det frekvensresponsen som råder grunnen. Moderne musikkteknologi er utenkelig uten frekvensrespons. På femtitallet da frekvensanalysen var rykende fersk, var frekvensresponsen også viktig i prosesseteknikk; man analyserte prosessanlegg ved å påtrykke forskjellige frekvenser og studere responsen.⁴

- $\boxed{10}$ Litt av greia med frekvenspåtrykk, er at for noen frekvenser kan systemet gå til helvete. Dette kalles **resonans**, og hvis du var en sånn rampegutt som spilte elgitar i rockeband eller likte å løpe frem og tilbake på fergedekket for å få fergen til å vagge bortover fjorden vet du hva det går i. Løs

$$\ddot{x} + x = \cos \omega t.$$

Hva skjer når $\omega = 1$?

(Hint: Frekvensresponsen bryter sammen når $\omega = 1$, og partikulærløsningen blir istedet $x_p(t) = Ct \sin t$. Plott denne, så ser du.)

³Alle bruker den til mange forskjellige ting:

- <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8512860/>
- <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/frequency-response-curve>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Transfer_function

⁴Nå om dagen er det visst sprangresponsen som gjelder; man skrur på en kran og ser hva som skjer.

Impulsresponsen kan du håndtere med de verktøyene du har dersom du er child prodigy i fysikk. Vi andre må ta til takke med noe som kalles **laplacetransform**. For å skjønne hvem Pierre-Simon Laplace var, må vi gjennom fysikkens historie på tretti sekunder.

Planetene går som kjent i bane rundt solen og ikke omvendt. Den første som foreslo denne sprø ideen var Aristarkhos av Samos.⁵ Han ble selvfølgelig ikke tatt seriøst, og ideen lå død frem til Kopernikus.⁶ Av en annen merkelig grunn la ikke den katolske kirke merke til dette blasfemiet før Galileo Galilei bygget det første refraksjonsteleskopet og oppdaget at Jupiter hadde måner.⁷ Omtrent samtidig satt Tycho Brahe på en øy og festet og drakk og bygget presise måleinstrumenter og tabulerte planetenes gang nøye nok til at Johannes Kepler kunne formulere planetlovene.⁸ Kepler trodde naturligvis også at planetene gikk rundt solen, men gudfryktig som han var⁹ slapp han unna med det. Keplers planetlover følger av Newtons gravitasjonslov¹⁰ og vips så kjente menneskeheten til en kvantitativ mekanisme for store legemers bevegelse i verdensrommet, ihvertfall i god avstand fra ting som er tunge nok til å merkbart bøye av lyset.¹¹

Pierre-Simon Laplace¹² gikk noen knepp lengre enn Newton og fant ut av slike ting som hvorfor tidevannsbølgen på jordoverflaten har to bølgetopper og ikke bare én, og hvorfor Jupiters bane skrumper mens Saturns vokser.¹³ Laplace regnes som en av de største vitenskapsmenn som har levd, og vi kan takke ham for mye forskjellig. De fire viktigste er:

- sannsynlighetsregning og statistikk
- partielle differensiallikninger
- **Den ensidige laplacetransformen:**

$$\mathcal{L}(x) = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- uttrykket “vi ser lett at...” som man slenger opp foran et utsagn når man ikke helt husker hvorfor utsagnet er sant eller hvordan resonnementet gikk

Resten av denne økten skal handle om laplacetransform. Dette er et bemerkverdig men nyttig redskap. Jeg liker bedre det mer norske ordet “omvending” enn “transform”, men “laplacetransform” er så innarbeidet at man får kjeft om man sier noe annet. (Jeg har prøvd.)

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Aristarchus_of_Samos

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

⁹Kepler var visst fæl til å blande vitenskapelige og teologiske resonnementer. Han hadde noen teorier om at det var engler som fór rundt og skjøv på planetene.

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

¹¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Vulcan_\(hypothetical_planet\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Vulcan_(hypothetical_planet))

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace

¹³Euler prøvde visst på dette problemet uten hell. Det skyldes resonans; Jupiter går fem ganger rundt solen omtrent like fort som Saturn går to, og dette fører til at banene skrumper og vokser med en periode på 929 år. Samme resonans forekommer andre steder i solsystemet, for eksempel blant Jupiters galileiske måner; Ganymedes går rundt en gang i uken, Europa dobbelt så fort, og Io fire ganger så fort. Om noen milliarder år kommer Callisto antagelig til å bruke to uker rundt.

https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_resonance

Laplace-transform er et av mange mange eksempler på noe som kalles **integraltransform**. Dette er redskaper som er nyttige for så mangt, men de fremstår som litt trukket ut av hatten om man ikke er vant til dem. Vi bruker laplace-transform til å løse initialverdiproblemer. Parameteren s er et komplekst tall, og laplace-transformen er en lineæroperator som tar inn en funksjon av t og gir ut en korresponderende funksjon av s ; vi skriver derfor enten $\mathcal{L}(x)$ eller $X(s)$ alt etter kontekst.¹⁴

- 11 Finn laplace-transformen til $x(t) = e^{at}$, der a er en konstant.

(Hint: Du må anta at realdelen til s er større enn a , slik at integralet konvergerer.)

For at vi raskt skal skjønne hvordan laplace-transform kan brukes til å løse differensiallikninger, skal vi umiddelbart utlede en viktig regneregel.

- 12 Vis at

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x) - x(0)$$

(Hint: Anta at realdelen til s er større enn null og ta en delvis integrasjon.)

Siden laplace-transform er en lineæroperator, kommer det kanskje ikke som et sjokk at den kan brukes på lineære differensiallikninger. La oss begynne med initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \quad x(0) = 1$$

som har løsning $x(t) = e^{-at}$.

- 13 Ta laplace-transform på begge sider av differensiallikningen, løs for $X(s)$, og se på oppgave 11.

Nøkkelen til suksessen ligger i relasjonen fra oppgave 12. Det er denne og lineariteten som lar oss skrive differensiallikningen om til en algebraisk likning som er triviell å løse. Det vanligste er å bruke tabell for å invertere laplace-transform, og da må vi kjenne til en haug med laplace-transformer, slik at vi vet hva som korresponderer til hva.¹⁵ Du finner en kjempetabell i appendiks B i Balchens regtekklassiker, som ligger gratis her:

<https://folk.ntnu.no/tronda>

Hvis du vil løse høyere ordens differensiallikninger, må du ha en derivasjonsregel til.

- 14 Vis at

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

(Hint: Bruk den forrige derivasjonsregelen to ganger.)

Denne derivasjonsformelen kan generaliseres til høyere ordens deriverte, men den trenger du antageligvis ikke. På høyere ordens systemer må man uansett til med numeriske metoder.¹⁶

La oss nå regne ut et par laplace-transformer og løse noen flere differensiallikninger. Finn X dersom (og husk å gjøre antagelser på s slik at livet smiler)

¹⁴Det er en dårlig vane å skrive $\mathcal{L}(x(t))$, for $x(t)$ er et tall, altså funksjonsverdien til funksjonen x i t .

¹⁵Det finnes en inversformel for laplace-transform:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} X(s)e^{st} ds$$

men denne er for det første for komplisert for oss inneværende semester, og for det andre først og fremst av teoretisk interesse.

¹⁶Eller Diana: https://snl.no/DIANA_-_datamaskin

$$\boxed{15} \quad x(t) = \cos t$$

$$\boxed{16} \quad x(t) = \sin t$$

og bruk laplacetransform til å løse initialverdiproblemene

$$\boxed{18} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{19} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$$

$$\boxed{20} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0$$

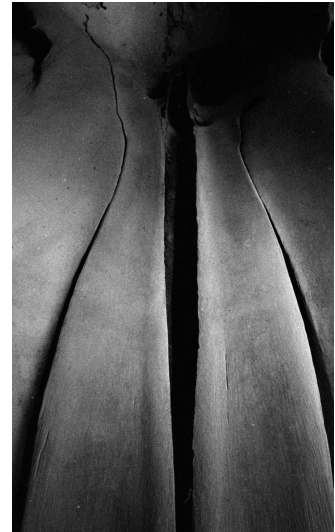
$$\boxed{21} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \cos t \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{22} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \sin t \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{24} \quad \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t} \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{25} \quad \ddot{x}(t) + x(t) = \sin t \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\boxed{26} \quad \dot{x}(t) + x(t) = e^{-t} \quad x(0) = 1$$



I oppgave 26 trenger du et triks du ikke kommer til å få så veldig mye bruk for, men oppgavene illustrerer et interessant poeng om resonans. Dette er noe som skjer dersom man påtrykker et signal som også er en homogen løsning. På folkemunne sier man gjerne at man påtrykker med resonansfrekvensen til systemet. Det er omtrent dette som skjer når du får fergen til å krenge ved å løpe frem og tilbake på dekk, eller når det feeder i mikrofonen.

$$\boxed{27} \quad \text{La } y(t) = tx(t). \text{ Vis at}$$

$$Y(s) = -\frac{d}{ds}X(s)$$

og løs systemet fra eksamen i TMA4101

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$$

med initialkrav $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

$$\boxed{28} \quad \text{Du kan også prøve oppgave 26 på nytt.}$$

La oss samle opp noen flere triks. Det finnes mange triks, men jeg har prøvd å plukke ut ting dere kan få bruk for, basert på de klassiske responsene. Her er en regel, t -skift:

$$\boxed{29} \quad \text{Finn laplacetransformen til } u(t-a), \text{ og vis at dersom } y(t) = x(t-a)u(t-a) \text{ er}$$

$$Y(s) = e^{-as}X(s)$$

og skisser x og y . Prøv oppgave 4-7 igjen og sjekk at du får samme svar.

Den neste regelen kalles s -skift.

$$\boxed{31} \quad \text{La } y(t) = e^{at}x(t), \text{ og vis at } Y(s) = X(s-a).$$

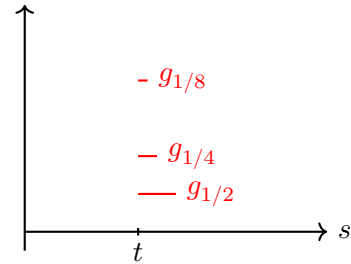
$$\boxed{32} \quad \text{Regn ut laplacetransformene til } e^{\alpha t} \cos \omega t \text{ og } e^{\alpha t} \sin \omega t \text{ og prøv oppgave 20 på nytt.}$$

Nå kan vi prøve oss på impulsresponsen. La

$$g_k(s) = \begin{cases} 1/k & \text{for } 0 < s < k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi definerer

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow 0} g_k(t)$$



33 Man tenker på diracpulsen som noe som plukker ut funksjonsverdier fra integraler. Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(x-s) ds = f(x).$$

Diracpulsen brukes til å modellere impuls, altså energitilførsler der den påtrykte kraften er ekstremt høy og ekstremt kortvarig, som for eksempel ved hammerslag eller høye smell.¹⁷ For unge mennesker pleier diracpulsen å bli introdusert slik:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & t \neq a \end{cases}$$

men dette er både meningsløst og forvirrende, for definisjonen forteller deg ingenting om hvordan du skal oppføre deg når du ser diracpulsen i en differensiallikning. Det er mye bedre å tenke slik: Dersom f er massetettheten til et endimensjonalt objekt, er

$$\int_a^b f(s) ds = \text{massen til objektet mellom } a \text{ og } b$$

og diracpulsen er bare en snedig måte å matematisk plassere et enkilos fiskelodd i punktet t :

$$\int_a^b \delta(t-s) ds = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

34 Finn laplacetransformen til diracpulsen.

Diracpulsen gir kun mening når den opptrer under integraltegn og er et eksempel på noe som kalles en distribusjon. Dette er litt for komplisert for oss, men jeg kan trøste deg med at diracpulsen ble oppfunnet av en fysiker, Paul Dirac.¹⁸ Det var ingen som tok diracpulsens seriøst til å begynne med, men Dirac fikk til slutt nobelprisen i 1933 for sitt arbeid med kvantemekanikk, sammen med Erwin Schrödinger.¹⁹ Løs initialverdiproblemene

35 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0$

36 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-2) \quad x(0) = 0$

37 $\dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2) \quad x(0) = 0$

38 $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t-1) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0.$

39 $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t) \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$

40 $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0 + 1/m$

¹⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

¹⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

¹⁹Dirac var ganske fåmælt. Etter ham har vi en måleenhet for talestrøm: en dirac = ett ord per time

LITT REPETISJON AV DELBRØKSOPPSPALTNING

Hvis du ikke husker delbrøksoppspalting, kommer det en repetisjon her. Dette er en litt kjedelig teknikk for å splitte rasjonale funksjoner, altså funksjoner på formen

$$f = \frac{q}{p}$$

der q og p er polynomer. Det er vanlig å anta at q har lavere grad enn p . Hvis det ikke er tilfelle, er det bare å bruke polynomdivisjon og skrive

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{p(x)}$$

der s har lavere grad enn p . Polynomet r er trivielt å integrere, så vi kan konsentrere oss om brøken. La oss begynne med noe enkelt. For eksempel husker alle barn i barnehagen at

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{(x - 1)} - \frac{1}{x}$$

Hvordan finner vi ut dette om vi ikke vet det? Vel, først kan vi skrive $x^2 - x = x(x - 1)$, og så kan man huske at det går an å skrive

$$\frac{1}{x(x - 1)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{x}.$$

Dersom dette er korrekt måte å spalte på, vil det nå være mulig å beregne A og B . Har du bommet på formen, vil du få et likningssystem som ikke har løsning. Vi ganger opp med $x(x - 1)$ og får

$$1 = Ax + B(x - 1).$$

Siden to polynomer kun er like om de har samme koeffisienter på hver orden av x , er denne likningen kun sann dersom

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= -B \end{aligned}$$

som gir $B = -1$ og $A = 1$ og

$$\frac{1}{x(x - 1)} = \frac{1}{(x - 1)} - \frac{1}{x}$$

som forventet. Den generelle prosedyren er ikke vanskelig, men litt langdryg å forklare, så jeg tror jeg setter ut dette til Arnes bok, kapittel 3.10. I korte trekk kan du spalte repeterte røtter slik:

$$\frac{p(x)}{(x - a)^n} = \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

for eksempel:

$$\frac{1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}$$

Prøv å spalte

41

$$\frac{1}{x^2 - 4}$$

42

$$\frac{1}{x^2(x - 1)}$$

43

$$\frac{1}{x^4 - 4x^2}$$

UKENS NØTTER

Det er vanlig å kjøre laplacetransform rett på krets. Nå skal vi se på det.

1 Utled regnereglene

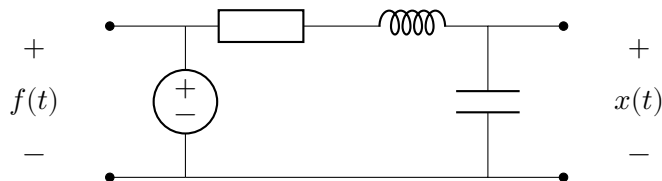
$$V = RI \quad \text{og} \quad V = \frac{I}{sC} \quad \text{og} \quad V = sLI$$

for motstand, spole og kondensator ved å laplacetransformere regnereglene deres.

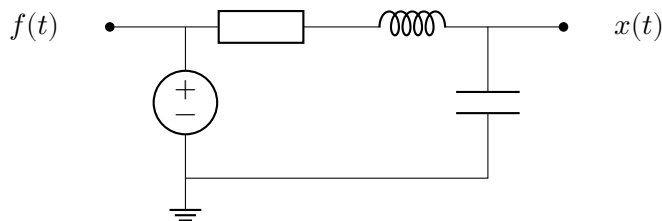
Siden Kirchhoffs spenningslov på RCL-krets gir en integro-differensiallikning, kan det være greit å ha en integrasjonsregel:

2 Vis at dersom $y(t) = \int_0^t x(u) du$, er $Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$.

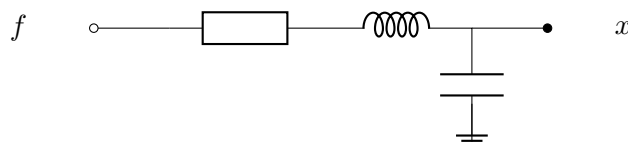
Man kan tegne RCL-filtre litt forskjellig. Du kan tegne sånn:



eller sånn:



eller sånn:



Vi kaller f **inngangen** og x **utgangen**. Du tenker at du kjører signalet f gjennom kretsen og så får du ut x . Borte på elektro er det vanligere å kalle inngangen for x og utgangen for y .

3 Vis at strømmen i kretsen over tilfredsstill

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

og få likningen over i s -domenet ved å laplacetransformere den, og finn systemfunksjonen.

Dersom du setter spenningen over kondensatoren som ukjent, får du likningen

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = \frac{1}{C}f.$$

Her er noen varianter av kretsen over med realistiske verdier på komponentene. Koble opp kretsene på brødbrettet, send inn forskjellige frekvenser ved å sette $f(t) = e^{i\omega t}$, bruk et oscilloskop til å måle, og sammenlikne med analytisk løsning.

$$\boxed{4} \quad 0.1\ddot{x} + 3000\dot{x} + 200000x = 200000f \quad \boxed{5} \quad 0.1\ddot{x} + 2000\dot{x} + 200000x = 200000f \quad \boxed{6} \quad 0.1\ddot{x} + 100000x = 100000f$$

$\boxed{7}$ Finn systemfunksjonene til filtrene her:
https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit#Filters

$\boxed{8}$ La oss avslutte med litt skråkast. La oss si at du kaster en ball fra origo med startfarten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og at ballen kun er påvirket av tyngden og luftmotstanden. Dersom luftmotstanden antas å avhenge lineært med farten (dette er greit dersom farten er lav), blir systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -a\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 &= -a\dot{x}_2 - mg \end{aligned}$$

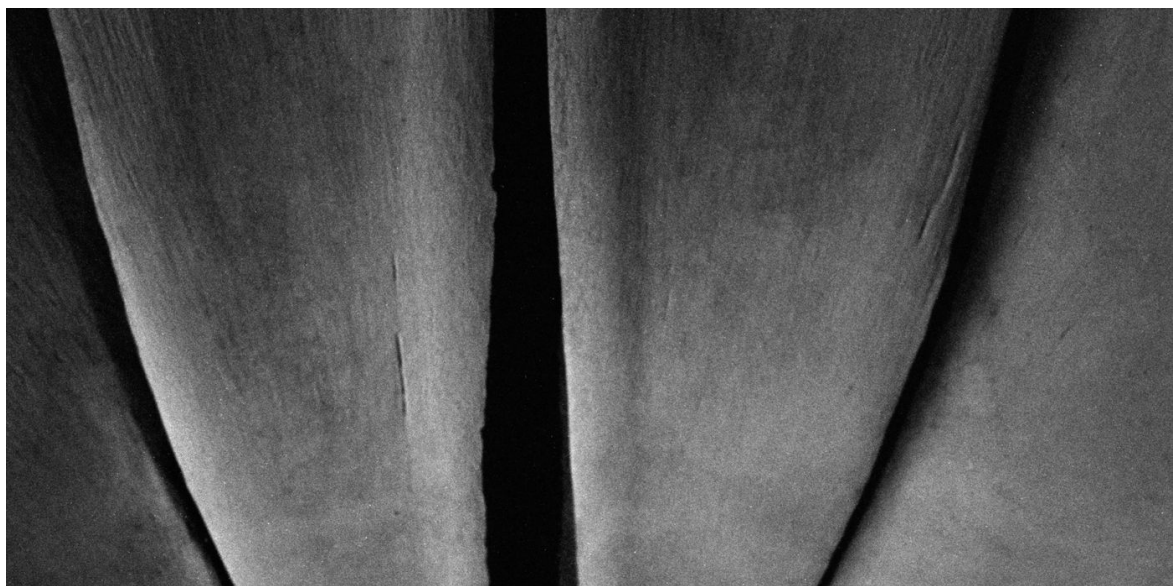
der m er massen til ballen, a er proporsjonalitetskonstanten og g er tyngdeakselerasjonen. Løs med laplace og plott ballens trajektorie. Løs også systemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) &= \delta(t) - a\dot{x}_2(t) - mg \end{aligned}$$

UKENS LIFE HACK

Hvis du synes det er vanskelig å huske regnereglene for laplacetransform, kan det være det er bedre å gå seg en tur enn å binge netflix:

<https://www.scientificamerican.com/article/humans-evolved-to-exercise/>



2 - 3 - FOURIERANALYSE I

Laurentius Lie plages. Strømmen er gått på grunn av en solstorm, og det er ingenting å finne på. Livet uten elektrisitet er meningsløst, synes han. Derfor bestemmer han seg for å drukne sine sorger i pilsnerøl. Men han har ikke pilsnerøl, for i butikken virker ingenting nå som strømmen er gått. Alt han har er noen sekker med malt og en bok om brygging han kjøpte under en midtlivskrise for noen år siden.

Han går igang. Men så er det det med temperatur. Pilsnerøl skal gjæres i tre uker på ti grader, men Professor Lie har ikke tilgang på denne temperaturen. Alt han har tilgang på er null grader på verandaen, og tjue grader i stuen. Kjerringa hans Laurinda er fra Brasil og nekter å ha ti grader i stuen; altså blir han nødt til å sette gjæringsdunken inn og ut på verandaen i tre uker. Det går nok bra, det er jo ingenting annet å finne på uansett.

Vi antar at temperaturen $x(t)$ i Professor Lies gjæringsdunk kan modelleres ved Newtons avkjølingslov. I så fall må vi veksle mellom de to differensiallikningene

$$\dot{x}(t) = \alpha(20 - x(t))$$

når dunken står i stuen og

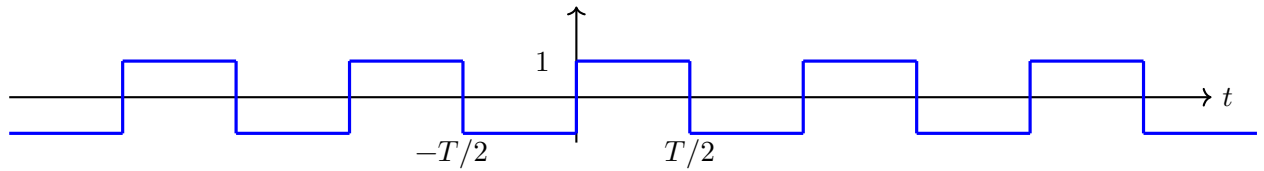
$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t)$$

når dunken står på verandaen. Vi kaller tiden mellom to flyttinger $T/2$.

0 Dette kan like gjerne modelleres med én differensiallikning $\dot{x}(t) + \alpha x(t) = f(t)$. Skisser f .



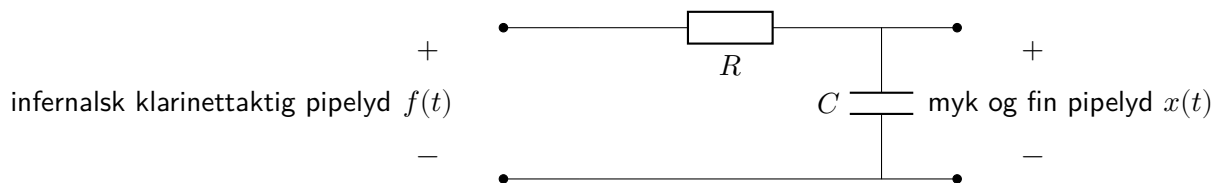
Professor Lie har en batteridrevet timer som forteller ham at det er på tide å flytte gjæringsdunken. Men han plages, for timeren signaliserer at tiden er omme med en infernalsk stygg pipelyd. Pipelyden er stygg fordi den er en firkantbølge:



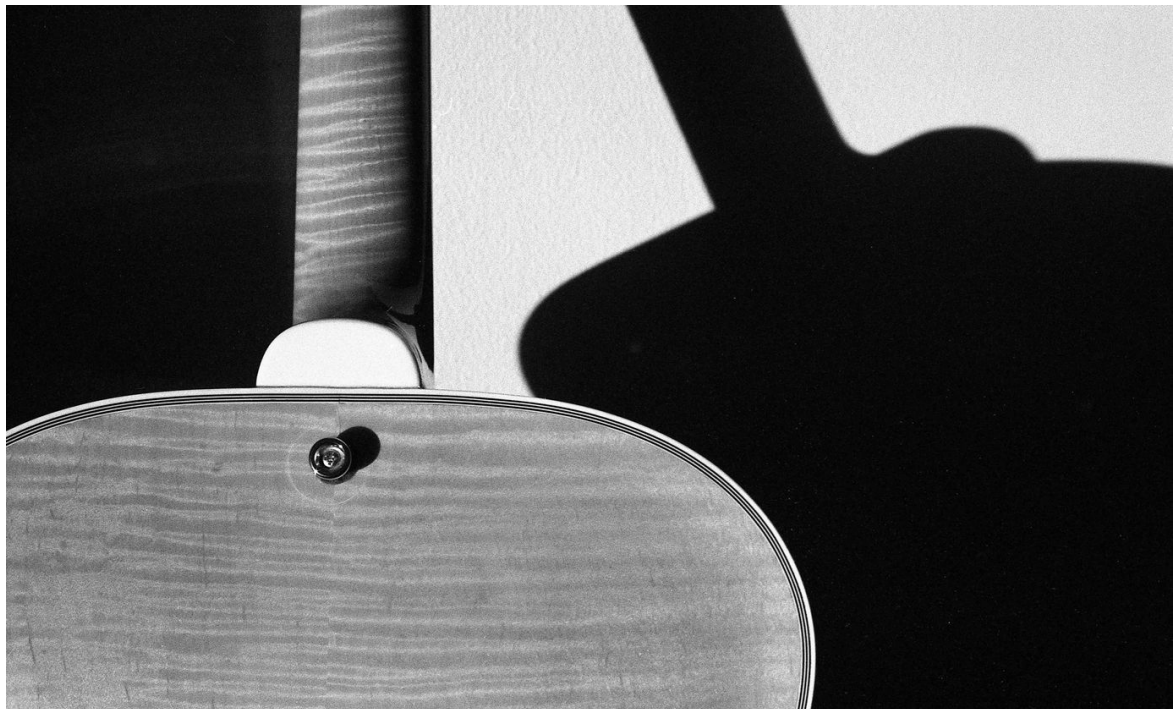
Forskjellige bølgeformer låter forskjellig, og firkantbølgelyd låter omtrent som en klarinett. Du kan lese om forskjellige bølgeformer og høre på dem her:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Waveform>

Professor Lie ønsker å installere et analogt lavpassfilter på timeren for å få myket opp den forferdelige klarinettlyden. Et lydsignal representeres ved en spenning så lenge det befinner seg inne i stereoanlegget og ikke har kommet ut gjennom høyttaleren ennå, så han bestemmer seg for å sende pipetonen gjennom følgende krets:



- 1 Finn differensiallikningen som gir x .

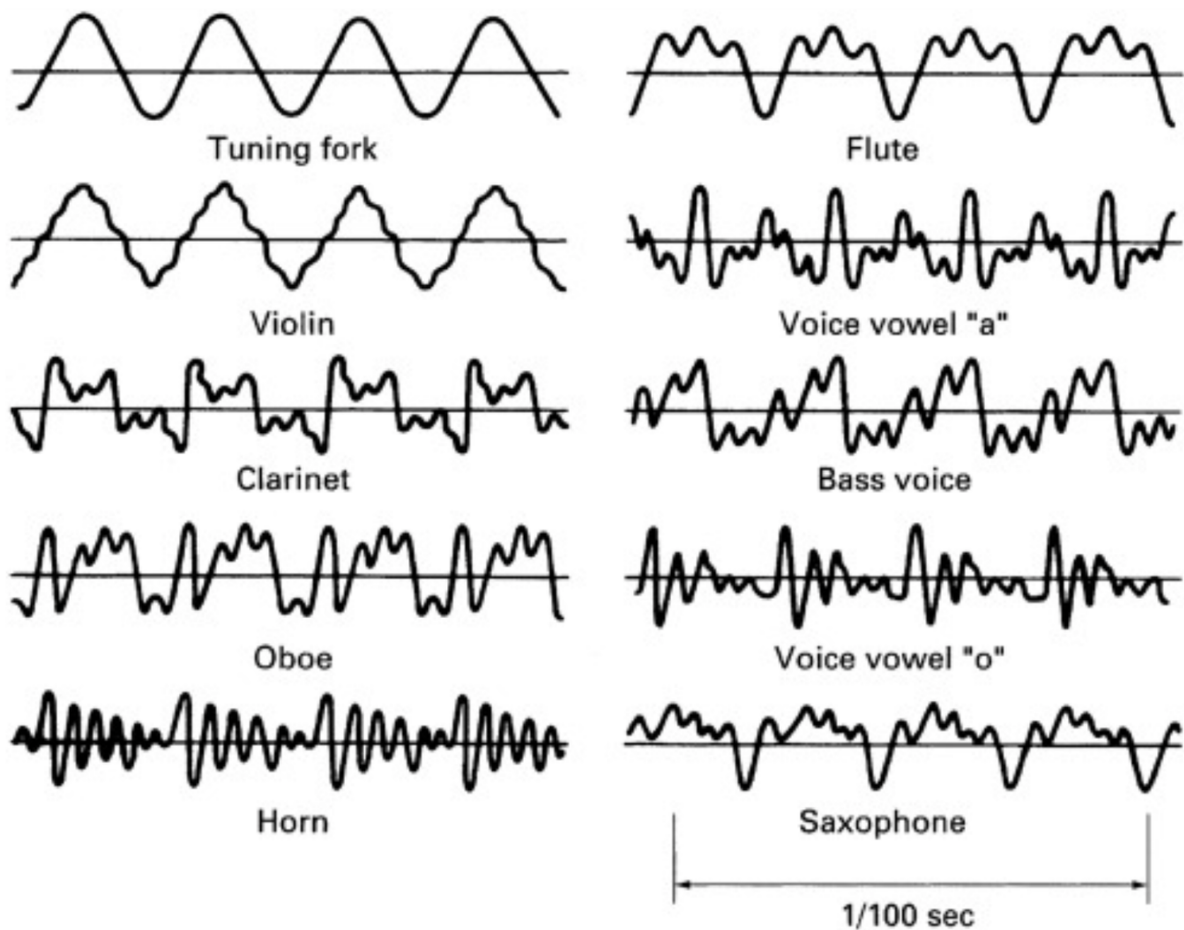


Svaret på forrige oppgave er

$$\dot{x} + \frac{1}{RC}x = \frac{1}{RC}f$$

og forhåpentligvis er du enig i at denne problemstillingen er identisk med Newtons avkjølingslov på gjæringsdunken. Begge er det samme LTI-systemet påtrykt noe som er formet som en firkantbølge. Spenningen x ut av kretsen vil oppføre seg nøyaktig som temperaturen i gjæringsdunken, mens det infernalske klarinettaktige spenningssignalet som går inn i kretsen, er analogt til vekslingen mellom inne- og utetemperaturen i Professor Lies residens.

For å forstå hvordan vi skal håndtere dette problemet, må vi vite noe om **periodiske funksjoner**. Periodiske fenomener er enormt viktige. For tiden er vi for eksempel inne i en fase av jordens historie der små periodiske variasjoner i jordbanens eksentrisitet og rotasjonsaksens precesjon har mye å si for klimaet.¹ Det er derfor vi har istider² som har gått av og på med omtrent hvert hundre tusende år de siste to-tre millioner år.³ Her er noen andre eksempler på periodiske funksjoner:



<https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/middle-c>

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Milankovitch_cycles

²https://en.wikipedia.org/wiki/Ice_age

³Karbondioksidet vi spyr ut i atmosfæren nå har visst forskjøvet den neste istiden med femti tusen år eller deromkring.

Når en forfyllet oboist gir stemmetonen på 442 Hz begynner molekylene i området rundt obomunningen å dytte på hverandre og en periodisk trykkløse sprer seg i rommet. At frekvensen er 442 Hz betyr i grove trekk at trykkløses bølgetopper treffer trommehinnen din 442 ganger i sekundet.

2 Eller? Hvor er oboens bølgetopp?

Det som er lett å se på bølgeformene over, er at de alle har noe vi kan kalle en grunnfrekvens og en grunnperiode. Selv om det ikke er så lett å se hvor oboens bølgetopp sitter, gjentar obosignalet seg på en periodisk måte. En vanlig definisjon er at et signal x er **periodisk** med **periode** T dersom

$$x(t + T) = x(t)$$

for alle t . Men dersom T er en periode er også $2T$ og $3T$ og $4T$ perioder, og så videre, så et periodisk signal har alltid mange perioder. Den minste av dem kalles **fundamentalperioden** til x . Dersom fundamentalperioden er T , sier vi at x er T -periodisk.

3 Marker fundamentalperiodene i alle bølgeformene i figuren over.

Forholdet mellom fundamentalperioden T og **grunnfrekvensen** f er

$$f = \frac{1}{T}$$

Enheten for frekvens er Hz, altså bare "per sekund". I de fleste realfag foretrekker man å heller forholde seg til forholdet mellom fundamentalperioden T og **vinkelfrekvensen**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

siden radianer er vårt foretrukne vinkelmål. Enheten for vinkelfrekvens er radianer per sekund.

4 Signalene i figuren har alle omtrent samme frekvens på 100 Hz. Finn vinkelfrekvensen.

Nå skal vi prøve å finne et fornuftig funksjonsuttrykk for firkantbølgen:

5 Skriv pythonscript som plotter funksjoner av typen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)t)$$

for forskjellige verdier av N . Hva skjer når $N \rightarrow \infty$? Og hva er ω ?

På et strengeinstrument kan du se bølgeformen med dine egne øyne hvis du har et slow motion camera. Hvis du ikke har et slikt og et strengeinstrument, har rikskringkastingen filmet Glenn her: <https://tv.nrk.no/serie/oeyeblikket/sesong/1/episode/8>

Legg merke til hvordan den strengen som vibrerer fritt går like fort frem og tilbake, mens den han stryker på går fort den ene veien og sakte den andre veien. Sistnevnte skjer fordi vi har en såkalt stick-slip-bevegelse,⁴ og bevegelsen har en matematisk abstraksjon som kalles en **sagtannbølge**. Vi kan finne et fornuftig funksjonsuttrykk for denne også:

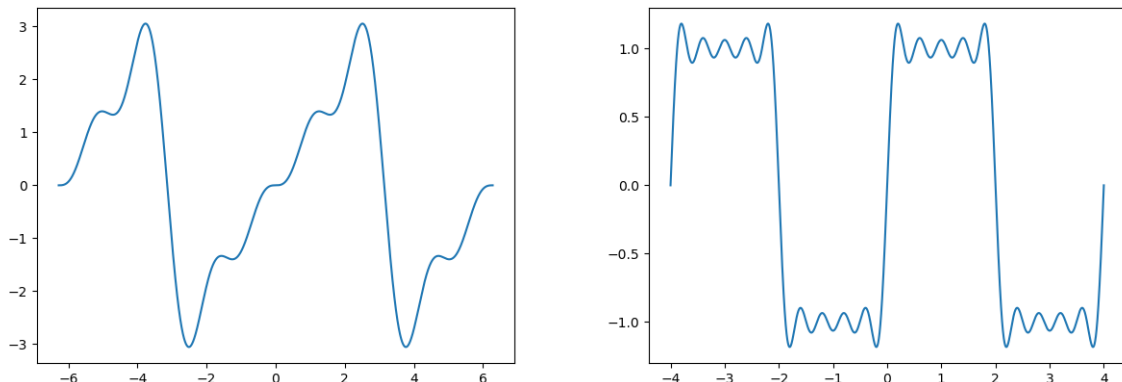
5b Skriv pythonscript som plotter funksjoner av typen

$$S_N = 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)$$

for forskjellige verdier av N .

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Stick-slip_phenomenon

Hvis du plotta riktig over, fikk du forhåpentligvis noe slikt:



Og nå tror jeg vi enkelt og greit bare slenger ut poenget. En ingeniør kan alltid skrive et T -periodisk signal x slik:⁵

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Koeffisientene a_n og b_n beregnes slik:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

De som har sans for det vakre og abstrakte, kan bruke den mer praktiske formen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

der

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Denne sier akkurat det samme, men på en måte som er mye enklere å huske. Summene på denne siden kalles **fourierrekker**, og a_n , b_n og c_n kalles **fourierkoeffisientene**.

6 Den komplekse varianten er helt klart lettest å utlede. Vis at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

og bruk dette til å forklare at dersom

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{er} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt.$$

⁵Jeg sier "ingeniør", for vi matematikere kan ikke alltid mene dette i fullt alvor. Dette kommer vi tilbake til mot slutten av semesteret.

Alt som står på forrige side, kalles **fourieranalyse**. Dette er kjempeviktig. Fourieranalyse brukes i fysikk, signalprosessering, bildebehandling, sannsynlighetsregning, kryptografi, akustikk, proteinstrukturanalyse, telekommunikasjon, tallteori, og mye mye annet. Diskomusikk, spektroskopi og strømprisprediksjon hadde vært utenkelig uten fourieranalyse. Poenget er at

$$\begin{aligned} \text{den infernalske klarinettaktige pipelyden } f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} e^{(2n-1)it}. \end{aligned}$$

Leddene

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

kalles **overtoner**, for det er faktisk det det er. Man sier også **dei overharmoniske**. Alle som har spilt et blåseinstrument vet at dersom man trykker inn noen klaffer eller ventiler, holder dem og så bare regulerer tonehøyden med leppetrykket, får man ut et bestemt sett med frekvenser som kalles naturtonerekken. Dette kalles å "spille på overtoner", og er også mulig å få til bare med buen på et strykeinstrument, men vanskeligere å få til. Bruker du venstrehanden til å dempe bestemte overtoner på et strengeinstrument, kalles det "flageolett".⁶ Du kan lese om firkantbølgen her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave

Merk spesielt det lydsporet som legger på nye overtoner hvert sekund:

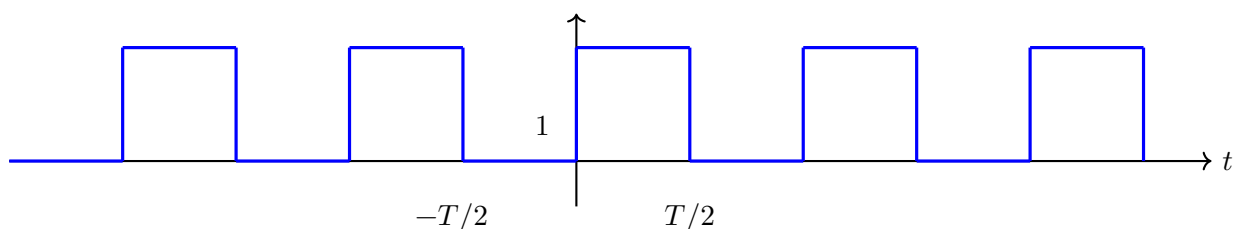
https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wave#Characteristics_of_imperfect_square_waves

Det begynner med en behagelig sinustone, og så blir det mer og mer infernalsk og klarinettaktig etterhvert som overtonene slenges på.

Alt dette er forresten oppkalt etter Joseph Fourier.⁷ Han satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han oppfant også det vi nå kaller fourierrekker, men i forbindelse med arbeid på varmelikningen, ikke periodiske signaler. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om til ammunisjon under andre verdenskrig. La oss nå regne ut noen flere fourierrekker. Firkantbølgen er den T -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T/2 \end{cases}$$

og ser sånn ut:



- [7] Finn den reelle og den komplekse fourierrekken til firkantbølgen og plot partialsummer i python for å dobbeltsjekke at du har regna riktig.

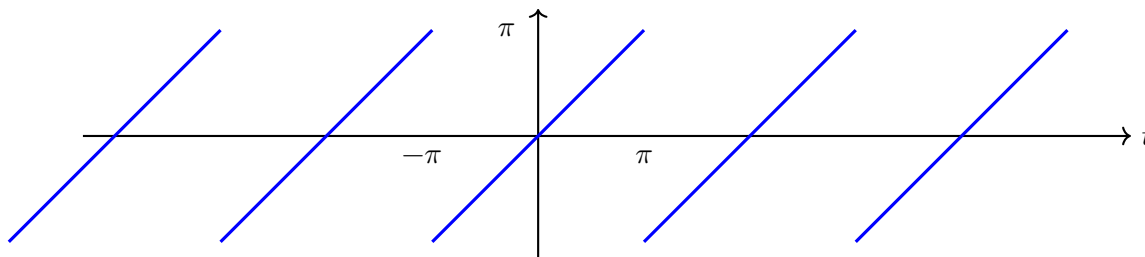
⁶Å spille på naturtonerekken er av en eller annen grunn legitimt på messinginstrumenter, men ikke på treblåsinstrumenter. Jeg har prøvd å spille fagott en gang og det var grusomt, for man måtte slå opp i en svær tabell hver gang man skulle lære en ny tone.

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier

Nå har du forhåpentligvis skjønnet poenget med T og ω , så på de neste to setter vi $T = 2\pi$ så det ikke blir så mye griseri. Sagnetannbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = t$$

og ser sånn ut:



- 8 Finn den reelle og den komplekse fourierrekken til sagnetannbølgen.

(Tips: Det kan være lurt å splitte integralet

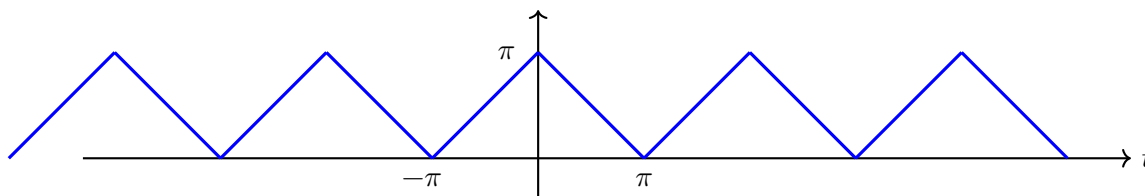
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt - i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \right)$$

og utnytte at $f(t) = t$ er en odde funksjon. Da blir regningen litt enklere.)

Trekantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

og ser slik ut:



Mange ingeniører vil uten å kjenne noen smerte påstå at firkantbølgen er den deriverte til trekantbølgen, og matematikere river seg i håret av slikt. Men det går bra, du kan tenke slik om du vil.

- 9 Finn fourierrekken til trekantbølgen og plott på intervallet $[-5\pi, 5\pi]$.

(Tips: Her kan det likeledes være lurt å utnytte at f er en jevn funksjon.)

- 10 Etter å ha gjort de to siste oppgavene, vil du kanskje sette pris på formlene

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

for $n \in \mathbb{N}$. Utled.

(Hint: lettest ved å se på formlene for fourierkoeffisientene.)

Nå kan vi faktisk løse differensiallikningene vi startet med og mer til. Det enkleste er vel å laplacetransformere, og få

$$sX + \frac{1}{RC}X = \frac{1}{RC}F$$

og observere at transferfunksjonen eller systemfunksjonen eller overføringsfunksjonen eller hva det nå heter er

$$H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

slik at frekvensresponsen blir

$$H(i\omega) = \frac{1}{RCi\omega + 1}.$$

og

$$\begin{aligned} \text{mykere pipelyd } y(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H(i(2n-1))}{2n-1} e^{(2n-1)it} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(RCi(2n-1) + 1)} e^{(2n-1)it}. \end{aligned}$$

Her satte jeg $\omega = 1$ for at det ikke skulle bli så mye griseri, men du kan finne uttrykket for vilkårlige ω ved å ta rekken fra oppgave 7 og bruke transferfunksjonen på samme måte.

- 11 Finn elsys-student og bruk digilenten til å kjøre et klokkesignal gjennom et lavpassfilter. Det finnes visst en funksjon som gjør at man kan lytte til resultatet.

Nå ser vi for øvrig hvorfor kretsen kalles et lavpassfilter. Et raskt blikk på transferfunksjonen viser at den helt klart demper høye frekvenser mer enn lave.

- 12 Plott amplituden til overtonene til x og f , altså absoluttverdiene av koeffisientene mot $\mathbb{Z}$.

Vi kaller $|c_n|$ **amplituden** til overtone nummer n , og $\arg c_n$ for **fasen**. Likeledes kaller vi $|H|$ for **amplituderresponsen** og $\arg H$ for **faseresponsen**. Tidlig i elektrostudiet er de mest opptatt av amplituderresponsen, mens i impedansspektroskopi er det visst faseresponsen som gjelder.

- 13 Regn ut amplitude- og faserespons til Professor Lies lavpassfilter.

Fourierrekker er den matematiske beskrivelsen av funksjonene til det vi på folkemunne bare kaller "frekvenser". Dette er så fundamentalt for fysikk- og kjemiforståelse at det ikke er så godt å vite hvor man skal begynne om man skal fortelle om det:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Spectroscopy>

Atomer og molekyler oppfører seg i bunn og grunn ikke ulikt Professor Lies filter:

https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_line

og absorpsjonsspekteret til hydrogenatomet var en av de observerte fenomenene som ledet til kvantemekanikkrevolusjonen på 1920-tallet. Dette tar en stund å bli vant til, men Feynman forklarer det ganske folkelig:

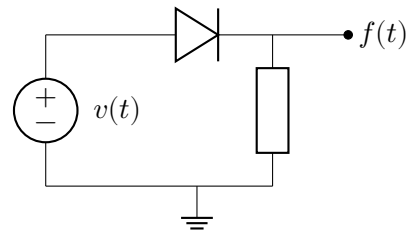
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/III_toc.html

Fourieranalyse er et smart inngangssteg dersom man ønsker å få en illusjon av forståelse for kvantemekanikkformalismen. Vi skal studere Schrödingers berømte likning om noen uker.

- 14 Regn ut temperaturen i Professor Lies gjæringsdunk dersom han setter tanken ut og inn med perioden T . Du kan anta $x(0) = 20$.

UKENS NØTTER

Følgende krets kalles en **halvbølgelikeretter**. Denne er essensiell når noe som trenger likespenning skal forsynes med strøm fra stikkontakten i veggen, som leverer vekselspanning.



Dersom du mater inn et periodisk signal gitt ved

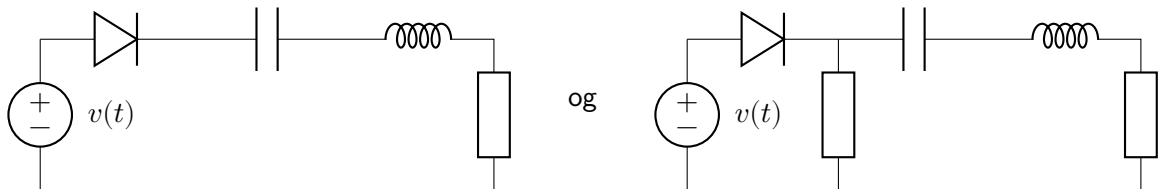
$$v(t) = \sin 100\pi t,$$

(strømmen i veggen har grunnfrekvens 50 Hz) blir utsignalet den $\frac{1}{50}$ -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{100} \leq t \leq 0 \\ \sin 100\pi t & 0 < t < \frac{1}{100} \end{cases}$$

- 1 Finn fourierrekken til x og sett opp en likning for kretsen.

Disse kretsene kalles **frekvensfordoblere**:



om du vil.

- 2 Sett opp differensiallikninger for kretsene. (Den siste er ganske hårete.) Sett opp kretsene på brødbrettet eller kjør numerisk differensiallikningsløser i python, send inn noen frekvenser og se hva som skjer. Den ene av dem er bra og den andre er dårlig. Hvilken er bra?



2 - 4 - INDREPRODUKTROM I

Hvis jeg skulle oppsummere alt vi har gjort til nå dette studieåret med så få ord som mulig, ville det kanskje blitt *snedige triks med eksponensialfunksjonen*. Det meste av det vi har gjort har vært tuftet på det faktum at derivasjon er en lineæroperator og eksponensialfunksjonen dens egenvektor. Resten av semesteret skal vi egentlig bare spinne videre på denne ideen, men inkludere én idé til - **ortogonalitet**. I forrige økt så vi nemlig at eksponensialfunksjoner kan være ortogonale:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

For å komme igang med det, må vi studere **skalarproduktet**. I $\mathbb{R}^2$ er dette gitt ved

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Lengden til en vektor $\mathbf{x}$ skrives

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

og vi sier at vektorer i $\mathbb{R}^2$ er ortogonale dersom $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Grunnen er følgende oppgave:

1 Vis at

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

der θ er vinkelen mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

(Hint: Tegn opp $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, og bruk cosinussetningen.)

På skolen lærte du noe de antagelig kalte **Pytagoras' setning**, som sier noe om katetene og hypotenusen i en rettvinklet trekant. En mer solid, abstrakt og presis variant sier at



$\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale hvis og bare hvis $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$



Dette følger direkte av definisjon av skalarproduktet. Vi beregner først

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Dersom $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ kan vi trekke denne fra likningen over og se at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Dersom $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, får vi $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. Implikasjonen går altså begge veier.

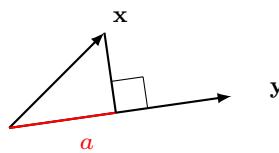
2 Denne kan komme på eksamen.



På skolen lærte du at om du ville ha en vektors komponent i en eller annen retning, ganget du med cosinus til vinkelen mellom vektoren og retningen. Det er smoothere å bruke skalarproduktet. Skalarproduktet $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ forteller oss noe om $\mathbf{x}$ sin komponent i retningen til $\mathbf{y}$.

- 3 Vis at $a = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$ i denne figuren:

(Hint: Bruk oppgave 1.)



Fra figuren bør det være geometrisk åpenbart at $|a| \leq \|\mathbf{x}\|$.

- 4 Bruk dette til å utlede **Cauchy-Schwarz' ulikhet**:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Man kan spinne videre på Cauchy-Schwarz' ulikhet og utlede **trekantulikheten**

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

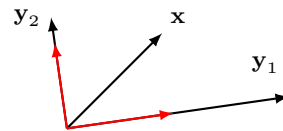
- 5 Hint: bruk Cauchy-Schwarz på $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2$.



6 Vektorene y_1 og y_2 er ortogonale. Vis at

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1} \mathbf{y}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2} \mathbf{y}_2$$

(Hint: Bruk samme resonnement som når du utledet formel for fourierkoeffisienter i de foregående ukene.)



Vektoren

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{y}$$

kalles $\mathbf{x}$ sin **ortogonale projeksjon** på $\mathbf{y}$. Vi kan skrive denne som $\mathbf{z} = P\mathbf{x}$ der P er noe som kalles en **projeksjonsmatrise**, men da må vi først lære en ny matriseoperasjon. Den kalles **transponering** og består i å speile en matrise om diagonalen, altså bytte om rader og kolonner:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Den som husker matrisemultiplikasjon bør nå umiddelbart se at dersom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er kolonnevektorer, kan skalarproduktet skrives

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Fra nå av kommer jeg konsekvent til å bruke denne notasjonen, selv om den er litt tyngre å lese om man ikke er vant til den. Det frigjør prikken $\cdot$ til vanlig multiplikasjon mellom skalarer, og dette vil paradoksalt nok hjelpe deg til å lese hva som er vanlig multiplikasjon og hva som er skalarprodukt.

7 Finn et uttrykk for P slik at $P\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \mathbf{y}$.

Hint: Matrisen $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ kalles **ytproduktet** mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.¹ Bruk denne.

Ortogonal projeksjon er en lineæroperator. Du kan tenke på projeksjonen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{y}$ som skyggen $\mathbf{x}$ kaster på $\mathbf{y}$ dersom du står uendelig langt vekk og lyser ortogonalt ned på $\mathbf{x}$ med en lommelykt. Ortogonal projeksjon er noe av det viktigste du skal lære i matematikken. Følgende oppgave illustrerer hvor enkelt ting blir når vektorer er ortogonale.

8 Finn løsningen til systemet
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -7 \end{array}$$



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Outer_product

Nå var antagelig ryggmargsrefleksen din å gausseliminere, men i dette tilfellet er det ikke nødvendig, det finnes en vakrere teknikk. Skalarproduktet mellom kolonnevektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ er

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

og vi definerer vektorer som ortogonale dersom skalarproduktet mellom dem er null.

- 9 Beregn skalarproduktet mellom kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hva skjer om du ganger begge sider av likningssystemet i oppgave 8 med A^T fra venstre?

Vi sier at en vektormengde er **innbyrdes ortogonal** dersom alle indreprodukter mellom forskjellige vektorer i mengden er null. Det hadde nå vært fristende å kalle A over en ortogonal matrise, men det begrepet er noe mer restriktivt. Dette kommer vi tilbake til.

- 10 Vis at vektorene i en innbyrdes ortogonal vektormengde må være lineært uavhengige så lenge ingen av dem er nullvektoren.

Derav konseptet **ortogonal basis**. Kolonnene i A er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$. Ortogonale basiser er praktiske på veldig mange måter. Det er for eksempel lett å dekomponere en vektor $\mathbf{x}$ i en ortogonal basis:

$$\mathbf{x} = \sum_k \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$$

- 11 Vis dette. (Hint: Det er nå sikkert femte gang i vår du gjør akkurat det samme resonnementet; skriv

$$\mathbf{x} = \sum_k c_k \mathbf{v}_k$$

prikk i vei med $\mathbf{v}_k$ og bruk ortogonaliteten.)



Likningssystemer blir veldig greie når kolonnene er ortogonale. Oppgaven under gjør egentlig nøyaktig det samme som forrige oppgave, men det er nå greit å se ting fra litt forskjellige sider.

12 La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

og meditér over oppgave 8 og 9 helt til du innser at komponenten x_k i løsningen $\mathbf{x}$ kan beregnes ved formelen

$$x_k = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k}$$

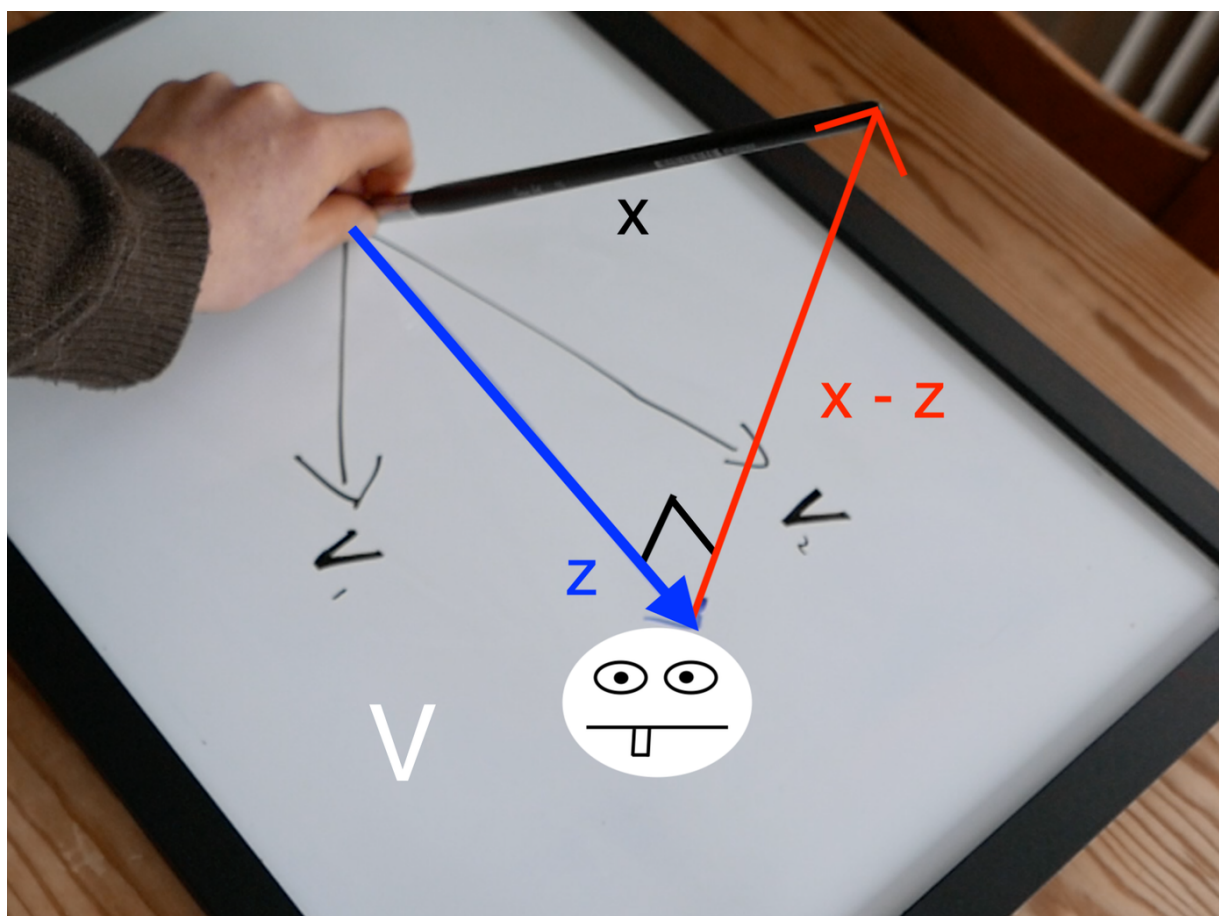
siden kolonnene i matrisen er en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$.

(Hint: Hva skjedde når du ganget med A^T ?)

Nå begynner vi snart å bli i stand til å takle følgende problem. La oss si at du står uendelig langt vekke og lyser med lommelykt ortogonalt ned på vektoren $\mathbf{x}$ og lurar på hvordan skyggen ser ut i rommet V utspent av basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, altså hva er den ortogonale projeksjonen $\mathbf{z}$ av $\mathbf{x}$ ned på dette rommet?

13 Klarer du å finne et uttrykk for $\mathbf{z}$?

(Hint: Prøv å se for deg hva som skjer når du projiserer på $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ i figuren. Ta gjerne et ark og tegn opp selv og bruk noen blyanter eller noe.)



Hvordan man gjør oppgave 13 avhenger litt av hvorvidt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er en ortogonal basis eller ikke. I figuren er ikke $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale, og hva vi gjør da skal vi komme tilbake til senere i semesteret. Dersom vi har ortogonal basis er alt veldig enkelt, det er bare å projisere i vei:

$$\mathbf{z} = \sum_k \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k$$

Måten man ser dette på, er å vise at $\mathbf{z}$ er den vektoren i V som minimerer avstanden $\mathbf{x} - \mathbf{z}$. Først kan vi se at $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ står ortogonalt på V , siden

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{z})^T \mathbf{v}_m &= \mathbf{x}^T \mathbf{v}_m - \mathbf{z}^T \mathbf{v}_m \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{v}_m - \left(\sum_k \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k} \mathbf{v}_k \right)^T \mathbf{v}_m \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{v}_m - \mathbf{x}^T \mathbf{v}_m = 0 \end{aligned}$$

for alle $\mathbf{v}_m$. Dersom $\mathbf{y}$ er en annen vektor i V , ligger også $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ i V , og da står $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ og $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ ortogonalt på hverandre. Pytagoras' setning med retningen på $\mathbf{y}$ byttet om ² gir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z} - (\mathbf{y} - \mathbf{z})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2. \end{aligned}$$

for alle $\mathbf{y} \in V$.

14 Denne kan komme på eksamen, og nå tror jeg vi gir oss for denne uken.

UKENS NØTTER

1 En generell projeksjonsmatrise P er definert ved likningen

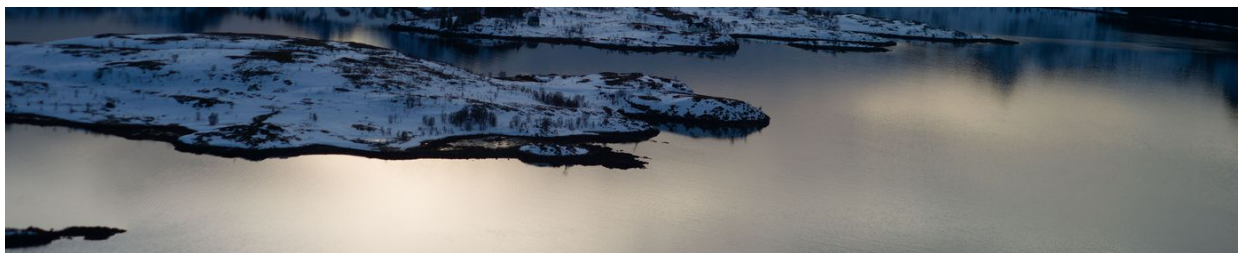
$$P = P^2$$

Denne likningen sier at det ikke skjer noe nytt om man benytter projeksjonen for andre gang. Vis at egenverdiene til P kun kan være 0 eller 1.

2 En generalisering av Pytagoras gjelder for ikke-rettvinklede trekanter, og kalles **cosinussetningen**. Den sier at dersom vinkelen mellom beina med lengde a og b er θ istedet for $\pi/2$, er

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2.$$

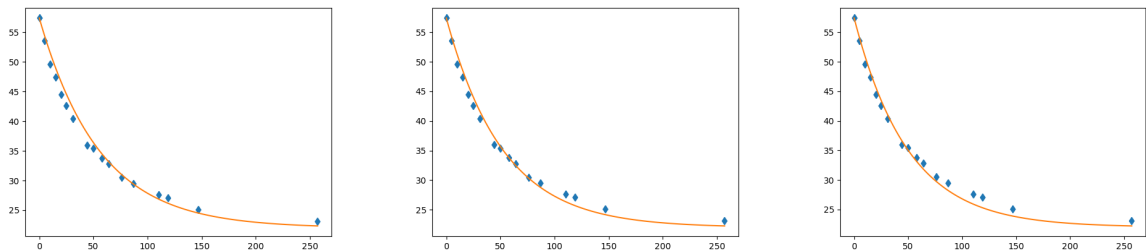
Utleid denne.



²beviset for denne er identisk i $\mathbb{R}^n$

2 - 5 - REGRESJON

På begynnelsen av 1800-tallet oppdaget Giuseppe Piazzi asteroiden Ceres, men han ble syk, og så forsvant Ceres bak solen. Når man skulle lete den opp igjen på andre siden av solen litt senere, var det ikke så godt å vite den nøyaktige posisjonen, men Gauss kastet seg over problemet, og klarte å spå temmelig presist hvor den kom til å dukke opp. Han oppfant i den forbindelse **minste kvadraters metode**.¹ Dette er et av standardverktøyene i kofferten, og vi har allerede hatt bruk for det. Hvis du går helt tilbake til oppgave 15 i økt 1-1 i TMA4101, ser du et plot av noen målte temperaturer og en tilpasset kurve fra Newtons avkjølingslov. Her ser du det samme datasettet (diamanter) og Newtons avkjølingslov (heltrukken) for tre forskjellige α :



Hvilken α er “riktig”? Det er klart at vi ikke kan forvente perfekt match, for Newtons avkjølingslov er en grov modell. Hva som er “riktig” α kommer an på hva vi mener med “riktig”, og en definisjon av “riktig”, er gitt av minste kvadraters metode.

For å forstå minste kvadraters metode, må vi først forstå funksjoner av to variable. En funksjon av to variable skrives

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{eller} \quad f(x_1, x_2).$$

og du tenker på $\mathbf{x}$ som en gps-koordinat og på $f(\mathbf{x})$ som den korresponderende høyden over havet. Dette er enklest å komme igang med om du er vant til å lese kart. Et kart er en todimensjonal representasjon av et tredimensjonalt terreng, og med litt trening leser man dette omtrent like godt som om man så terrenget med sine egne øyne, eller faktisk bedre.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares

De brune linjene på kartet kalles **ekvidistanselinjer** eller **høydekoter**. Disse forteller noe om høyden over havet; dersom du følger en ekvidistanselinje, går du hverken opp eller ned. Den matematiske ekvivalenten kalles **nivåkurve**. Disse er gitt ved

$$c = f(\mathbf{x}),$$

og forskjellige verdier for c gir forskjellige høyder over $\mathbf{x}$ -planet.

1 Skisser nivåkurvene til

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$$

Et polynom i to variable er gitt ved

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k,m} a_{km} x_1^k x_2^m$$

Dersom $k + m \leq n$ og $k + m = n$ for minst en kombinasjon av k og m , sier vi at polynomet har orden n . For eksempel er et generelt førsteordens polynom gitt ved

$$p(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0.$$

Grafen til denne blir alltid et plan i $\mathbb{R}^3$. Et generelt andreordens polynom er gitt ved

$$p(\mathbf{x}) = a_{20} x_1^2 + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0$$

Nivåkurvene til andreordens polynomer er de berømte kjeglesnittene.² Parabolen ($x_2 = x_1^2$) og sirkelen ($\|\mathbf{x}\| = 1$) kjenner du fra før. For en generasjon siden måtte sivingstudenter kunne alle disse på fingrene, men idag fokuserer vi mer på andre ting. Ellipsen³ med halvaksler a og b og sentrum i y kan være grei å kjenne til, den skal vi få litt bruk for:

$$\frac{(x_1 - y_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{b^2} = 1$$

Finn og skisser nivåkurvene til flatene gitt ved

$$\mathbf{2} \quad z = 4x_1^2 + 5x_2^2.$$

$$\mathbf{3} \quad z = 4x_1^2 + 8x_1 + 5x_2^2 - 10x_2 + 9.$$

Et klassisk polynom av to variable er den ideelle gasslov. Du kan tenke på denne enten som en empirisk lov som sakte men sikkert ble oppdaget på 1600-tallet og utover via Boyles lov, Charles lov, Avogadros lov og Gay-Lussacs lov, eller som en utledet regel i statistisk mekanikk.⁴ Den sier at i en ideell gass følger trykket p , temperaturen T og volumet V formelen

$$\frac{pV}{T} = nR = Nk,$$

der

$$k = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K er Boltzmanns konstant}^5$$

$$R = 8.31446261815324 \text{ J/mol K er den ideelle gasskonstant}$$

²https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

³<https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant

N er antall gassmolekyler

n er antall mol gassmolekyler
(husk at $N = N_A n$, der $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23}$ /mol er Avogadros konstant)

Hvis man liker bedre statistisk mekanikk, kan man skrive

$$\frac{3}{2} \frac{pV}{N} = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m v^2$$

der v^2 er forventningsverdien til kvadratet av den χ -fordelte partikkelhastigheten.⁶ La oss for enkelhets skyld sette $Nk = 1$ og skrive den ideelle gasslov slik:

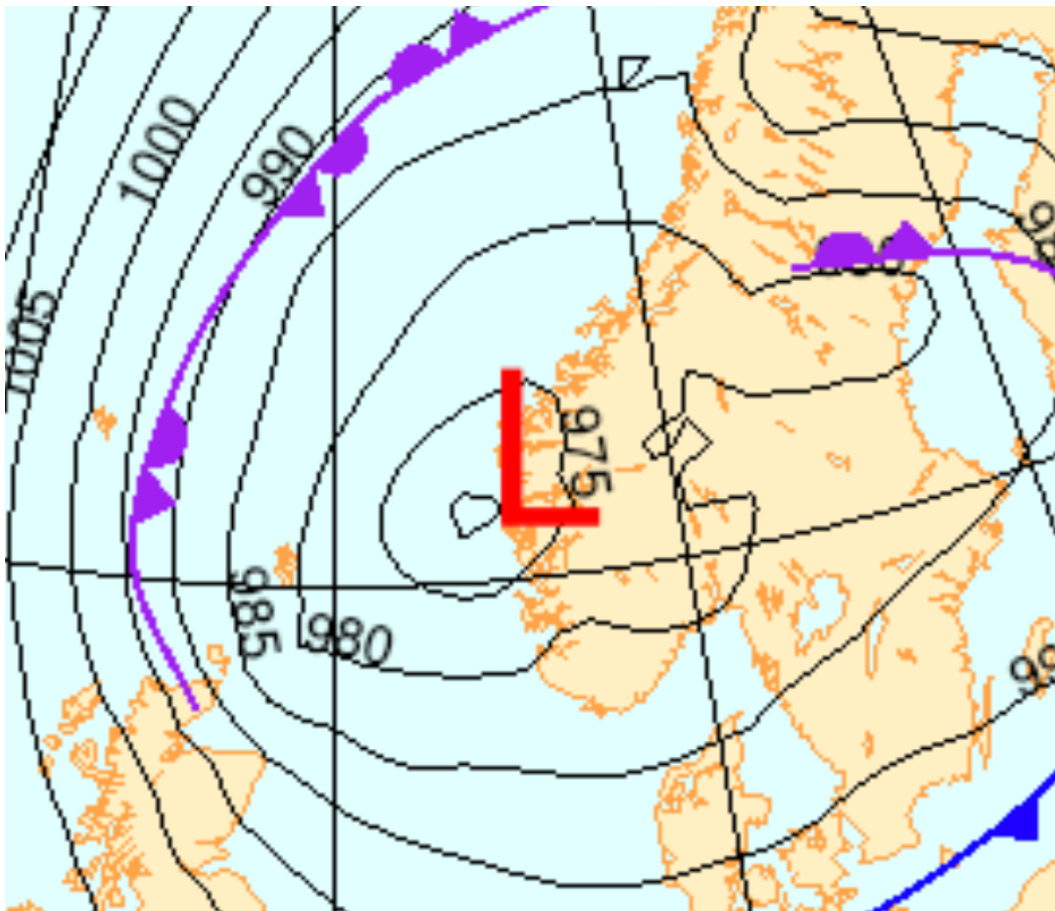
$$T(p, V) = pV$$

Siden både trykk og volum ikke kan være negative størrelser, er det naturlig å tenke at T er en funksjon fra $(0, \infty) \times (0, \infty)$ til $(0, \infty)$. I termodynamikk kalles nivåkurvene til T **isoterm**er siden T er konstant på dem.

- 4 Skisser isotermene til den ideelle gasslov, og plot $T(p, V)$ i python.

Nivåkurvene til trykk kalles **isobarer**.

- 5 Hva er trykket på Steinkjer denne dagen?⁷



⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution

⁷<https://www.met.no/vaer-og-klima/meteorologens-prognosekart>

Vi har nå to uavhengige variable, og det er interessant å vite hvordan f endres med hensyn på begge. Derfor finnes det to deriverte. De er

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + h) - f(x_1, x_2)}{h}$$

og uttales henholdsvis “ f derivert med hensyn på x_1 og x_2 ”. Å partiellderivere er enkelt; man finner $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ved å betrakte x_2 som en konstant, og så derivere i vei med hensyn på x_1 . Samme for x_2 . Finn de partiellderivate til

$$\boxed{6} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2.$$

$$\boxed{7} \quad T(p, V) = pV$$

De partiellderivate angir stigningen i koordinatretningene. Står du i et punkt og peker skiene rett øst er stigningen gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ og peker du dem rett nord er den gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x_2}$. Vi setter de partiellderivate sammen i en radvektor som kalles **gradienten**:

$$f' = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

Dersom du peker skiene i en annen retning enn øst eller nord, finner du stigningen ved å prikke gradientvektoren med en enhetsvektor i retningen til skiene; dette kalles **retningsderivert**. Skjønner du retningsderivert og skalarproduktet, bør det være klart at gradienten også angir den bratteste retningen i terrenget, altså den retningen du må peke skiene hvis du skal gå rett oppover.

$\boxed{8}$ Finn gradientvektorene til funksjonene i oppgave 6 og 7.

$\boxed{9}$ Finn stigningen på fjellsiden $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$ når du står i punktet $(1, 2)$ og skiene peker rett nordvest.

$\boxed{10}$ Hvilken vei må du peke skiene dersom du vil gå langs med en ekvidistanselinje?

$\boxed{11}$ Hva om du vil kjøre rett utfor så bratt som mulig?

Hvis du skjønnte alt dette, er det forhåpentligvis innlysende for deg at om du står på toppen av et fjell, er stigningen null uansett hvilken retning du peker skiene. Dersom fjellet er deriverbart, skjer dette kun dersom gradienten er nullvektoren:

$$f' = (0, 0).$$

$\boxed{12}$ Finn toppunktet til fjellet gitt ved $z = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 + x_1 + x_2$.

Det sies ellers at skisportens vugge er et eller annet sted i Telemark. Tull og tøys. Ski er visst en kinesisk oppfinnelse.⁸



⁸<https://secretsoftheice.com/news/2018/10/04/skis/>

Nå er vi i posisjon til å introdusere minste kvadraters metode. Studass Hausken gikk over en blomstereng en gang. Blomsterengen inneholdt n blomster med koordinater (x_k, y_k) der k løp fra 1 til n , og Hausken syntes det var praktisk å organisere disse koordinatene i to vektorer:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Blomstene duftet godt, så Hausken ønsket å gå gjennom engen på en rett linje slik at duftopplevelsen ble maksimert. Han tenkte det var best å summere opp kvadratet av den vertikale avstanden fra hver blomst til den rette linjen

$$y = \beta_1 x + \beta_0$$

og så minimere denne summen:

$$\begin{aligned} f(\beta_1, \beta_0) &= \sum_{k=1}^n (\beta_1 x_k + \beta_0 - y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\beta_1 x_k + \beta_0 - y_k)(\beta_1 x_k + \beta_0 - y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (\beta_1^2 x_k^2 + \beta_0^2 + y_k^2 + 2\beta_1 \beta_0 x_k - 2\beta_1 x_k y_k - 2\beta_0 y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_1^2 x_k^2 + \sum_{k=1}^n \beta_0^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + \sum_{k=1}^n 2\beta_1 \beta_0 x_k - \sum_{k=1}^n 2\beta_1 x_k y_k - \sum_{k=1}^n 2\beta_0 y_k \\ &= \beta_1^2 \|\mathbf{x}\|^2 + n\beta_0^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\beta_1 \beta_0 n\bar{x} - 2\beta_1 \mathbf{x}^T \mathbf{y} - 2\beta_0 n\bar{y} \end{aligned}$$

Slik oppfant han den enkleste formen for **regresjon**.⁹ Jeg har bevisst tatt med dette slik at du skal forstå at matrisemultiplikasjon vil spare deg for masse kronglete notasjon i TMA4245.

- 13 Siden f er en positiv kvadratisk funksjon av β_1 og β_0 , er rimelig klart at det må finnes et bunnpunkt et eller annet sted. Sett gradienten til f lik null, og utled uttrykkene for **regresjonskoeffisientene**

$$\beta_1 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y} - n\bar{x}\bar{y}}{\|\mathbf{x}\|^2 - n(\bar{x})^2} \quad \text{og} \quad \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$



⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_regression

Regresjon betyr å finne en kurve som “passer til” datasettet på en eller annen måte. Det alle lærer først er å finne det første ordens regresjonspolynomet ved minste kvadraters metode, fordi dette er enklest, og fordi man ofte lurer på om det finnes en rettlinjet avhengighet mellom to størrelser. Denne type regresjon er **lineær**, siden uttrykket over er lineært i β_1 og β_0 . Variabelen x kalles **forklaringsvariabelen**, og y kalles **responsvariabelen**. Husk at korrelasjon ikke impliserer kausalitet!¹⁰

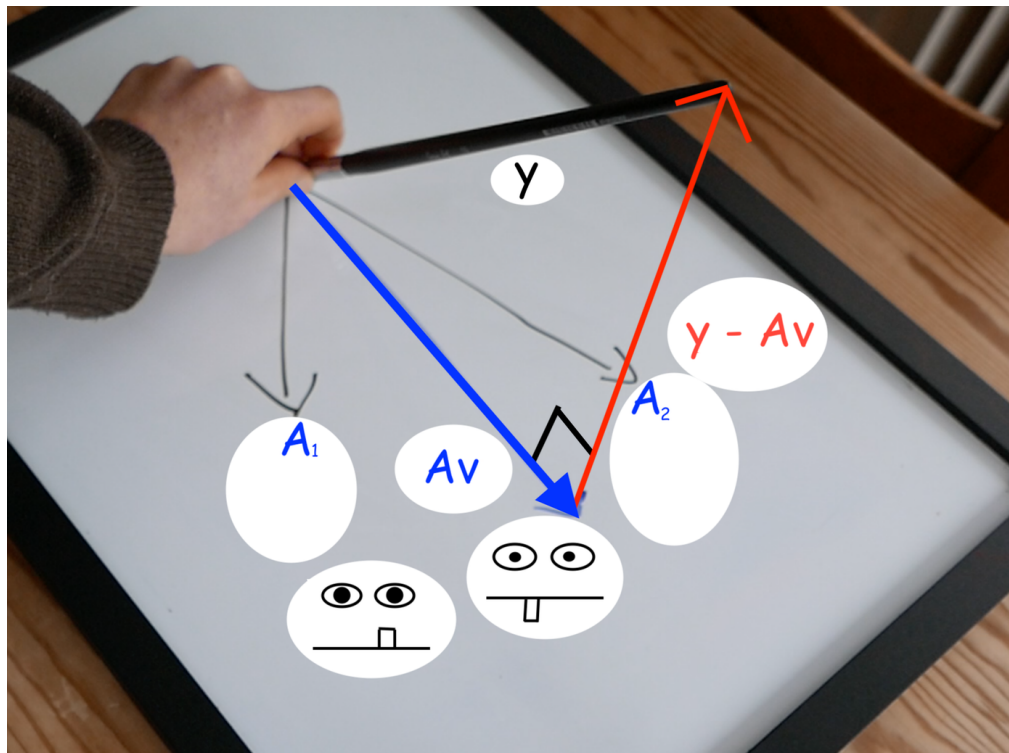
Uttrykket for regresjonen over kan utledes på en annen måte. Du husker kanskje hvordan vi polynominterpolerte i TMA4101. Hvis vi krever at det første ordens polynomet skal reise gjennom alle datapunktene, får vi n likninger:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 x_1 + \beta_0 \\ y_2 &= \beta_1 x_2 + \beta_0 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_1 x_n + \beta_0 \end{aligned}$$

Det sier seg selv at dette ikke har noen løsning med mindre korrelasjonen er perfekt, altså at punktene virkelig ligger på en rett linje. På matriseform blir likningssystemet $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$, der

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

- 14 Gang likningssystemet med A^T fra venstre og løs for $\mathbf{v}$. Hvis du regner riktig, skal du få det samme som i forrige oppgave.
(Se figur for geometrisk tolkning. Kolonnene i A kalles A_1 og A_2 .)



¹⁰<https://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

Hvis du tar et overbestemt likningssystem og ganger med den transponerte av systemmatrisen fra venstre og løser, løser du noe som kalles **normallikningene**. Grunnen er enkel. Systemet

$$A^T A \mathbf{v} = A^T \mathbf{y}$$

kan like gjerne skrives

$$A^T (A \mathbf{v} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

og dette forklarer geometrisk hva som skjedde i forrige oppgave.

- 15 Hvis du skjønnte transponeringsoperasjonen og hvordan vi skriver skalarprodukt, bør det nå være klart at likningssystemet over krever at $A \mathbf{v} - \mathbf{y}$ står ortogonalt på alle kolonner i A . Dette betyr at vi velger $\mathbf{v}$ slik at avstanden mellom $A \mathbf{v}$ og $\mathbf{y}$ blir minimert; se figuren på forrige side.

Oppgaven over gjør i bunn og grunn det samme som oppgave 14 i forrige uke. Forskjellen er at kolonnene i A ikke er ortogonale; er de det kan vi regne ut $A \mathbf{v}$ slik:

$$A \mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}^T A_1}{A_1^T A_1} A_1 + \frac{\mathbf{y}^T A_2}{A_2^T A_2} A_2$$

Fordelen med å forstå den geometriske ideen bak normallikningene, er at man nå kan forstå hvordan man kjører regresjon basert på andre ting enn rette linjer. Man setter opp et lineært likningssystem, og så løser man normallikningene. Et kvadratisk regresjonspolynom skrives for eksempel

$$y = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0.$$

Merk at denne regresjonen også er lineær, siden uttrykket for det kvadratiske regresjonspolynomet er lineært i β_2 , β_1 og β_0 .

- 16 Finn det kvadratiske regresjonspolynomet til dette datasettet:

x	y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	1



Det går fint å regressere med andre typer funksjoner enn polynomer. Teknikken er den samme, minimer summen av kvadratene av avstandene mellom responsvariabelens datapunkter og regresjonskurven evaluert i de korresponderende datapunktene for forklaringsvariabelen. Jeg var på en hytte i Kragerø en gang og badet i en sirkulær badestamp med et sirkulært høl i bønn. Når jeg skulle tømme den, målte jeg vannstanden etterhvert som stampen tømtes, og fikk tabellen i margin. Hvis man ikke visste bedre, ville det kanskje være plausibelt å anta at utstrømningen er proporsjonal med vannhøyden, siden vanntrykk er proporsjonalt med vanddybde:

t (s)	h (cm)
0	48
10	38
20	28
30	20
40	14
50	8

$$\dot{h} = ah.$$

- 17 Finn h og estimér a . Hva med integrasjonskonstanten C ?

Ifølge fysikkboken er det Torricellis lov som gjelder:

$$h(t) = h_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \quad T = \frac{V_0}{A} \sqrt{\frac{2}{gh_0}}$$

der g er tyngdeakselerasjonen, V_0 er vannvolumet ved t_0 og A er arealet til tappehullet.¹¹

- 18 Radien til stampen var om lag en meter, men jeg målte aldri tappehullet. Hvor stort var det?
- 19 Torricellis lov sier jo at h skal være en parabel. Kjør vanlig andreordens polynomregresjon på datasettet (slik som i oppgave 16), og sammenlikne med forrige oppgave.

I eksemplet denne økten startet med, er temperaturmålingene

`np.array([57.4,53.6,49.6,47.4,44.5,42.6,40.4,36.0,35.4,33.8,32.8,30.5,29.5,27.6,27.1,25.1,23.1])`

og måletidspunktene (i minutter etter start)

`np.array([0,5,10,15,20,25,31,44,50,58,64,76,87,110,119,147,257])`

- 20 Estimer α ved minste kvadraters metode. Temperaturen i omgivelsene var 22 grader.



¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Torricelli's_law

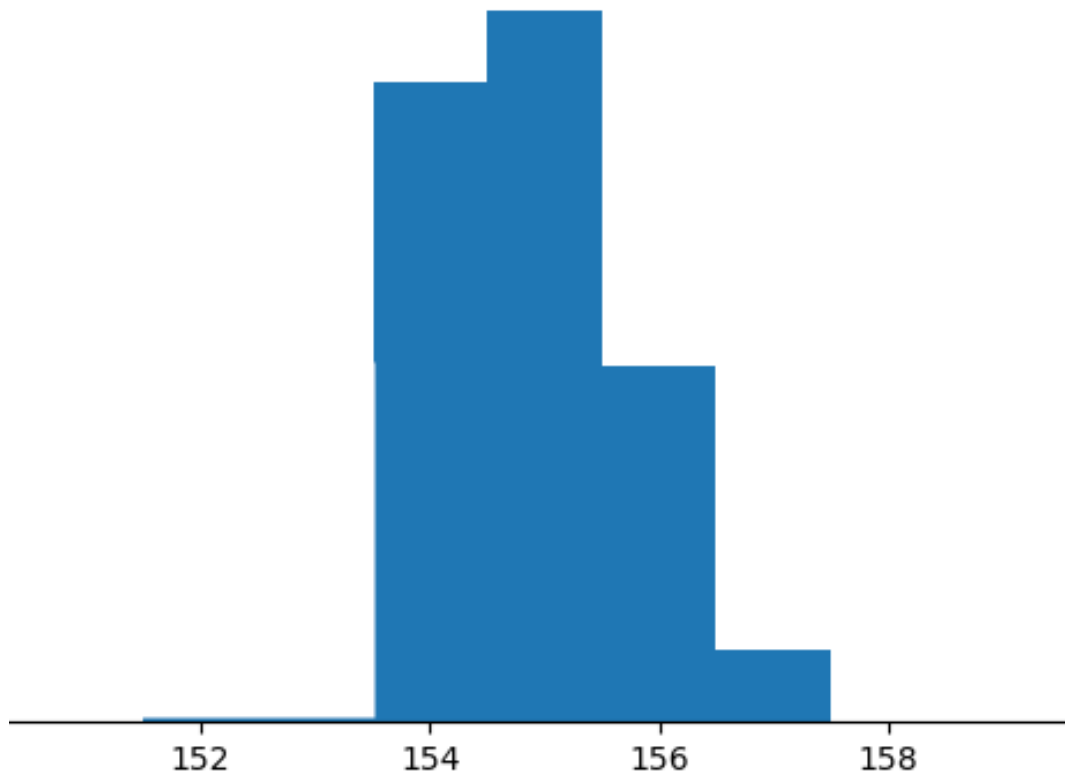
UKENS NØTTER

Forestill deg at du har et måleapparat og at du måler en normalfordelt størrelse, men så vet du at den ene halen i normalfordelingen er under deteksjonsgrensen for måleapparatet.^a Hvis du nå ønsker å estimere μ og σ , kan du ikke ta gjennomsnitt og empirisk standardavvik, for gjennomsnittet vil treffe for høyt og det empiriske standardavviket for lavt.

- 1 I datasettet over bredden på kaibordene fra integraløkten i TMA4101 har jeg her tatt ut de laveste målingene (tre bord på 153 og et på 152). Finn estimater for μ og σ i normalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

ved å kjøre minste kvadraters metode. Det blir et ikkelineært problem; det enkleste er nok å implementere noe som heter “steepest descent method”, eller en av de andre liknende variantene som leter etter minimumspunkter til flervariabel funksjoner. (På springer finner du optimeringsboken til Nocedal og Wright. Den er grei å ha.)



^aFor eksempel ved at du prøver å finne høyden på den gjennomsnittlige nordmann med en målestokk som ikke kan måle kortere lengder enn 170cm.

1	154
2	154
3	
4	156
5	155
6	
7	154
8	155
9	
10	154
11	155
12	155
13	154
14	156
15	155
16	154
17	155
18	154
19	154
20	156
21	155
22	154
23	155
24	157
25	
26	155
27	156
28	155
29	156

2 - 6 - HVA ER EN KATT?

Nå skal vi se litt på hvordan lineæralgebra brukes i datahåndtering; så og si alt vi har lært dette året kommer til nytte. Vi skal ikke bry oss med “statistikk” som sådan, for i statistikk er man veldig opptatt av å skille mellom parametrene i sannsynlighetsmodellen som ligger til grunn og estimatorene man stapper dataene inn i (for eksempel gjennomsnitt eller empirisk standardavvik). Vi skal bry oss mest med lineæralgebraknepene.

- 1 Da må vi først observere noe gunstig om matriser med ortogonale kolonner. Finn den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

uten å gausseliminere - se heller på oppgave 9 i økt 2-4.

Vi sier at en reell matrise P er **ortogonal** dersom den har ortonormale kolonner, og da er enkelt og greit

$$P^{-1} = P^T.$$

Dersom en $n \times n$ -matrise A har n ortogonale egenvektorer sier vi derfor at A er **ortogonalt diagonaliserbar**, og skriver

$$A = P\Lambda P^T.$$

- 2 Finn den ortogonale diagonaliseringen til $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Vi sier at en reell matrise A er **symmetrisk** dersom $A = A^T$. I anvendelser er det veldig vanlig at det dukker opp symmetriske matriser. En reell matrise er ortogonalt diagonaliserbar hvis og bare hvis den er symmetrisk. Dette kalles **spektralteoremet**, og er ikke trivielt å vise, men det er heldigvis trivielt å huske.

- 3 Klarer du å ortogonalt diagonalisere $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?



Som du kanskje ser av oppgaven over, kan en symmetrisk matrise fint ha en ikke-ortogonal egenvektorbasis, men poenget er at du alltid kan finne en som er ortogonal. Hvordan vi finner en ortogonal diagonalisering for matrisen i oppgave 3 kommer vi tilbake til. Nå tar vi litt om datahåndtering. Det er en matrise som er veldig praktisk, nemlig kolonnevektoren

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er ikke helt uvanlig å skrive $\mathbf{1}_n$ for å indikere dimensjon, men vanligvis er dette overflødig.

4 Regn ut $\mathbf{1}^T \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \mathbf{1}^T$ og $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$.

I faktiske anvendelser er det vanlig å **sentrere** datavektoren $\mathbf{x}$ ved å lage en ny datavektor der man har trukket $\bar{x}$ fra alle komponentene i $\mathbf{x}$, og så jobbe med denne istedet. Med den nye vektoren $\mathbf{1}$ kan vi skrive den sentrerte variabelen som

$$\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix} = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) \mathbf{x}$$

Matrisen

$$C_n = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right)$$

kalles **sentreringsmatrisen** fordi den sentrerer $\mathbf{x}$. Vi sier at en lineæropoperator P er en **projeksjon** dersom $P^2 = P$. Dette betyr kort og godt at om du bruker lineæropoperatoren to ganger etter hverandre, skjer det ingenting når du bruker den for andre gang.

5 Vis at C_n er en projeksjon og finn gjennomsnittet til den nye sentrerte variabelen.



Med sentrerte variable blir livet greit. I økt 2-5 utledet du uttrykket

$$\beta_1 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y} - n \bar{x} \bar{y}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x} - n (\bar{x})^2} \quad \text{og} \quad \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

for koeffisientene til det rettlinjede regresjonspolynommet.

- 6 Dette ser mye penere ut om $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er sentrerte, og forklarer hvorfor noen sier at man “projiserer $\mathbf{y}$ på $\mathbf{x}$ ” når man kjører regresjon.

Skjønte du forrige side, kan du gå med på at sentrerte variable er lurt. La oss spinne videre litt. **Multippel regresjon** handler om at forklaringsvariabelen har flere dimensjoner. Du kan for eksempel tenke at du har målt sylindervolum $\mathbf{x}_1$ og vekt $\mathbf{x}_2$ på n biler, og så er responsvariabelen $\mathbf{y}$ drivstofforbruk per kilometer. Hvis du ønsker å tilpasse et første ordens regresjonspolynom i to variable, får du det overbestemte likningssettet

$$\mathbf{y} = \beta_{10} \mathbf{x}_1 + \beta_{01} \mathbf{x}_2 + \beta_0 \mathbf{1}$$

eller

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta_{10} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \beta_{01} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

og dette kan angripes med minste kvadraters metode slik som i forrige uke.

- 7 Regn ut formlene for regresjonskoeffisientene dersom $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ og $\mathbf{y}$ er sentrerte.

La oss anta du har n realiseringer av en p -dimensjonal tilfeldig variabel. Det er vanlig å sette disse opp i en $n \times p$ -matrise:

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_p \end{array} \right)$$

Tenk at du måler lengde, bredde og høyde på alle plankene i en plankestabel, og så sentrerer du hver av disse. Til slutt setter du alt opp i matrisen X på en slik måte at rad k er de sentrerte målene til planke k . Vi kaller $\frac{1}{n-1} X^T X$ den **empiriske kovariansmatrisen**, og den er en estimator for den antatte bakenforliggende kovariansmatrisen.¹

- 8 Vis at elementene i $\frac{1}{n-1} X^T X$ er den empiriske kovariansen mellom kolonnene i X .



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_of_covariance_matrices

Vi sier at en matrise A er **positivt definit** dersom

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$$

for alle $\mathbf{x}$, og **positivt semidefinit** dersom

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$$

for alle $\mathbf{x}$.

- 9 Vis at den empiriske kovariansmatrisen er positivt semidefinit.

I flervariabel statistikk finnes det noe som kalles **prinsipalkomponentanalyse**.² Dette er en teknikk for å lete opp akser i datamengden der samvariasjonen er sterk. Teknikken baserer seg på å projisere X inn på en retning $\mathbf{v}$ slik at den empiriske variansen til de resulterende punktene blir maksimert. Dette får man til ved å lete opp egenvektorene til de største egenverdiene til kovariansmatrisen.

- 10 Forklar hvorfor egenvektorene til $X^T X$ forteller om samvariasjonen mellom kolonnene i X . (Hint: Finn ut hva en "Rayleigh quotient" er.)³

I TMA4245 skal du også drive med liknende ting mot slutten av semesteret, se her:

<https://tma4245.math.ntnu.no/forventing-og-varians/korrelasjon/>

og her:

<https://tma4245.math.ntnu.no/forventing-og-varians/kovarians/>

- 11 Er det samvariasjon mellom høyde og bredde i kaibordene fra sommeren 2023?
<https://folk.ntnu.no/mortano/python/kai/kai.csv>

Noen ganger er det regnet som ugunstig dersom kolonnene i datamatriksen har veldig forskjellig lengde. Dette fikser vi ved å dele ut standardavviket i hver kolonne, akkurat som når man normaliserer vektorer ellers i lineær algebra.



²https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

³https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_quotient

Nå skal vi se at det er faktisk ikke nødvendig å gange datamatrisen med seg selv for å finne kovariansmatrisen. Det finnes noe enda mer sofistikert som heter SVD. La oss begynne med litt geometrisk fikling.

- 12 Skriv en rutine som tar inn $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ og plotter Ax for alle x på enhetssirkelen.

Fikk du til dette, vil du oppdage at koden din alltid produserer ellipser, ihvertfall så lenge A har lineært uavhengige kolonner. La oss finne ut mer om disse ellipsoidene. Trikset er å studere $A^T A$ og AA^T . Vi lar $n > p$, slik at A er høy og tynn og A^T er lang og flat. Dette er ikke noen essensiell restriksjon, men vi gjør den fordi det hjelper litt på visualiseringen.

- 13 Både $A^T A$ og AA^T er ortogonalt diagonaliserbare. Hvorfor?

Siden $A^T A$ er ortogonalt diagonaliserbar, finnes det et ortonormalt sett med egenvektorer. La oss sette disse opp i en ortogonal matrise V . Det samme gjelder for AA^T ; la oss sette disse egenvektorene opp i en ortogonal matrise U .

- 14 Hva er dimensjonene til $A^T A$, AA^T , V og U ?
Hvor mange av egenverdiene til AA^T kan være forskjellige fra null?

Her er enda en observasjon.

- 15 Vis at dersom v er en egenvektor til $A^T A$ med egenverdi λ , er Av en egenvektor til AA^T .
Hva er egenverdien? Kan du si noe om fortegnet?

Hvis du skjønnte forrige oppgave, skjønner du forhåpentligvis at $A^T A$ og AA^T har de samme egenverdiene så lenge du ser bort fra multiplisiteten til de egenverdiene som er null. La oss nå anta at v er en egenvektor til $A^T A$ med lengde 1.

- 16 Hva er lengden til Av ?

Lengden til Av kalles **singulærverdi**, og vi bruker bokstaven σ_k . Kolonnene i U og V kalles henholdsvis de **venstre og høyre singulærvektorene**. Hvis du tenker nøye på alt du har gjort til nå, vil du se at det går an å skrive

$$A = U\Sigma V^T$$

der σ -ene sitter i den rektangulære diagonalmatrisen Σ . Dette kalles **SVD-faktoriseringen**⁴ til A . Denne finnes alltid, og dersom du sorterer singulærverdiene i synkende rekkefølge (σ_1 er størst) og velger alle positive, er Σ entydig. De unitære matrisene U og V vil ikke nødvendigvis være entydige, men de er det i noen tilfeller.

- 17 Hvordan ser Σ ut? Finn svd-faktoriseringen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Singulærverdidekomposisjonen er en av de viktigste matrisefaktoriseringene. Har du den har du mye, og pythonkommandoen heter `numpy.linalg.svd`. Nå skal vi se litt på hva svd kan brukes til. Det

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

første er kompresjon. Vi kan skrive A slik:

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^* + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^* + \sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^* + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^*$$

der r er antallet singulærverdier som ikke er null. Vi ser nå at dersom det bare er to av singulærverdiene som er over for eksempel maskinpresisjon, er all informasjon i matrisen inneholdt i uttrykket

$$A = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2^*.$$

- 18 La oss lage et bilde av en katt. Lag deg en matrise A i python med tilfeldige tall mellom -1 og 1. Dette er bakgrunnen. Sett så ett element til 10 eller 100 eller noe sånt. Dette er katten. Kjør svd på A og skriv ut

$$A - \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^* \quad \text{og} \quad A - (\mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^* + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2^*).$$

UKENS NØTTER

Vi sier at lengden

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

er **indusert** av indreproduktet $(\cdot, \cdot)$. Men det finnes også lengder som ikke er induert av et indreprodukt. Derfor har vi egne aksiomer for lengde:

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

På fagspråket sier man **norm** istedet for lengde. Det finnes mange normer som ikke er induert av indreprodukt

- 1 Vis at $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ er en lengde.

- 2 Vis at $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$ og $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_k |x_k|$ er lengder når $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Forklar subskriptene.

Så har vi **matrisenormen** $\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$.

- 3 Vis at dette er en lengde.

- 4 Vis at e^A er absolutt konvergent for alle A .



2 - 7 - BØLGE- OG VARMELIKNINGEN

En differensiallikning der den ukjente er en funksjon av flere variable, kalles en **partiell differensiallikning**. La u være en funksjon av to variable; en romlig koordinat x og tiden t . De partiellderiverte skrives

$$\nabla u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} \quad \text{og} \quad \dot{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h}$$

og leses henholdsvis “ u derivert med hensyn på x ” og “ u derivert med hensyn på t ”. De dobbellderiverte skrives

$$\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{og} \quad \ddot{u}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Den geometriske tolkningen av de partiellderiverte kommer an på den geometriske tolkingen av u , og denne kan være litt forskjellig alt etter hva vi skal bruke u til. I denne økten skal vi tenke på u som en eller annen målbar fysisk størrelse, for eksempel

- utslaget til en oppspennet gitarstreng som vibrerer. Da blir $\dot{u}$ farten til et punkt på strengen, mens ∇u blir stigningen til kurven u med hensyn på x .
- temperaturen i en stang. I så fall er $\dot{u}$ tidsendringen til temperaturen i et punkt på stangen og ∇u temperaturgradienten.
- trykket i en stående trykkbølge i en orgelpipe eller en fløyte. Da blir $\dot{u}$ tidsendring i trykk, mens ∇u blir trykkgradienten.



Her er to viktige likninger:

Varmelikningen: $\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t)$ **Bølgelikningen :** $\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$

Disse kan begge utledes med det du har i verktøykassen, så det skal vi gjøre.

La oss begynne med varmelikningen. Tenk at du har en stang eller ledning eller noe med temperatur $T(x, t)$ og der varmen kun kan strømme i x -retningen, for eksempel ved at stangen er pakket inn i Glava. Fouriers varmelov sier at varmestrømmen q (målt i watt per kvadratmeter) over et tverrsnitt av stangen er proporsjonal med temperaturgradienten:

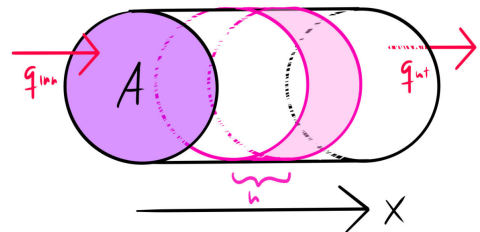
$$q = -k \nabla T(x, t)$$

Her er k en konstant som kalles den **termiske konduktiviteten**.¹ La oss nå se på en liten bit av stangen, den mellom x og $x + h$. Endringen i bitens indre energi ved konstant volum er

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c A h T(x, t)) = \rho c A h \dot{T}(x, t)$$

der ρ er massetettheten til materialet, A er tverrsnittet, og c er den spesifikke varmekapasiteten. Tidsendringen i denne varmeenergien må skyldes at varmeenergi strømmer inn og ut fra enten den ene eller andre siden, slik at

$$\begin{aligned} \rho c A h \dot{T}(x, t) &= A q_{\text{inn}} - A q_{\text{ut}} \\ &= -k A \nabla T(x, t) - (-k A \nabla T(x + h, t)) \\ &= k A (\nabla T(x + h, t) - \nabla T(x, t)) \end{aligned}$$



Hvis vi nå deler på h og lar $h \rightarrow 0$, får vi

$$\dot{T}(x, t) = \alpha \Delta T(x, t)$$

der alle fysiske konstanter er samlet sammen i α , som kalles den **termiske diffusiviteten**.² Hvis vi ganger med ρc blir dette en likning for indre energi per volum, som har symbol u . Dette er en bedre bokstav for ukjent, så jeg tror vi skriver

$$\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t)$$

fra nå av. Men du kan tenke temperatur om du vil, ihvertfall om du går elsys eller kyb.

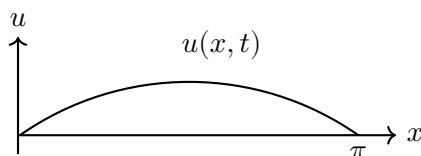
2 Denne utledningen må du kunne til eksamen.



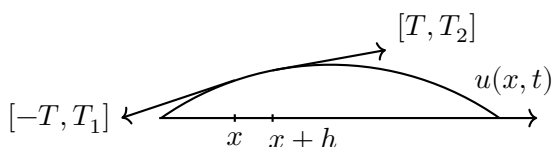
¹https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_conduction

²https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_diffusivity

Og så bølgelikningen. Vi tenker at vi har en vibrerende streng med konstant massetetthet ρ (nå i kg/m) spent opp i $x = 0$ og $x = \pi$. La $u(x, t)$ være en funksjon som for hvert punkt x og hver tid t gir utslaget u fra likevektslinjen, som ligger langs x -aksen.



Vi tar en nærmere titt på strekkraftene på et lite stykke av strengen. Vi antar at tyngdekraften er neglisjerbar, og at strengen er helt elastisk, slik at strengestrekking, som virker parallelt med strengen, er eneste kraft. Vi antar at hvert punkt på strengen kun beveger seg loddrett, og at den horisontale komponenten av strengestrekking er konstant lik T :



Vi setter nå opp Newtons andre lov for den lille biten fra x til $x+h$. Massen til en bit med lengde h er ρh , og akselerasjonen til strengen i punktet x er $\ddot{u}(x, t)$. Kraften på biten er $T_2 + T_1$, slik at

$$h\rho\ddot{u}(x, t) = T_2 + T_1,$$

og deler vi på Th , får vi

$$\frac{\rho}{T}\ddot{u}(x, t) = \frac{T_2/T + T_1/T}{h} = \frac{\nabla u(x+h, t) - \nabla u(x, t)}{h}.$$

Lar vi til slutt $h \rightarrow 0$, får vi bølgelikningen

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t),$$

der $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Denne har benevnning meter per sekund og kalles **bølgefarten**.³

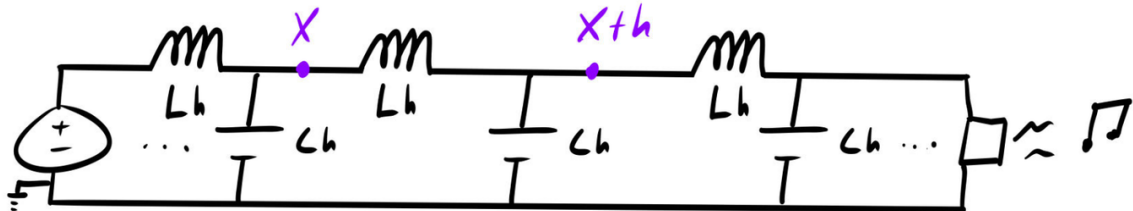
3 Også eksamen.

Til inspirasjon: <https://tv.nrk.no/serie/oeyeblikket/sesong/1/episode/8/avspiller>



³https://en.wikipedia.org/wiki/String_vibration

Vitsen med å studere litt matematikk selv man ikke skal bli matematiker, er som alle vet at mange vidt forskjellige fysiske situasjoner beskrives av nøyaktig de samme matematiske likningene. For å illustrere skal jeg utlede bølgelikningen på nytt, men nå via spenning og strøm i en lang transmisjonslinje. La oss tenke at du har en spenningskilde og en last som sitter ganske langt borte. Hvis ledningen er lang nok,⁴ vil den ha litt induktans per meter, og mellom ledningene vil det også være litt kapasitans per meter. Her er en illustrasjon:



For å modellere induktansen på ledningene og kapasitansen mellom dem, tenker vi at det sitter masse av små kondensatorer og spoler bortetter ledningsparet, slik som på figuren. Det kan sitte en last i enden av ledningsparet, men vi antar ingen motstand i selve ledningene. Spenning og strøm vil variere på linjene, og vi tenker på dem som funksjoner av to variable $v(x, t)$ og $i(x, t)$.

La L være ledningens induktans per meter, slik at induktansen til den lille spolen blir Lh . Spenningen i punktet $x + h$ er spenningen i punktet x minus det som går tapt over spolen:

$$v(x + h, t) = v(x, t) - Lh \frac{\partial i}{\partial t}$$

La likeledes C være kapasitans per meter, slik at kapasitansen over den lille kondensatoren blir Ch . Da er strømmen i $x + h$ lik strømmen i x minus det som det lekker ned via kondensatoren:

$$i(x + h, t) = i(x, t) - Ch \frac{\partial v}{\partial t}$$

Dersom vi reorganiserer disse likningene og lar $h \rightarrow 0$, får vi **telegraflikningene**:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

Dersom vi nå deriverer den første med hensyn på x og den andre med hensyn på t og så antar at

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

(hvorvidt dette er sant kommer vi til), får vi at spenningen må tilfredsstille bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Tilsvarende gjelder for strømmen:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

4 Denne hadde vi på kontoen i fjor, gikk helt fint.

⁴https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_24.html

Så til løsning. Hvordan løser man en partiell differensiallikning? Vanligvis starter man med å bestemme seg for at man skal løse likningene på et begrenset intervall på x -aksen. Av hensyn til studentene pleier man å begynne med $[0, \pi]$, for da blir regningen enklest, og av samme grunn spesifiserer man randkravene

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Dette betyr at strengen er spent opp i $x = 0$ og $x = \pi$, eller at temperaturen i stangen holdes ved null grader, og nå har vi nok informasjon til å sette i gang og regne.

En klassisk teknikk for å løse partielle differensiallikninger kalles **separasjon av variable** og består i å anta at løsningen kan skrives som et produkt av funksjoner av hver variabel:

$$u(x, t) = z(t)y(x)$$

- 5] Bruk definisjonen av partiellderivert til å vise at dersom

$$u(x, t) = z(t)y(x)$$

er

$$\dot{u}(x, t) = \dot{z}(t)y(x) \quad \text{og} \quad \nabla u(x, t) = z(t)y'(x).$$

- 6] Bruk separasjon av variable på både varme- og bølgelikningen og oppdag at du blir nødt til å løse **randverdiproblemet**

$$y''(x) - ky(x) = 0 \quad \text{og} \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Konstanten k kalles **separasjonskonstanten**. Randverdiproblemet over har du verktøy nok til å løse, men det er litt uvant i starten. Man må begynne med å skrive opp den karakteristiske likningen til $y'' - ky = 0$ og skrive opp løsningene når $k > 0$, $k = 0$ og $k < 0$.

- 7] Bare ett av de tre valgene for k over gir løsninger som kan tilfredsstille randkravene $y(0) = y(\pi) = 0$. Finn ut hvilket, og skriv opp alle mulige løsninger.



Hvis du analyserte randverdiproblemet riktig, vil du nå ha kommet fram til at løsningene er

$$y_n(x) = b_n \sin(nx)$$

der b_n er en vilkårlig integrasjonskonstant og n er et naturlig tall.⁵ Dette betyr at dersom både bølge- og varmelikningen med disse randkravene har løsninger på formen

$$u_n(x, t) = z(t)y_n(x) = z(t) \sin(nx)$$

og nå gjenstår det å finne z . (Jeg har latt $z(t)$ sluke integrasjonskonstanten, for det kommer nemlig en til når vi finner z , og vi trenger ikke begge.)

8 Vis at for varmelikningen får vi

$$\dot{z}_n(t) + \alpha n^2 z_n(t) = 0,$$

slik at

$$u_n(x, t) = z_n(t)y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx).$$

9 Vis for bølgelikningen at det finnes massevis av løsninger på formen

$$z_n(t) = a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)$$

og følgelig at det finnes massevis av **overtoner**

$$u_n(x, t) = (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx).$$

Nå er vi kommet omtrent til det punktet der Joseph Fourier⁶ begynte å slite.

10 Vis at dersom vi skal ha tilfredsstilt **initialkravet** $u(x, 0) = f(x)$ for varmelikningen, må vi ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Joseph Fouriers store oppdagelse var formelen for koeffisientene b_n . Eller rettere sagt, andre kjente til formelen, men Fourier kom på den sprø ideen om at du kunne skrive

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

på $[0, \pi)$. Merk at x er skrevet som en lineærkombinasjon av sinuser. Sinusfunksjonene i uttrykket over er nemlig en ortogonal basis for noe. Nettopp hva skal vi komme tilbake til.



⁵Merk at vi har fått **kvantisering**, som skyldes at vi har et begrenset intervall og randkrav. Dette skal vi komme tilbake til i kvantefysikken mot slutten av semesteret.

⁶Joseph Fourier ble satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som oppdageren av drivhuseffekten. Han oppfant også fourierrekker. De satte opp en statue av ham i hjembyen Auxerre i 1849, men den ble visst rekvirert av staten og smeltet om under andre verdenskrig.

UKENS NØTTER

Hvis du hiver ut randkravene og heller sier at bølge- og varmelikningen skal løses på hele $\mathbb{R}$, må du gå litt annerledes til verks. Bølgelikningen har mange løsninger; for eksempel passer

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

i bølgelikningen uansett hva ϕ og ψ er så lenge begge er to ganger deriverbare.

1 Sjekk dette, og gi en fysisk tolkning.

2 Bruk oppgaven over samt

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{og} \quad \dot{u}(x, 0) = g(x)$$

til å sette opp likningssystem for ϕ og ψ . Gauss litt, integrer, og utled D'Alemberts formel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Det går an å løse varmelikningen på hele $\mathbb{R}$ også, men det må vi vente med.



2 - 8 - FOURIERANALYSE II

I forrige uke kom vi nesten i mål med å løse varmelikningsproblemet

$$\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x).$$

I likhet med Joseph Fourier kom vi frem til at funksjoner på formen

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

tilfredsstiller både differensiallikningen og randkravene, men så stoppet alt opp da vi skulle prøve å tilpasse initialkravet $u(x, 0) = f(x)$.

- 1 Nå er det antagelig lurt å dobbeltsjekke dette, så du er sikker på at du henger med så langt, for denne utledningen kan komme på eksamen.

Initialkravet tenker vi på som at temperaturen i stangen er fordelt på en bestemt måte ved $t = 0$. Dersom vi evaluerer u_n i $t = 0$, får vi

$$u_n(x, 0) = b_n \sin(nx) = f(x),$$

og nå skjønner alle at dette kommer ikke til å gå spesielt bra med mindre f er en skalarmultiplum av $\sin(nx)$. Men vent litt. Superposisjonsprinsippet må da gjelde. Lineærkombinasjonen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

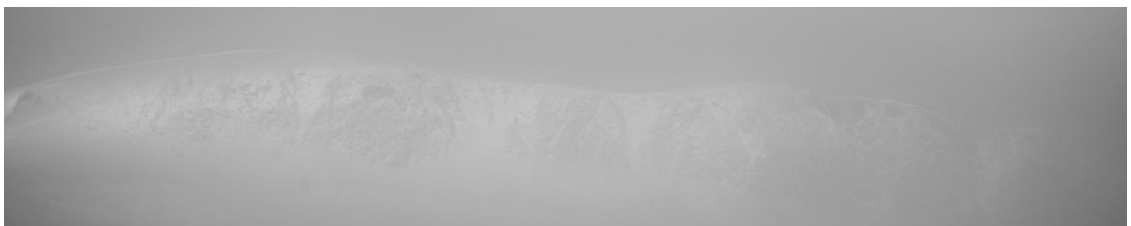
tilfredsstiller også differensiallikningen og randkravene, så om f er en lineærkombinasjon av sinusfunksjonene i denne summen, må det vel være mulig å finne b_n slik at

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) = f(x)?$$

Svaret på dette er null stress joggedress, og nå skal vi finne koeffisientene. De kan nemlig finnes ved å bruke et standardtriks som vi skal bruke mange ganger dette semesteret. Det er vanlig å introdusere trikset i to steg. Først en observasjon:

- 2 Vis først at sinusfunksjonene i lineærkombinasjonen er ortogonale på $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$



Og så selve trikket:

3 Gang likningen

$$\sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) = f(x)$$

med $\sin(mx)$, integrer fra $x = 0$ til $x = \pi$, og vis at dersom likningen kan løses, må

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

I resonnetet over ligger det som grunnpremiss at f er en lineærkombinasjon av sinusfunksjonene i summen på venstre side. Dersom f er noe annet, bryter alt sammen; det er meningsløst å prøve å løse for eksempel likningen

$$b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) = x$$

for b_1 og b_2 , for det er åpenbart at denne likningen ikke kan løses. Funksjonen $f(x) = x$ kan åpenbart ikke skrives som en lineærkombinasjon av $\sin(x)$ og $\sin(2x)$. Leonhard Euler selv trodde likningen over kun kunne løses så lenge f var en lineærkombinasjon av sinusfunksjoner.

Fouriers sprø ide var å la summen gå mot uendelig. Han tenkte at dersom du bare tok med mange nok sinusfunksjoner, ville

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = f(x)$$

dersom

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

uansett hva f er. Dette har vist seg å være sånn omtrent riktig,¹ men Fourier ble faktisk ikke tatt seriøst av andre matematikere til å begynne med, for ideen er rar. Hvis du er ordentlig interessert i matematikk anbefaler jeg nå at du går på nett og finner Stein og Shakarchis klassiker "Fourier Analysis: An Introduction" fra 2003. Hvis ikke, foreslår jeg at du går videre med neste oppgave.

4 La oss prøve. Vi lar $f(x) = x(\pi - x)$. Regn ut

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx,$$

og plott partialsummene

$$\sum_{n=1}^N b_n \sin(nx)$$

og f oppå hverandre i python.

(Utrekningen av integralet er litt hårete. Hold tungen beint i munnen!)

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series

Hvis du regna riktig i oppgaven over, fikk du

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{odde } n \end{cases}$$

slik at

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin((2n-1)x).$$

5 Skriv opp løsningen til varmeledningsproblemet

$$\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = x(\pi - x)$$

og plot løsningen for noen utvalgte tidspunkt, slik at du er sikker på at du forstår omtrent hva du har regna ut.

Randkravene

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

kalles **dirichletrandkrav**. Disse forteller noe om hvordan løsningen skal oppføre seg i endepunktene, for eksempel at temperaturen holdes ved null grader eller at den vibrerende strengen er spent fast der. Nå hadde det sikkert vært på sin plass å regne ut flere eksempler på fourierrekker, slik at vi kunne regne ut flere eksempler på løsninger av akkurat det samme varmeledningsproblemet, men vi skal regne ut ganske mange fourierrekker dette semesteret, så vi haster videre. Hvis vi bytter ut dirichletrandkravene med

$$\nabla u(0, t) = \nabla u(\pi, t) = 0$$

kalles det **neumannrandkrav**. Du husker forhåpentligvis Fouriers varmelov, som sier at varmestrømmen i watt per kvadratmeter er proporsjonal med temperaturgradienten ∇u .

6 Forklar at dersom endepunktene på stangen er isolerte istedet for holdt ved temperaturen 0, må vi løse neumannproblemet

$$\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t) \quad \nabla u(0, t) = \nabla u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x)$$

Hvis du gjentar alle stegene i løsningen av dirichletproblemet (altså alt vi har gjort dette semesteret frem til nå), kan du løse dette problemet også med bittelitt modifikasjon.

7 Forklar at neumannproblemet har løsning

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

8 Løs problemet over for initialvarmefordelingen $f(x) = x$.



Vi begynte med varmelikningen, siden det er den det er minst herk med. Nå tar vi det korresponderende opplegget for bølgelikningen. Bølgelikningen er i bunn og grunn bare Newtons andre lov, og vi er vant til fra klassisk mekanikk at man må spesifisere både startposisjon og startfart for å bestemme bevegelsen. For bølgelikningen betyr dette at vi må både spesifisere strengens form og fart før vi slipper den:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x).$$

Dirichletproblemet blir

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x).$$

(Hvis du bare drar i strengen og så slipper den, er $g = 0$.)

9 Gjenta det du gjorde for varmelikningen over, og forklar at løsningen er

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx)$$

der

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx.$$

Dersom du har stående luftbølger i en orgelpipe eller et blåseinstrument, vil våre erkefiender fysikerne fortelle at det er neumannrandkrav som gjelder:

$$\ddot{u} = c^2 \Delta u \quad \nabla u(0, t) = \nabla u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x).$$

10 Forklar at neumannproblemet har løsning

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (a_0 + b_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \cos(nx)$$

der

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad (n \geq 1),$$

mens

$$b_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx.$$



Kort fortalt handler **fourieranalyse** om å skrive en funksjon som en uendelig sum av sinuser og cosinuser. La oss avslutte med å skrive opp noe veldig generelt. Vi har holdt oss til intervallet $[0, \pi]$ så langt, fordi det er dette intervallet som er mest naturlig når man løser bølge- og varmelikningen. Men nå skal vi kjøre alt på $[-\pi, \pi]$ istedet, og så skal vi se hvordan $[0, \pi]$ blir et pent spesialtilfelle siden. Hvis f er deriverbar og $f(-\pi) = f(\pi)$, er det alltid mulig å skrive f som en **fourierrekke**

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

på $[-\pi, \pi]$, der koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

La oss dra oss selv gjennom forklaringen.

11 Først må vi sjekke at alle sinusene og cosinusene er ortogonale på $[-\pi, \pi]$. Regn ut at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{alle } m, n$$

Oppgaven over er litt lang og tung, men den er steg én i et tostegsresonnement vi skal gjøre mange mange ganger dette semesteret, så du bør forstå det. (Det er nå andre gang vi gjør essensielt det samme resonnementet; første gang var i begynnelsen av denne økten.)

12 Steg to i standardresonnementet er å gange likningen

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med alle sinus- og cosinusfunksjonene i oppgave 11, integrere fra $-\pi$ til π , bruke kanselleringene du utledet til å finne formlene

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

(Jeg sier “finne” og ikke “utlede”, for dette resonnementet er alt annet enn stringent. Siden summene er uendelige gjør vi masse greier som man må opp på et helt annet teknisk nivå for å gjøre ordentlig. Kanskje vi kommer der mot slutten av semesteret. Vi får se.)

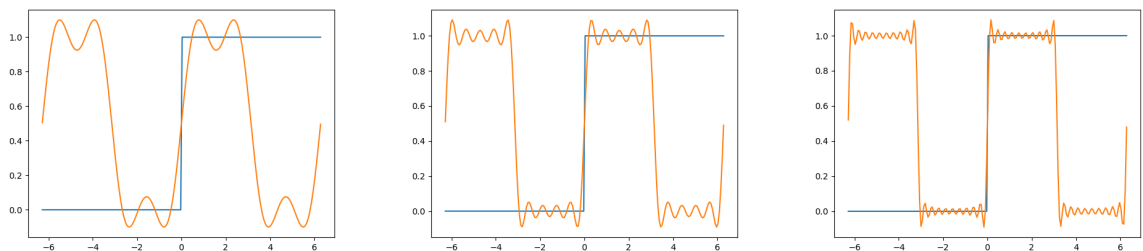
La oss nå beregne et par fourierrekker. Finn fourierrekkene (på $[-\pi, \pi]$) til

13 **Firkantbølgen** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$

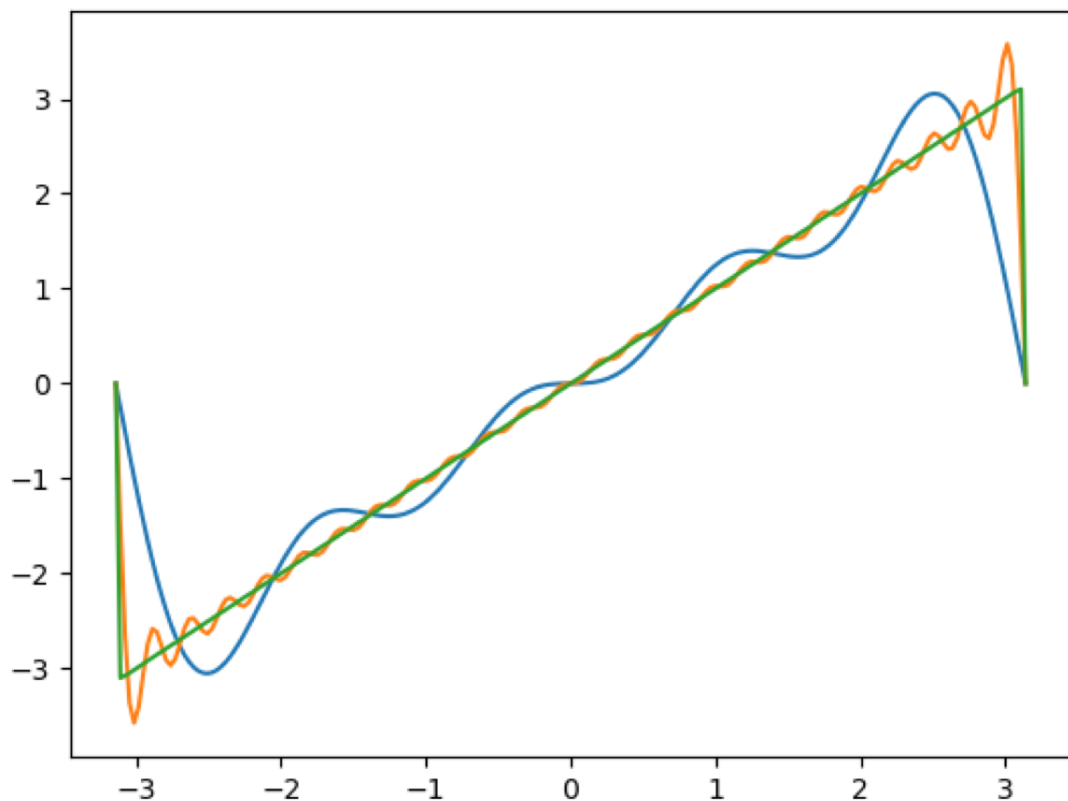
14 **Sagtannbølgen** $f(x) = x$

15 **Trekantbølgen** $f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{for } x < 0 \\ \pi - x & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$

I oppgavene over, bør du plotte noen partialsummer for å dobbeltsjekke at du har regna riktig. Her er S_2 , S_5 og S_{10} for firkantbølgen (plotta på $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere periodisiteten til rekka):



og S_5 (blå), S_{25} (gul) og S_{5000} (grønn) for sagtannbølgen:



Hvis du leste de to forrige sidene nøye, la du kanskje merke til at alle funksjonene i oppgave 13-15 bryter kravene om at f må være deriverbar og at $f(-\pi) = f(\pi)$. Det som vanligvis skjer når man bryter regularitetskravene til f , er at fourierrekken konvergerer til noe annet enn $f(x)$ i enkelte punkter på $[-\pi, \pi]$. Av denne grunnen er det vanlig å skrive

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

istedet for

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

16 Finn punkter på $[-\pi, \pi]$ der fourierrekkene i oppgave 13-15 ikke konvergerer til $f(x)$.

Det andre som er verdt å legge merke til, er at noen ganger trenger man bare sinuser, andre ganger trenger man bare cosinuser. Dette har å gjøre med odde og jevne funksjoner. Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

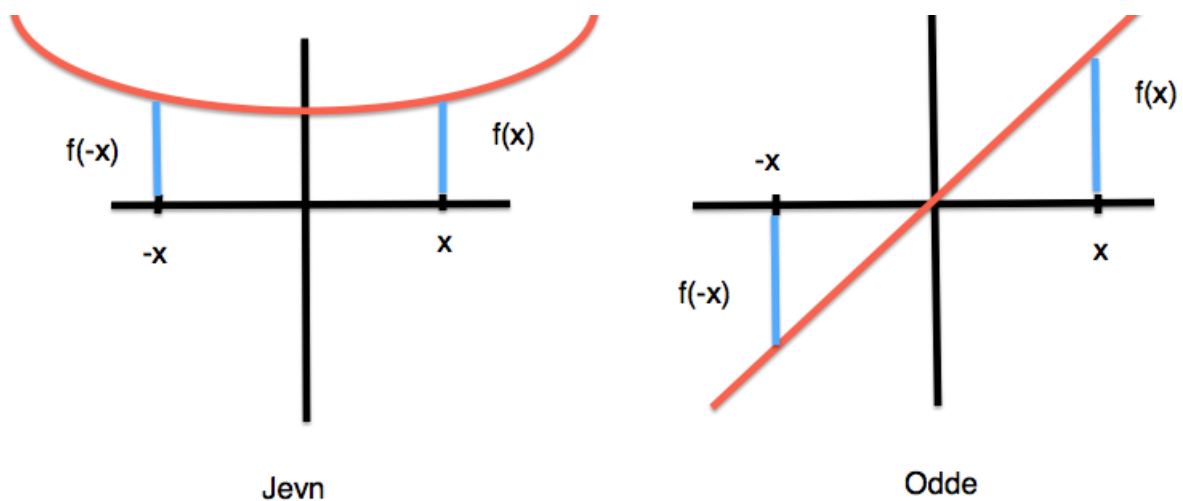
Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y -aksen. En rask kikk på figur viser at

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

for jevne funksjoner.



Alt dette har litt å si for hvorfor vi for noen funksjoner kun trenger sinuser, og hvorfor vi for noen funksjoner kun trenger cosinuser.

17 Vis at

- produktet av to jevne funksjoner er en jevn funksjon.
- produktet av to odde funksjoner er en jevn funksjon.
- produktet av en jevn og en odde funksjon er en odde funksjon.

18 og bruk dette til å forklare hvorfor du

- kun trenger sinuser i oppgave 14.
- kun trenger cosinuser i oppgave 15
- kun trenger sinuser i oppgave 13 (litt vanskeligere).



2 - 9 - REELLE INDREPRODUKTROM

Et vektorrom kan være utstyrt med noe som kalles **indreprodukt**. Dette er en generalisering av skalarproduktet, som forteller noe om *hvor mye det er av én vektor i retningen til en annen*. La $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ være vektorer, og a og b reelle tall. Her er aksiomene. Et indreprodukt er **symmetrisk**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

positivt definit:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

og **lineært i første faktor**:

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$$

Det er relativt lett å vise at et indreprodukt er lineært også i det andre argumentet:

$$(\mathbf{z}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

Dette gjelder bare om a og b er reelle tall; er de komplekse må vi være litt forsiktige.

De to mest elementære indreproduktene er

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad \text{og} \quad (x, y) = \int_c^d x(t)y(t) dt$$

for henholdsvis vektorer i $\mathbb{R}^n$ og kontinuerte funksjoner fra $[c, d]$ til $\mathbb{R}$. Inntil videre er det disse to vi trenger, men det finnes mange andre indreprodukter.¹

¹ Sjekk at aksiomene er tilfredsstilt for disse to indreproduktene.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Inner_product_space

Siden indreproduktet er en generalisering av skalarproduktet, skriver vi likeledes $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ for "lengden" av $\mathbf{x}$, og sier at vektorer er ortogonale dersom indreproduktet mellom dem er null. Det viser seg at mange av tingene vi utledet for skalarproduktet, kan utledes bare med de tre aksiomene over. Her er en liste over de viktigste.

1: Pytagoras' setning: $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale hvis og bare hvis

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

2: Cauchy-Schwarz' ulikhet: $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$

3: Trekantulikheten: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

4: Det er lett å dekomponere en vektor $\mathbf{x} \in V$ i en ortogonal basis for V :

$$\mathbf{x} = \sum_k \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)} \mathbf{v}_k$$

5: Vektoren

$$\mathbf{z} = \sum_k \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)} \mathbf{v}_k$$

er den vektoren i V som minimerer avstanden $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ dersom $\mathbf{x} \notin V$.

Disse setningene brukes jevnt og trutt i de fleste fagfelt. MTELSYS og MTTK trenger dem i signalbehandling, og MTKJ i kvantefysikk.

2 Nå kan du prøve å utlede alle disse kun ved å bruke aksiomene for indreprodukt.



Resten av denne økten skal vi bruke på forskjellige anvendelser av indreproduktet. Den første er at vi kan bruke fun fact 4 over til å forstå “hvorfor” det periodiske signalet x kan skrives

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

der

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Jeg skriver “hvorfor” i hermetegn fordi summene går til uendelig og det introduserer noen problemer som vi bare hopper glatt over, se ukens nøtter.

3 Vis at

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = \begin{cases} T/2 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = \begin{cases} T & n = m = 0 \\ T/2 & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

for alle $m, n \in \mathbb{N}$ (unntatt $n = m = 0$ i det første integralet), og forklar hvordan man kommer frem til formlene for a_n og b_n .

Det neste vi kan gjøre er å bruke fun fact 5 til å forstå at dersom du ønsker å bruke bare et endelig antall av sinusene over til å approksimere et signal x , gjør du klokt i å bare beregne fourierkoeffisientene over, og skrive

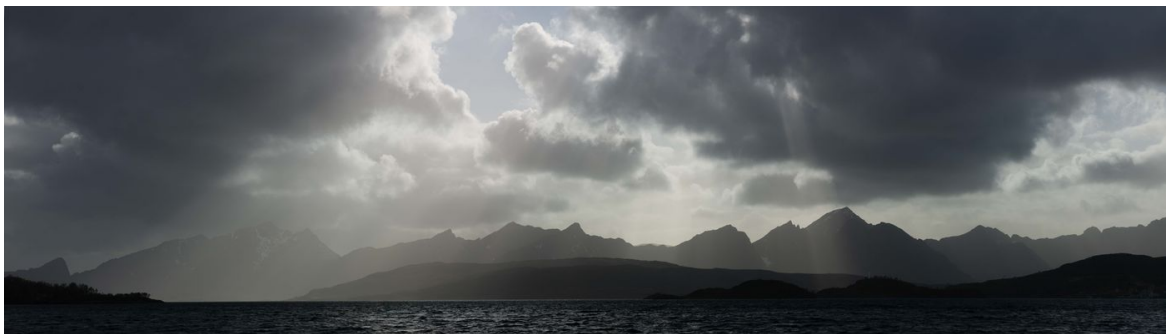
$$x(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

så lenge du måler approksimasjonsfeilen ved

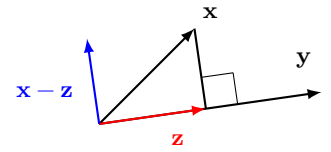
$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - y(t))^2 dt.$$

Dette kalles L^2 -**normen**, og er det vanligste målet på “avstanden” mellom to funksjoner.

4 Dette er i bunn og grunn en fetter av forrige uke. Forklar.



Indreproduktet (y, x) forteller som sagt noe om x sin komponent i retningen til y . La oss si at x og y i figuren til høyre er en basis for et rom, og så vil du ha en ortogonal basis for det samme rommet. Da kan du rette ut x litt. Denne ideen er grunnlaget for noe som kalles Gram-Schmidts metode.^a



^aSe https://en.wikipedia.org/wiki/Gram-Schmidt_process eller <https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4115/2024v/notater/9-projeksjon.pdf>

Dette er en smart teknikk for å skaffe seg en ortogonal basis dersom basisen man har ikke er det. Et annet navn er **QR-faktorisering**.²

- 5 Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 6 Finn P som ortogonalt diagonaliserer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 7 Kjør Gram-Schmidt på polynomene $\{1, x, x^2, \dots\}$. Dersom du gjør dette og ganger med riktig konstant, skal du få ut legendrepolynomene.³ Disse får du bruk for om du går MTKJ og skal regne på angulært moment i kvantefysikk, eller om du av en eller annen grunn må regne ut noen integraler numerisk med en helt syk presisjon.

Den rettlinjede lineærregresjonen i forrige uke, passer inn i denne uken dersom vi setter opp

$$(f, g) = \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k),$$

altså et indreprodukt mellom funksjoner der vi samler funksjonene på gitterpunktene x_k .

- 8 Vis at dette nesten er et indreprodukt.
(Det er én liten ting som mangler, så teknisk sett blir dette et **semi-indreprodukt**. Fun factene over er gyldige for semi-indreprodukter med bittelitt modifikasjon, så det går bra.)

Regresjonskoeffisientene β_0 og β_1 kan utledes ved å finne en ortogonal basis for de første ordens polynomene med hensyn på dette indreproduktet, og så regne ut fourierkoeffisientene.

- 9 Prøv dette.
(Hint: Bruk Gram-Schmidts prosedyre på basisen $\{1, x\}$ med hensyn på indreproduktet over, og regn ut fourierkoeffisientene til responsvariabelens datapunkter y_k .)



²https://en.wikipedia.org/wiki/QR_decomposition

³https://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials

Dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortogonal vektormengde og i tillegg $\|\mathbf{v}_k\| = 1$ for alle k , sier vi at vektormengden er **ortonormal**.

- 10 Skjønnte du figuren øverst på forrige side klarer du kanskje å utlede **Rodrigues formel**

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin \theta + \mathbf{y}(\mathbf{x}^T \mathbf{y})(1 - \cos \theta)$$

der $\mathbf{v}$ er $\mathbf{x}$ rotert vinkelen θ om enhetsvektoren $\mathbf{y}$.

(Hint: Projiser x på y , lag en gunstig ortonormal basis basert på y og $\mathbf{x} - z$ i figuren på forrige side, og bruk den todimensjonale rotasjonsmatrisen.)

Nå som du kan litt om projeksjon, er det litt enklere å få greie på hva kryssproduktet gjør.

- 11 Vis at dersom $\|\mathbf{y}\| = 1$ består $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ av en projeksjon etterfulgt av en rotasjon.

Vi sier forvirrende nok at en matrise er ortogonal dersom kolonnene er ortonormale. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

har ikke ortonormale kolonner, men om du skalerer dem litt, får du en ortonormal matrise:

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonale matriser roterer og speiler vektorer, og mengden av alle ortogonale $n \times n$ -matriser kalles den **ortogonale gruppen**⁴ $O(n)$. Dersom determinanten er 1 er det ren rotasjon, og mengden av disse kalles den **spesielle ortogonale gruppen** $SO(n)$.⁵ Disse mengdene er eksempler på **Lie-grupper**, etter den norske matematikeren Sophus Lie.⁶

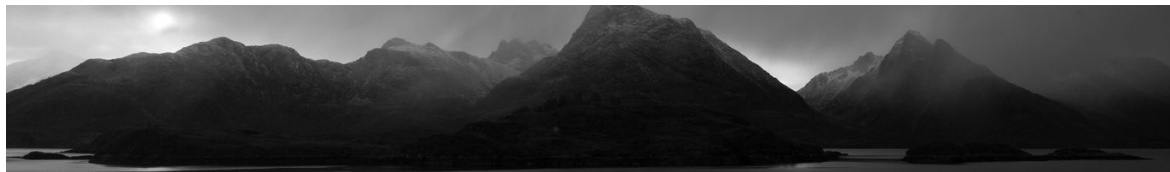
- 12 Hva skjer om du ganger B med B^T ?

Hvis du har en ortonormal basis for noe, kan du skrive opp Pytagoras' regel på en litt annen måte. Da kalles den gjerne **Parsevals sats**:

- 13 Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \quad \text{er} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Tegn en figur som illustrerer denne i $\mathbb{R}^2$.



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_matrix

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix

⁶Sophus Lie leverte seriøse bidrag til forståelsen av differensiallikninger, men det er kompliserte greier. Jeg skjønner ingenting av det: https://en.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie

UKENS NØTTER

Det er ikke innlysende at det går bra å bytte om på integrasjon og uendelig sum, og derfor vil vår “utledning” av fourierkoeffisientene heller ikke kvalifisere som et ordentlig bevis.

1 la $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$. finn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

for $0 \leq t \leq 1$, og regn ut

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt \quad \text{og} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

Se kap. 7 i rudin: principles of mathematical analysis for flere eksempler.

Om du synes det er artig med numerisk integrasjon, kan du sjekke ut **chebyshevpolynomene**. Disse er definert ved

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

2 Vis at T_n er et polynom.

(Hint: Induksjon. Bruk regneregler for cosinusfunksjonen og studér $T_{n+1} + T_{n-1}$.)

Chebyshevpolynomene er ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

3 Vis at dette er et indreprodukt.

Hvis du er nysgjerrig på hva dette kan brukes til, kan du se her:

<https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/ATAP/first6.pdf>



2 - 10 - KOMPLEKSE INDREPRODUKTROM

Transponeringsoperasjonen bytter om på rader og kolonner i en matrise. Dersom tallene i matrisen er komplekse, viser det seg at det er lurt å komplekskonjugere alt i tillegg til å transponere. La

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Den **adjungerte**¹ av A er $n \times m$ -matrisen

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}.$$

1 Finn den adjungerte til $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$.

Merk at nå har vi en ny notasjon for $\bar{z}$, nemlig z^* . Du lurer sikkert på hvorfor vi komplekskonjugerer i tillegg til å transponere. Det er fordi de kartesiske koordinatene til z^*w har en mer interessant geometrisk tolking enn de kartesiske koordinatene til zw .

- 2 La z og w være komplekse tall, med $|w| = 1$. Tegn dem inn i det komplekse planet, skriv det komplekse tallet

$$w^*z$$

på kartesisk form, og se veldig nøye på resultatet. Ser du noen projeksjoner?
(Hint: Dette er en slags kompleks mashup av oppgave 3 og 6 i økt 2 - 4.)



¹Ikke forveksle med **adjugatet**, som er noe annet. Jeg har møtt store vitenskapsmenn (over 187 på sokkelesten) som blander sammen disse to fordi navnene er så like.

Siden $\bar{z}w$ inneholder informasjon om projeksjonen av w på z , og lengden av et komplekst tall er

$$|z| = \sqrt{z^*z},$$

definerer vi **det komplekse skalarproduktet** mellom komplekse kolonnevektorer $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ som

$$\mathbf{z}^*\mathbf{w} = (\bar{z}_1 \quad \bar{z}_2 \quad \cdots \quad \bar{z}_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \cdots + \bar{z}_n w_n$$

Vi sier at vektorer i $\mathbb{C}^n$ er ortogonale dersom det komplekse skalarproduktet mellom dem er null, og lengden til en kompleks vektor $\mathbf{z}$ defineres som

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^*\mathbf{z}}$$

Det komplekse skalarproduktet er noe mer komplisert å forholde seg til enn det reelle. Den første forskjellen er at Pytagoras' setning kun har enveis implikasjon:



hvis $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale, er $\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$



Beregningen

$$\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{z} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \|\mathbf{z}\|^2 + \mathbf{z}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}^*\mathbf{z} + \|\mathbf{w}\|^2.$$

er fremdeles gyldig, men siden vi ikke uten videre kan bytte plass på faktorene i det komplekse skalarproduktet, kan vi ikke slå sammen de to midterste leddene, og disse kan kansellere på andre måter enn at $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ er ortogonale.

3 Finn et eksempel på $\mathbf{z}$ og $\mathbf{w}$ slik at

$$\mathbf{z}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}^*\mathbf{z} = 0$$

uten at $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0$.

Dersom $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0$ er også $\mathbf{w}^*\mathbf{z} = 0$,

4 vis dette

og dette betyr at dersom $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0$, får vi

$$\|\mathbf{z} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2.$$

5 Denne kan komme på eksamen.



Cauchy-Schwarz og trekantulikheten gjelder også i det komplekse tilfellet, men jeg skal ikke plage deg med bevisene. Det jeg derimot må plage deg med, er

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{og} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt$$

Du lurte forhåpentligvis på hvor minusen i eksponensialfunksjonen kom fra. Forhåpentligvis skjønner du også nå at formelen for fourierkoeffisientene c_n er et indreprodukt, men den er altså et **komplekst indreprodukt**. Her er aksiomene. Et komplekst indreprodukt er konjugert symmetrisk:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \overline{(\mathbf{w}, \mathbf{z})}$$

positivt definit:

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0},$$

og lineært i enten første eller andre faktor, altså enten

$$(a\mathbf{z} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{eller} \quad (\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

6] Sjekk at det komplekse skalarproduktet er et indreprodukt, lineært i andre faktor.

7] Sjekk at

$$(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{y(t)} dt$$

er et indreprodukt, lineært i første faktor.

8] Sjekk at dersom et komplekst indreprodukt er lineært i den ene faktoren, er det **antilineært** i den andre. Altså at dersom for eksempel

$$(a\mathbf{z} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{er} \quad (\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = \overline{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \overline{b}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

Tidligere i ditt liv har du "utledet" koeffisientene

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt$$

ved å observere at de komplekse eksponensialfunksjonene er ortogonale, og så bruke semesterets store generiske argument.

9] Nå er det antagelig lurt å gjøre dette resonnementet på nytt, for det er viktig, og kan komme på eksamen.



Ved første øyekast virker det kronglete med ubestemmeligheten angående hvorvidt indreproduktet skal være lineært i første eller andre faktor. Men det finnes mange indreprodukter, og i forskjellige fagfelt opererer man med forskjellige konvensjoner, så det er like greit å venne seg til begge varianter. Komplekse vektorer kan være ortonormale på samme måte som reelle vektorer, men en matrise med ortonormale kolonner kalles **unitær**, ikke ortogonal.

- 10 Vis at for en unitær matrise Q er

$$Q^*Q = I = QQ^*$$

og sjekk at denne matrisen er unitær:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Det er et viktig tilfelle der egenvektorer automatisk er ortogonale. De tre neste oppgavene leder frem til dette. En kompleks matrise er **hermittisk** dersom $A = A^*$.²

- 11 Er matrisen over hermittisk?

Uttrykket

$$\mathbf{x}^* A \mathbf{x}$$

kalles en **kvadratisk form**. Disse ser ikke så spennende ut, men dukker stadig opp i anvendelser, for eksempel i statistikk.

- 12 Vis at dersom A er hermittisk, er $\mathbf{x}^* A \mathbf{x}$ reell.

- 13 Vis at en hermittisk matrise har reelle egenverdier.
(Hint: La $\mathbf{v}$ være en normalisert egenvektor og se på $\mathbf{v}^* A \mathbf{v}$.)

- 14 Vis at egenvektorene til to distinkte egenverdier er ortogonale for hermittiske matriser.

Dersom T er en abstrakt lineæroperator og $(\cdot, \cdot)$ er et komplekst indreprodukt, defineres den **adjungerte operatoren** T^* som noe som tilfredsstiller

$$(x, Ty) = (T^*x, y),$$

og en hermittisk operator som noe som tilfredsstiller

$$(x, Ty) = (Tx, y).$$

Dette er kvantefysikk. Den kvadratiske formen (x, Tx) kalles **forventningen** til T i tilstanden x .

- 15 Jeg vet ikke hvordan du gjorde oppgave 12-14 over, men om du skrev ut alt på komponentform, kan du prøve å ta utgangspunkt i abstrakte indreprodukter og hermittiske lineæroperatorer istedet. Det blir mye enklere.
(Hint: Ta utgangspunkt i likningen

$$Tx = \lambda x$$

og ta indreproduktet med x og bruk at $T = T^*$ samt det andre aksiomet for indreprodukt.)

²Men man kunne like gjerne sagt "symmetrisk". Det er ingen som noensinne transponerer en kompleks matrise uten å komplekskonjugere innmaten.

Parsevals sats gjelder også i komplekse indreproduktrom, og beviset er så og si identisk.

16 Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \quad \text{er} \quad (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \sum_{k=1}^n c_k \overline{c_k}.$$

Faktisk kan vi klare enda bedre:

17 Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{v}_k \quad \text{er} \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^n c_k \overline{d_k}.$$

Parsevals sats gjelder også for fourierrekker, men akkurat som for utledningen av formelen for koeffisientene, må vi nøye oss med heuristisk utledning. Den er basert på samme triks som i oppgave 16, men vi må gjøre noen bytter av uendelig sum og integraltegn som vi strengt tatt ikke vet om går bra, og derfor skal vi nøye oss med selve resultatet. Dersom et signal kan skrives

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} \quad \text{med} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi i n t / T} dt$$

er

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Vi trenger faktisk ikke noe mer enn at x er riemannintegrerbar for at dette skal være sant.

18 Jeg kunne bedt deg skrive ut detaljene i resonnementet, men det blir på en måte litt teit, for det hadde blitt å gjøre oppgave 16 om igjen, bare med ∞ istedet for n oppå summen.



UKENS NØTTER

Ekte mannfolk bruker kvaternioner når de skal holde styr på rotasjoner:

https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

og dette er standardmåten å gjøre det på i moderne robotstyringsalgoritmer. Dersom du ønsker å rotere $x \in \mathbb{R}^3$ om y der $\|y\| = 1$, kan du lage

$$x = x_1i + x_2j + x_3k$$

og

$$y = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + (y_1i + y_2j + y_3k) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

og beregne xyy^{-1} ; imaginærdelene til denne gir deg den roterte vektoren.

1 Vis dette.

(Brett opp ermene og regn i vei. Tok meg om lag en uke, men jeg er heller ikke spesielt smart.)



2 - 11 - FOURIEROMVENDING

Vi har lært at T -periodiske signaler stort sett alltid kan dekomponeres i overtoner:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

og vi har beregnet fourierkoeffisientene c_n for noen teoretiske signaler. Dersom $T = 2\pi$ blir formlene mye penere:¹

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt.$$

Siden all relevant informasjon om et T -periodisk signal finnes på intervallet $[-T/2, T/2]$, er det irrelevant om vi tenker at vi skal finne fourierrekken til det periodiske signalet $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eller funksjonen $x : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$. Fourierkoeffisientene c_n bygges fra informasjon om x på $[-T/2, T/2]$, og fourierrekken vil uansett ha grunnperiode T og repetere seg selv utenfor intervallet $[-T/2, T/2]$.

Men det er nå en liten catch. Et periodisk signal finnes ikke i virkeligheten; alle signaler dør ut på et eller annet tidspunkt. Her er for eksempel bølgeformen til en enkelt G13-akkord på min gibson es-175 som jeg kjøpte når jeg var stipendiat. Dette lydsignalet er nok "omtrent" periodisk

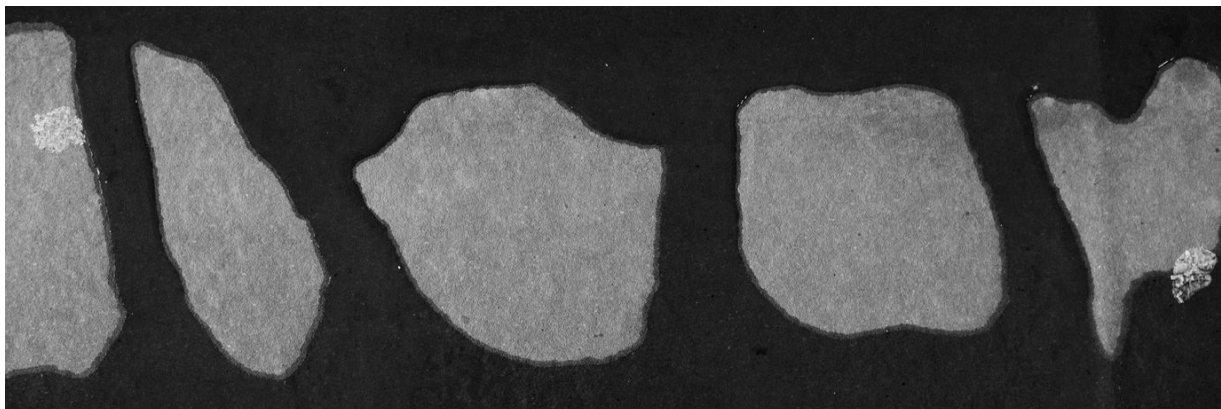


om du virkelig zoomer inn og ser på tre-fire perioder etter hverandre, men det bør være klart at et periodisk signal kun er en abstraksjon. La oss nå se litt på hvordan vi finner "fourierrekken" til et ikke-periodisk signal.

1 Finn fourierrekken til $y : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

for alle $T > 2$, og plot y og noen partialsummer på $[-T, T]$ for noen verdier av T .



¹Huskeregelen er "two pints per period" for $2\pi int/T$.

La oss nå si at du ønsker å finne fourierrekken til for eksempel $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

eller et annet signal som er **tidsbegrenset**, altså at det starter og stopper et eller annet sted på tidsaksen. Er det mulig å skrive en slik realistisk faenskap som en fourierrekke? La oss prøve. Kanskje vi kan ta fourierrekken til y i oppgave 1, og så la $T \rightarrow \infty$? Vi vet at

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

der

$$c_n(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-in\omega t} dt$$

La oss sette denne inn i fourierrekken:

$$y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-in\omega s} ds e^{in\omega t}$$

og gange og dele med 2π :

$$y(t) \sim \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} y(s) e^{-in\omega s} ds e^{in\omega t} \omega$$

Den ytterste summen kan nå tolkes som en riemannsum der gitteravstanden er ω og gitterpunktene $n\omega$. Når $T \rightarrow \infty$ går gitteravstanden mot null, og dersom det er rettferdighet i verden, går $y \rightarrow x$ og summen mot et integral fra uendelig til uendelig:

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\omega s} ds e^{i\omega t} d\omega$$

Det innerste integralet kalles **fourieromvendingen** eller **frekvensinnholdet** til x , og skrives

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Dette kan du tenke på som fourierkoeffisientene til signalet x , men siden signalet ikke er periodisk, trenger du mange mange mange flere frekvenser, og derfor blir

$$x(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

et integral istedet for en uendelig sum, slik vi er vant til når signalet er periodisk. Det siste integralet kalles **inversomvendingen** eller **rekonstruksjonen**.

- 2 Dette er en heuristisk utledning som ikke er spesifikk for x øverst på siden, men generell. Dette er det så og si ingen som ville kommet på av seg selv, så jeg kan komme til å spørre om den på eksamen. Jeg vet dessverre ikke om noen enklere måte å motivere fourieromvending på.



Vi skriver også

$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

for å understreke at fourieromvendingen er en operator som tar inn et signal og gir ut et annet. Det går an å føre et stringent bevis for at dersom x er et tilstrekkelig pent signal, er

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

men det er litt for hardt for oss.² Fourieromvending er ganske vanskelig å skjønne noe av i begynnelsen, men dersom du er komfortabel med fourierrekker og lineære systemer, er du nok godt rustet. Fourieromvending er helt ekstremt viktig i både matematikk og i et spektakulært utvalg forskjellige anvendelser: https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform

La oss nå regne ut et par omvendinger. Finn fourieromvendingen til

9 $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

(Sammenlikn med oppgave 1.)

10 $f(t) = \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$

Hva skjer når $a \rightarrow \infty$?

11 $x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$

(Hint: lettest om du skriver $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.)

12 $\delta(t)$

13 $f(t) = e^{-a|t|}$

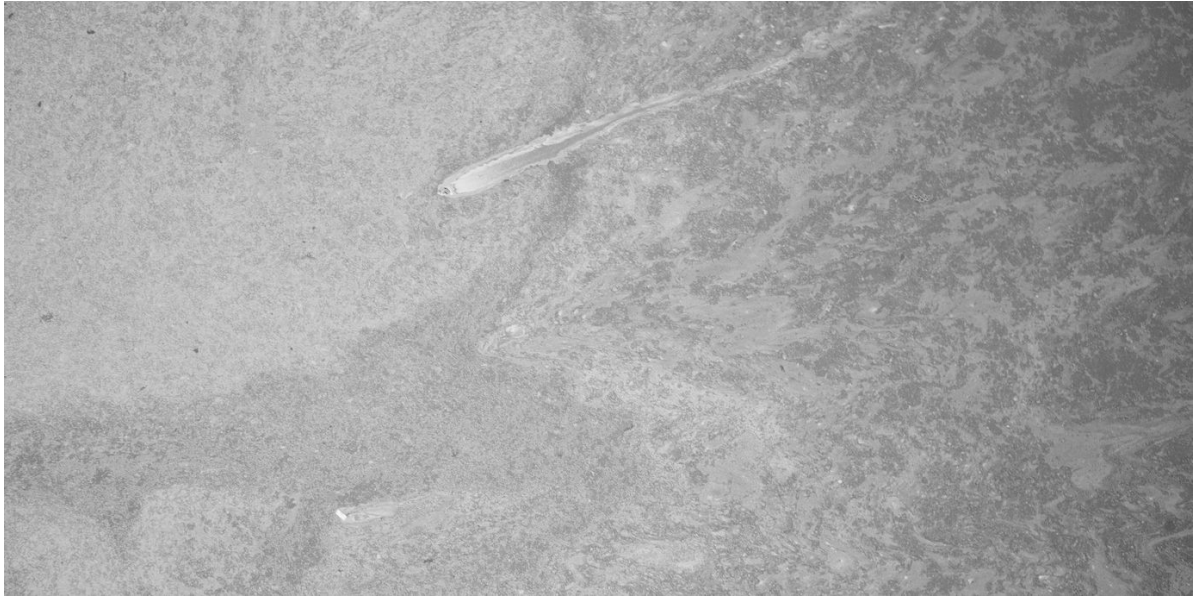
14 $f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$

15 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

Notasjonen $X(\omega)$ istedet for $\hat{x}(\omega)$ er innarbeidet i noen miljøer, men det er riktigere å skrive $X(i\omega)$.

16 Hvorfor det?

²Les Elias Stein og Rami Shakarchis klassiker "Fourier Analysis" om du lurer på dette. Den finnes på nett.



Stemmer, fourieromvending er bare dobbeltsidig laplacetransform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

evaluert i $s = i\omega$. Av den grunn er det vanlig å skrive

$$s = \sigma + i\omega$$

i laplacetransform, og jeg kommer derfor av prinsipp til å skrive $\hat{x}(\omega)$ eller $X(i\omega)$ og ikke $X(\omega)$. Den store forskjellen på fourier- og laplaceomvending er hva du putter inn og hva det brukes til. Vi laplaceomvender stort sett bare signaler på formen

$$x(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

og derfor skrives laplacetransform som regel

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

siden dette er underforstått. Vi fourieromvender derimot signaler som kan være forskjellig fra 0 overalt, men du kan ikke putte inn hva som helst. Et signal fra den virkelige verden må både starte og stoppe, og derfor er det naturlig å kreve at

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$$

for alle signaler du kommer til å fourieromvende. Dersom vi skal være helt trygge på at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

bør x være glatt og

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t|^k \left| \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right| < \infty$$

for alle k og n . Funksjoner som tilfredsstiller dette kravet, utgjør et uendeligdimensjonalt vektorrom som kalles Schwartzrommet. Det går an å slakke på dette kravet, men da må alt baseres på en mer komplisert integrasjonsteori oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tyvende århundre. Vi har allerede fourieromvendte funksjoner som ikke tilhører Schwartzrommet. Det går nok bra.

Siden fourier er i slekt med laplace, er regnereglene like, men noen av dem blir litt annerledes siden vi putter inn signaler som går mot null når $t \rightarrow \pm\infty$. Prøv å utlede at

$$\boxed{17} \quad \widehat{\dot{x}} = i\omega \hat{x} \quad \boxed{18} \quad \widehat{x(t-\theta)} = e^{-i\omega\theta} \hat{x} \quad \boxed{19} \quad e^{i\theta t} \widehat{x(t)} = \hat{x}(\omega - \theta) \quad \boxed{20} \quad \widehat{x(at)} = \frac{1}{|a|} \hat{x}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



I sannsynlighetsregningen kalles laplacetransform for **momentgenererende funksjon**, mens invers fourieromvending kalles **karakteristisk funksjon**.

- $\boxed{21}$ Finn fourieromvending og karakteristisk funksjon til normalfordelingen.
(Hint: Begynn med standardnormalfordelingen. Du må nesten vite at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$

Dette skal vi regne ut i neste semester.)

Nå skal vi ta et gjensyn med Balchens foldingstriks

$$x(t) = x(0)e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-a(t-s)} ds$$

som løser initialverdiproblemet $\dot{x} + ax = f$, $x(0) = x_0$. Integralet på høyresiden dukker til stadighet opp i studiet av LTI-systemer og det kalles **folding** eller **konvolusjon**. Det er et slags produkt mellom funksjoner, og den generelle definisjonen er

$$x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s) ds.$$

For signaler som er 0 når $t < 0$ reduserer konvolusjonen til

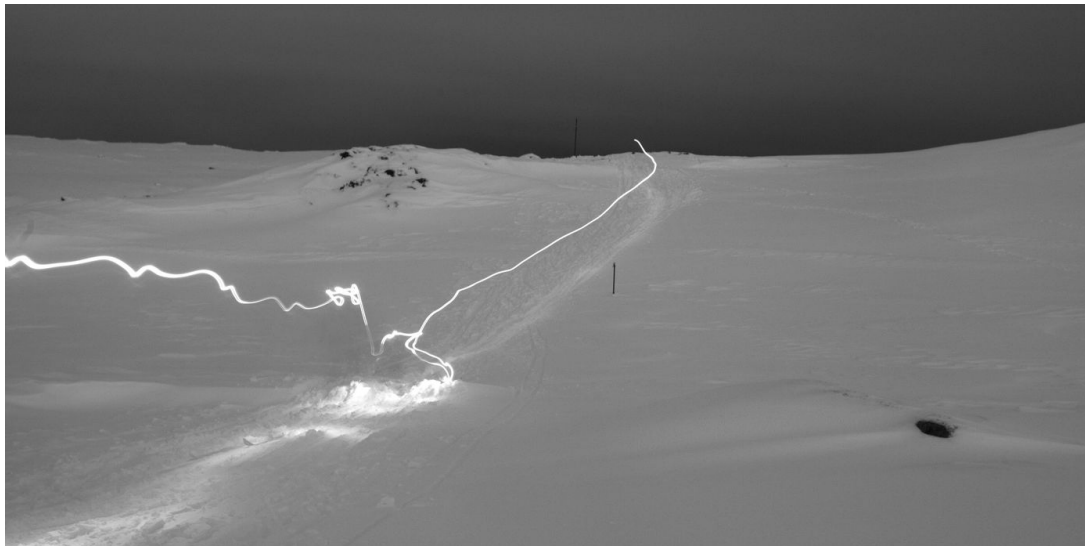
$$x * y = \int_0^t x(s)y(t-s) ds$$

og derfor vil konvolusjon ofte være definert slik i et typisk kapittel om laplacetransform i en typisk lærebok i ingeniørmatematikk. For å få en følelse av hva konvolusjon er, er det faktisk lurt å begynne med litt sannsynlighetsregning. La oss kaste to terninger.

- $\boxed{22}$ Finn sannsynlighetsfordelingen til $Z = \{\text{summen av antall øyne på to terninger}\}$.

Inspirert av dette kan vi gå litt videre. Anta at du har to uavhengige stokastiske variable X og Y med sannsynlighetstettheter $f(x)$ og $g(y)$.

23 Hva er sannsynlighetstettheten til $Z = X + Y$?



Dersom X tar verdien v og Y tar verdien $z - v$, tar $X + Y$ verdien z . Med andre ord kan $X + Y$ ta verdien z på mange forskjellige måter, og for å finne sannsynlighetstettheten til $X + Y$ må vi derfor summere opp bidraget fra alle måtene dette kan skje på, altså alle sannsynligheter på formen $f(v)g(z - v)$. Men dette er jo innmaten i konvolusjonsoperatoren! Sannsynlighetstettheten $h(z)$ til $X + Y$ blir derfor

$$h(z) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(z - v) dv.$$

Det som gjør konvolusjon så praktisk i forhold til lineær systemteori, kalles konvolusjonsteoremet. Vi bruker variabelskiftet $u = t - v$, $v = v$, og beregner

$$\begin{aligned} \widehat{x * y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t - v) dv e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t - v) e^{-i\omega t} dv dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(u) e^{-i\omega(u+v)} dv du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv y(u)e^{-i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{-i\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i\omega u} du = \hat{x}\hat{y} \end{aligned}$$

24 Denne kan komme på eksamen.

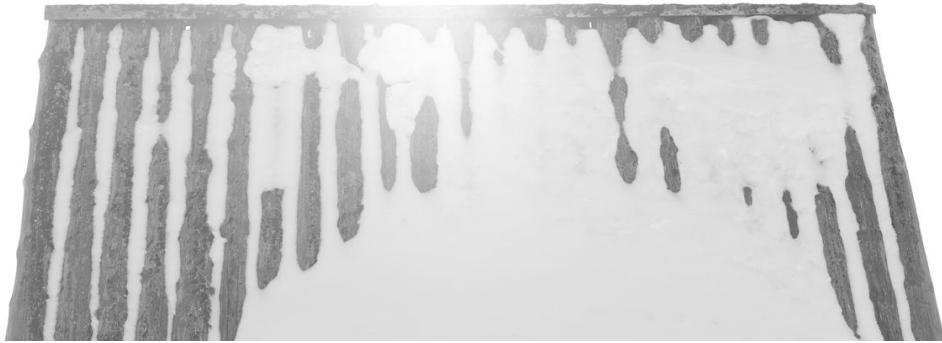
En liknende beregning gir **Plancherels identitet**

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)\overline{\hat{y}(\omega)} d\omega$$

som er analog til Parseval. Denne får vi bruk for til noen småting kommende uke, når vi skal fikle med litt kvantefysikk. I likhet med Parseval er det ikke uvanlig å skrive opp spesialtilfellet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{x}(\omega)\|^2 d\omega.$$

25 Beviset er i bunn og grunn identisk med utledningen av Parseval.



Konvolusjonsteoremet gjelder for laplacetransform og, men utledningen er bittelitt annerledes siden signalene er 0 for $t < 0$.

26 Løs $\ddot{x}(t) + x(t) = \sin t$ med $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

La oss avslutte med en litt heuristisk utgreining. La oss si at vi har løst systemet

$$Lx = f \quad x(0) = 0$$

med laplacetransform og fått

$$X(s) = H(s)F(s).$$

Konvolusjonsteoremet gir nå at

$$x = h * f$$

så hvis vi kunne finne ut hvilket signal som har laplacetransform H , så er det bare å skrive opp løsningen x . Men dersom vi løser

$$Lx = \delta$$

med omvending får vi

$$X = H(s)\mathcal{L}(\delta) = H(s)$$

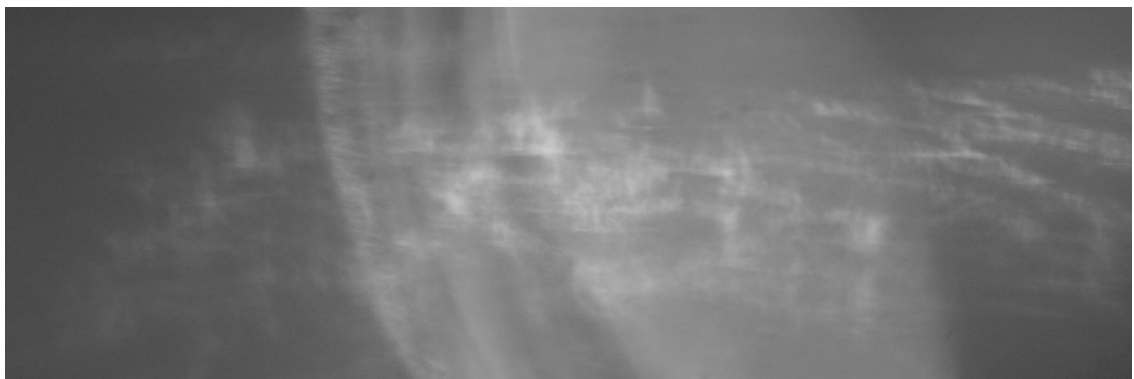
så impulsresponsen er visst det ukjente signalet vårt.

Dette er forklaringen på at impulsresponsen har fått bokstaven h ; det er det signalet som har laplacetransform H . Diracpulsen er et viktig verktøy i signalbehandling, for den er et signal som inneholder "like mye av alle frekvenskomponenter". Det sies at Asbjørn Krogstad (legendarisk professor i akustikk på NTH) tok med seg startpistol og fyrte av et skudd inne i Nidarosdomen i forbindelse med et oppdrag der han skulle analysere akustikken i rommet. Jeg har en kamerat som heter Elsys Torjus og han klapper i mikrofonen når han skal teste filtrene han har skrevet. På elektroingeniørfolkemunne (der det kan være et litt diffust skille mellom laplace- og fourieromvending) sier man gjerne at

Fourieromvendingen til impulsresponsen er det samme som frekvensresponsen til systemet.

27 Hvis du synes det var litt kjekt med diracpulsen og sånt, kan du prøve å beregne

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega.$$



UKENS NØTTER

- 1 En amerikaner står og koser seg med å perforere en uendelig lang låvevegg med maskingeværet sitt. Han er ganske full og har det kjempekjekt, og løpet peker i tilfeldige og uniformt fordelte vinkler mellom $\theta = -\pi/2$ og $\theta = \pi/2$. (Når $\theta = 0$ er løpet ortogonalt på veggen). Finn sannsynlighetstettheten og den tilhørende karakteristiske funksjonen til treffpunktet x på veggen. Du finner LF på side 154 i Hardle og Simar:
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-26006-4>

- 2 Fourieromvending er et viktig verktøy for å analysere frekvensinnholdet i signaler. Men de fleste gamle NTH-ere husker det fra studietiden som en unødvendig knotete og vanskelig teknikk for å løse noen typer differensiallikninger. Fourieromvend varmelikningen med hensyn på x og bruk $u(x, 0) = f(x)$ til å forklare at (jeg har satt $\alpha = 1$ for å være grei)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4t}} dv.$$

- 3 La $x, y \in \mathbb{C}^N$. I diskret signalbehandling skriver de

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \overline{y(k)}$$

som er det vanlige komplekse skalarproduktet, men med motsatt vei, slik at det er lineært i første og ikke andre faktor. Vis at dersom

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2\pi i n k / N} \quad \text{er} \quad x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi i n k / N}.$$

Vektoren X_n kalles den **diskrete fourieromvendingen** til x .

- 4 Sett $c_n = 1$ for alle n og plott partialsummene til den resulterende fourierrekken. Hva ser du?



Dette semesteret har vi vært borti egenverdier og egenvektorer i forbindelse med LTI-systemer. Egenvektoren til differensialoperatoren

$$\frac{d}{dt}$$

er eksponensialfunksjonen $x(t) = e^{at}$. Venstresiden i et LTI-system, slik som

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x$$

er en lineærkombinasjon av differensialoperatorene, og derfor er det i retrospekt ikke så overraskende at eksponensialfunksjonen er lett å jobbe med; egenvektorene er jo fremdeles $x(t) = e^{at}$, men de korresponderende egenverdiene avhenger av differensialoperatoren.

- 5 I høst brukte vi dette til å finne naturlig respons. Hvilken egenverdi korresponderer dette til?
- 6 I januar fant vi frekvensresponsen. Hvilken egenverdi korresponderer dette til?
- 7 Hvis du tenker på konvolusjon med signalet x som en lineæroperator som tar inn et signal y :

$$L(y) = x * y = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du$$

er funksjonen

$$g(s, t) = e^{st}$$

en egenvektor til denne operatoren. Hva er egenverdien?



2 - 12 - SCHRÖDINGERLIKNINGEN

Komplekse indreprodukt tar litt tid å venne seg til. Men det har en anvendelse som er ekstremt viktig, nemlig kvantefysikk. Alle må kunne litt om kvantefysikk. Kvantedatamaskinen er på vei. ¹ Et moderne studium av kjemi er selvfølgelig utenkelig uten kvantefysikk, og det er umulig å forstå en transistor uten kvantefysikk. Det sies at ingen forstår kvantefysikk. Akkurat nå er jeg den eneste her som ikke forstår kvantefysikk, og etter eksamen kommer heller ikke dere til å forstå kvantefysikk, og så kan dere gå ut i verden og spre deres uvitenhet. Kvantefysikk er litt abstrakt, så det kan være lurt å lese litt om de forskjellige historiske eksperimentene som ledet frem til teorien. ²

Kvantefysikk bygger på postulatet at alt som er verdt å vite om en partikkel kan hales ut av partikkelens komplekse **partikkelbølgefunksjon**. ³ Denne kalles Ψ (uttales "psi") og finnes ved å løse den berømte **schrödingerlikningen**:

$$i\hbar\dot{\Psi}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t)$$

Her er m partikkelens masse og $\hbar = 1.054571817... \cdot 10^{-34}$ Plancks reduserte konstant. Funksjonen V er et energipotensiale. Schrödingerlikningen kan utledes, men det er for komplisert for oss. ⁴

Partikkelbølgefunksjonen Ψ har ingen direkte fysiske tolkninger, men

$$|\Psi(x,t)|^2 = \overline{\Psi(x,t)}\Psi(x,t)$$

tolkes som **sannsynlighetstettheten for partikkelens posisjon**. Dette kalles bornfortolkningen, etter Max Born. Dersom partikkelen kan befinne seg et sted langs x -aksen, er sannsynligheten for at den befinner seg mellom a og b gitt ved

$$\int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx,$$

og dersom vi antar at partikkelen må befinne seg et sted på x -aksen, må vi ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1.$$

for alle t . Hvis dette kravet er oppfylt, sier vi at Ψ er **normalisert**.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_computing

²https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_quantum_mechanics

³https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_function

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation

Tidlig i semesteret løste vi det endimensjonale varmeledningsproblemet og den endimensjonale vibrerende strengen ved separasjon av variable. Dette skal vi gjøre for schrödingerlikningen også. Men i kvantefysikk separerer de variable på en helt spesifikk måte. La oss ta unna dette først. For enkelhets skyld skal vi anta at V kun avhenger av x .

- 1 Sett $\Psi(x, t) = f(t)\psi(x)$ inn i schrödingerlikningen og vis at

$$i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

Akkurat som for bølge- og varmelikningen, er det slik at

$$i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \quad \text{og} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

må være konstante.

- 2 Hva slags benevning har denne konstanten?

(Hint: Benevningen til Ψ kan utledes fra at $|\Psi|^2$ er en sannsynlighetstetthet, men det er ikke nødvendig å vite for å løse oppgaven.)

Hvis du ikke skjønnte oppgaven over, er det et hint at vi kaller separasjonskonstanten E :

$$i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E$$

- 3 Bruk likningen over til å vise at

$$f(t) = e^{-Eit/\hbar}$$

samt utlede den **tidsuavhengige Schrödingerlikningen**

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi = E\psi$$

Den tidsuavhengige schrödingerlikningen er en egenvektorlikning, der

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

er lineæroperatoren (denne kalles **hamiltonoperatoren**) og E er egenverdien. Energien til en bitteliten partikkel er visst alltid egenverdien til en eller annen lineæroperator.



Det endimensjonale varmeledningsproblemet og det vibrerende-streng-problemet har en fetter i kvantefysikken, kalt **partikkel-i-boks**:

$$i\hbar\dot{\Psi}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(x,t) \quad \Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0 \quad \int_0^\pi |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Den fysiske tolkningen til partikkel-i-boks er at du har en partikkel som lever på intervallet $[0, \pi]$. Inne på intervallet kan den gjøre som den vil så lenge den respekterer schrödingerlikningen, men i $x = 0$ og $x = \pi$ står det vegger den ikke kan passere. I en typisk fysikkbok vil dette være formulert som $V(0) = V(\pi) = \infty$, men jeg har oversatt det til randkravene

$$\Psi(0,t) = \Psi(\pi,t) = 0$$

slik at det skal bli forståelig for oss. Hele situasjonen fremstår selvfølgelig som litt corny om man ikke har sett det før, men realistiske differensiallikninger kan sjelden løses, og vi må alltid starte med et eller annet problem som er så enkelt at vi i det hele tatt kan regne ut noe som helst.

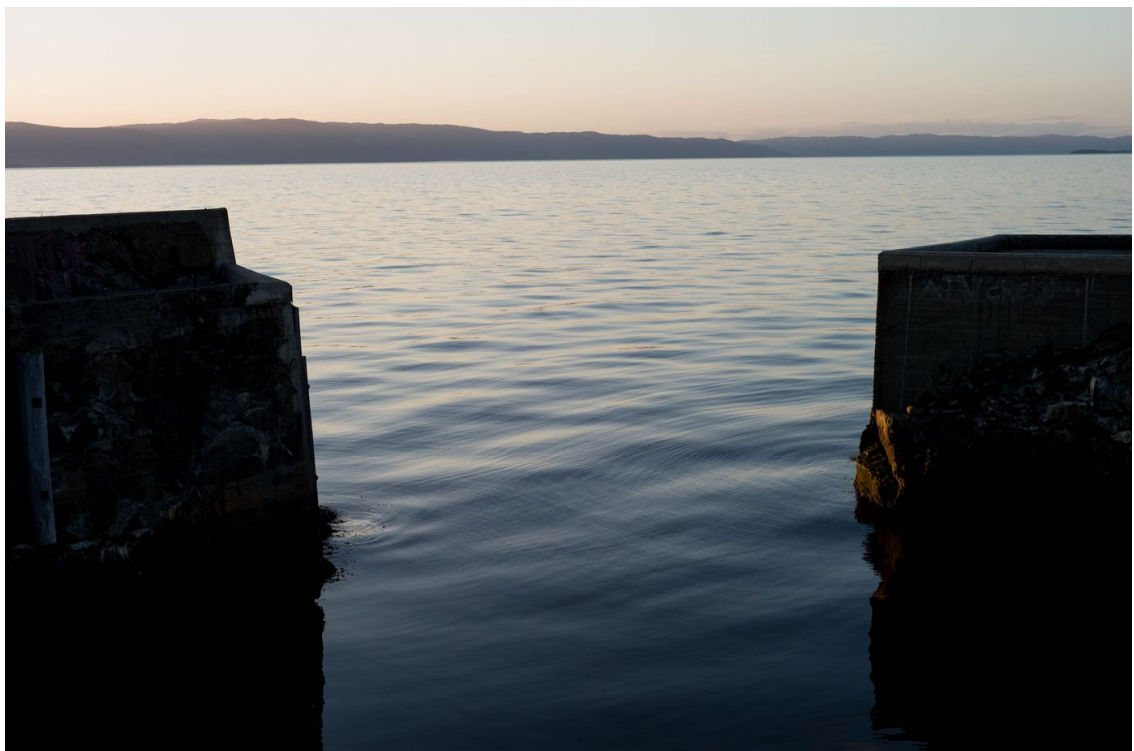
- 4 Bestem de tillatte energinivåene E_n ved å bruke randkravene og løsningene til den tidsuavhengige schrödingerlikningen, som blir

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + E\psi = 0$$

og bruk bornfortolkningen til å vise at løsningene til partikkel-i-boks-problemet er

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-E_n i t / \hbar} \sin nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i \frac{\hbar}{2m} n^2 t} \sin nx.$$

(Hint: Det meste av arbeidet i denne oppgaven har du faktisk allerede gjort. Hvis du ser nøye på varmelikningen og schrödingerlikningen, vil du se at det i bunn og grunn er samme likning dersom $V = 0$. Det er kun normaliseringen som gjenstår.)



Her kan det være verdt å merke seg at den berømte kvantifiseringen av energinivåer er en konsekvens av kombinasjonen av randkrav og differensiallikning. Dette skjedde for varmeledningsproblemet og vibrerende-streng-problemet også, men da var ikke separasjonskonstanten energi, og du tenkte kanskje ikke så mye over det. De forskjellige løsningene Ψ_n er bølgefunksjoner som korresponderer til partikkelens forskjellige tillatte energinivåer. Du lurar sikkert nå på hvorfor alt dette er en naturlig fortsettelse av økten om komplekse indreprodukter. Grunnen er at kvantefysikkfolk er så opptatt av indreprodukter at Paul Dirac laget en egen notasjon for det:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi} \phi \, dx$$

Merk at Dirac har valgt motsatt konvensjon i forhold til fourieranalysen hva angår linearitet - dette indreproduktet er lineært i andre faktor. Dette er grunnen til at jeg plaget deg så mye med at indreproduktet kan være lineært i *enten* første eller andre faktor.

- 5 Vis at bølgefunksjonene til de forskjellige energinivåene til partikkel-i-boks er ortonormale:

$$\langle \Psi_k | \Psi_n \rangle = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

(Hint: Merk at

$$\overline{f(t)} f(t) = e^{Eit/\hbar} e^{-Eit/\hbar} = 1$$

så lenge E er reell, så denne kansellerer alltid. Vi kommer tilbake til hvorfor E alltid er reell.)



Vi kan verifisere direkte at partikkel-i-boks tilfredsstiller

$$\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = 1$$

for alle energinivåer og for alle t . Men uttrykket $\langle \Psi | \Psi \rangle$ er faktisk en invariant for schrödingerlikningen, på samme måte som totalenergien

$$m \frac{1}{2} (l\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta$$

er en invariant til pendellikningen

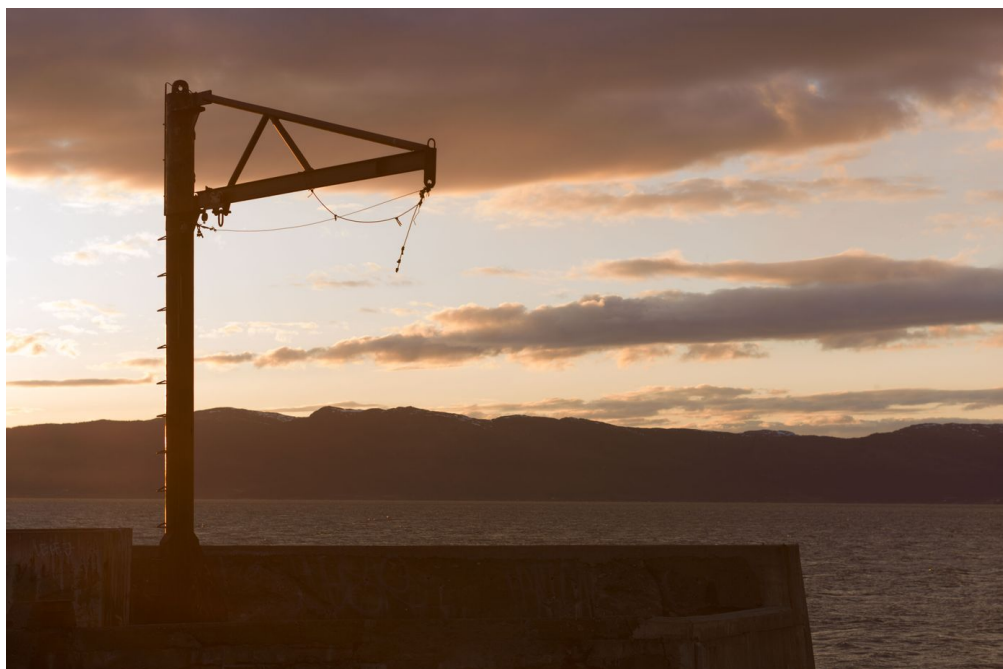
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Dette er kanskje bittelitt for hardt å utlede selv, så vi gjør det heller slik at jeg gir deg utledningen, og så må du kunne den til eksamen. Anta at V er reell (samme grunn som E , vi kommer tilbake til dette). Vi beregner:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Psi}(x, t) \overline{\Psi(x, t)} + \Psi(x, t) \overline{\dot{\Psi}(x, t)} dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta \Psi(x, t) \overline{\Psi(x, t)} - \Psi(x, t) \overline{\Delta \Psi(x, t)} dx \quad (\text{bruk schrödingerlikningen}) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\nabla \Psi(x, t) \overline{\Psi(x, t)} - \Psi(x, t) \overline{\nabla \Psi(x, t)} \right) dx \quad (\text{delvis integrasjon}) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\nabla \Psi(x, t) \overline{\Psi(x, t)} - \Psi(x, t) \overline{\nabla \Psi(x, t)} \right)_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0 \end{aligned}$$

Dette betyr altså at normaliseringen ikke ødelegges over tid; har du normalisert løsningene for ett tidspunkt, vil de fortsette å være korrekt normaliserte også i fremtiden.

6 Dette kan komme på eksamen.



Vi kan nå spinne videre på dette og oppgave 1. Forventet posisjon er

$$\int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx.$$

Informasjon om hvordan den forventede posisjonen flytter seg i tid, finnes antagelig i den tidsderiverte av denne. Så la oss derivere (har stort sett brukt de samme triksene som i forrige beregning):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x (\dot{\Psi} \bar{\Psi} + \Psi \dot{\bar{\Psi}}) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x (\Delta \Psi \bar{\Psi} - \Psi \Delta \bar{\Psi}) dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla \Psi \bar{\Psi} - \Psi \nabla \bar{\Psi}) dx \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \Psi \bar{\Psi} dx = -\frac{i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx \end{aligned}$$

Vi kan nå gange med m for å få bevegelsesmengde og herje litt med uttrykket:

$$m \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx$$

La oss til slutt skrive forventet posisjon slik:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} x \Psi dx$$

Nå ser vi at både x i forventet posisjon og $-i\hbar \partial/\partial x$ i den tidsderiverte av forventet posisjon er klemt inne mellom $\bar{\Psi}$ og Ψ i et indreprodukt. Paul Dirac har selvfølgelig laget notasjon for dette også; kvantefysikkfolk liker best å skrive det slik:

$$\langle \Psi | L | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi} L \Psi dx$$

Jammen santen, kvadratisk form her óg! De to ovennevnte lineæroperatorene er gitt ved

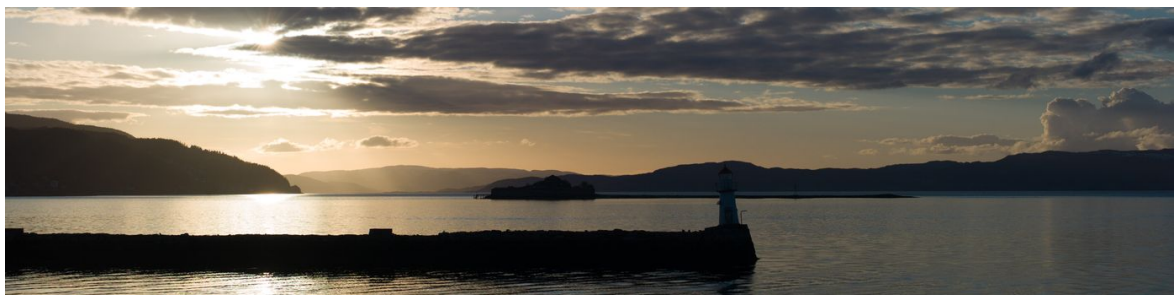
$$\hat{x}\Psi = x\Psi \quad \text{og} \quad \hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi.$$

Kvantefysikkbøker begynner gjerne her uten særlig forklaring - de sier at kan det måles i lab er det egenverdien til en hermittisk lineæroperator. Dette er et fundamentalt postulat i kvantefysikk.

7 Bruk dette til å forklare at E og $V(x)$ må være reelle.

Merkelig. Men vi som kan fourieranalyse har noen ess i ermet som ikke andre mennesker har.

8 Se nå nøye på $\hat{x}$ og $\hat{p}$ og så litt på regnereglene for fourieromvending.
(Forvirrende nok har hattene i $\hat{x}$ og $\hat{p}$ ingenting med fourieromvending å gjøre.)



Helt riktig, **bevegelsesmengde er koblet til fourieromvendingen til posisjon**. Dette er ikke så veldig overraskende for den som husker de Broglies partikkelbølgeformel:

$$p = \frac{h}{\lambda} = h\xi = \hbar k$$

der λ er bølgelengde og

$$\xi = \frac{1}{\lambda}$$

er romlig frekvens og

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

er bølgetall. Merk at $k = 2\pi\xi$. Nå er det slik at når man fourieromvender i rom, er det vanlig å omvende med hensyn på bølgetall:

$$\hat{\Psi}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-ikx} dx \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(k, t) e^{ikx} dk$$

eller med hensyn på romlig frekvens:

$$\hat{\Psi}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad \Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(\xi, t) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

Den første av disse er matematisk identisk med den vi er vant til i tid (bølgetallet k og vinkelfrekvensen ω er analoge størrelser i henholdsvis rom og tid), men akkurat for kvantefysikk er det mer praktisk å fourieromvende med hensyn på romlig frekvens ξ . Det er imidlertid slik at formlene for denne varianten er litt annerledes enn vi er vant til, så jeg tror det er enklest å fourieromvende med hensyn på bølgetall k og så harymekke litt på slutten. La oss først bruke Plancherel, og se at

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(k, t)|^2 dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(2\pi\xi, t)|^2 2\pi d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(2\pi\xi, t)|^2 d\xi \end{aligned}$$

så det er ikke helt urimelig å tolke $|\hat{\Psi}(2\pi\xi, t)|^2$ som en sannsynlighetstetthet. Dersom vi bruker Plancherel og litt fourieromvendingsregneregler på tidsendringen av forventet posisjon, får vi

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx && \text{fra forrige side} \\ &= \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(x, t) \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx \\ &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\bar{\Psi}}(k, t) k \hat{\Psi}(k, t) dk && \text{plancherel og } \widehat{\nabla \Psi} = ki\hat{\Psi} \\ &= \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\bar{\Psi}}(2\pi\xi, t) (2\pi\xi) \hat{\Psi}(2\pi\xi, t) 2\pi d\xi = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\bar{\Psi}}(2\pi\xi, t) \xi \hat{\Psi}(2\pi\xi, t) d\xi. \end{aligned}$$

Det siste integralet kan tolkes som forventet romlig frekvens, og siden det er ganget med $\hbar$, må vi vel tolke hele greia som forventet bevegelsesmengde på grunn av de Broglie.

Til slutt skal vi se på et annet klassisk problem vi har det som trengs for å takle, nemlig den **kvanteharmoniske oscillatoren**. Dette er schrødingelikningen med potensialet

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

slik at vi får

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \psi = E\psi.$$

I en typisk kvantefysikkbok vil man gjerne finne mye stoff om denne likningen, men vi skal kjøre en litt minimalistisk utgreining av det aller viktigste. Det er ofte en grei strategi å se voldsomt nøye på en differensiallikning, bruke intuisjonen man har bygget opp etter mange år med matematikkslit, og så bare gjette på løsningen. Eller spørre en matematiker, som Atkins faktisk foreslår.

- 10 En av løsningene er faktisk en skalarmultippel av normalfordelingsfunksjonen

$$\psi_0(x) = e^{-cx^2}.$$

Sett inn og finn c .

Når Dirac fant ut av dette, laget han seg en trapp basert på operatoren

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} + im\omega x \right).$$

Den er ganske lur.

- 11 Vis at dersom ψ løser den likningen over med energi E , løser $a_+ \psi$ den samme likningen, men med energi $E + \hbar\omega$.

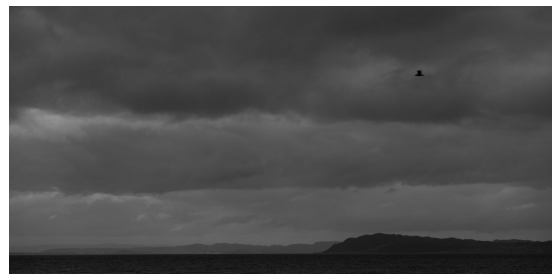
Nå er det bare å churne ut løsninger. Du kan resonnerer fysisk for at ψ_0 over er grunntilstanden, og at de andre tilstandene er gitt ved

$$\psi_n(x) = a_+^n \psi_0(x).$$

Dersom du fortsetter å påføre a_+ n ganger, får du løsninger som er normalfordelingsfunksjonen ganger en skalar ganger de berømte **hermitepolynomene**.⁵ Hermitepolynomene er ortogonale, men med hensyn på et litt rart indreprodukt:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$$

- 12 Vis at dette er et reelt indreprodukt.



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Hermite_polynomials

UKENS NØTTER

Heisenbergs usikkerhetsprinsipp er en matematisk lov som forteller noe om en minste skranke for produktet av standardavvikene til $|\Psi|^2$ og $|\widehat{\Psi}|^2$:

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} |\Psi|^2 dx \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x (\nabla \Psi \bar{\Psi} + \Psi \nabla \bar{\Psi}) dx \right| \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| (|\nabla \Psi \bar{\Psi}| + |\Psi \nabla \bar{\Psi}|) dx \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\Psi| |\nabla \Psi| dx \\
 &\leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \Psi|^2 dx} \\
 &= 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 dx} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\nabla \Psi}|^2 dk} \\
 &= 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 dx} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\widehat{\Psi}|^2 dk} \\
 &= 4\pi \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi|^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\Psi}|^2 d\xi}
 \end{aligned}$$

delvis integrasjon

cauchy-schwarz

plancherel

derivasjonsregel for fourieromvending

1 Hm.



2 - 13 - SKJELETTENE I SKAPET

I et kurs i matematikk for ikkematematikere, må vi koste mange tekniske detaljer under teppet. Grunnen er enkel. Dersom du har fulgt med til nå, har du litt peiling på differensiallikninger, lineæralgebra, fourieranalyse og kvantefysikk. Men prisen vi betaler for å studere så mye forskjellig, er at alt som heter stringens hives på havet. Jeg har fått mye kjeft av John Aslak det siste året. Nå skal vi avslutte første studieår med en titt på ymse ting han har kjefta på meg for.

Det første er bruken av ordet "vis". Når du viste at en innbyrdes ortogonal vektormengde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengig så lenge det er et endelig antall vektorer og ingen av dem er nullvektoren, tok du indreproduktet av likningen

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1)$$

med $\mathbf{v}_k$, og fikk

$$(c_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k) + (c_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k) + \dots + (c_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_k) = (\mathbf{0}, \mathbf{v}_k). \quad (2)$$

Hvis du nå vet at $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_k) = 0$ og bruker lineariteten på venstre side, får du

$$c_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k) + c_2 (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k) + \dots + c_n (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_k) = 0 \quad (3)$$

og bruker du ortogonaliteten, får du

$$c_k (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) = 0. \quad (4)$$

Hvis du nå til slutt vet at $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \neq 0$ så lenge $\mathbf{v}_k$ ikke er nullvektoren, kan du slutte at $c_k = 0$, og dersom du gjentar dette resonnementet for alle k , vet du at $c_k = 0$ for alle k , og da vet du at vektorene er lineært uavhengige. Dette ville nok de fleste matematikere gå med på som et noenlunde stringent bevis.¹

Problemene starter i det vi begynner å si sånne ting som at funksjoner på intervallet $[-T/2, T/2]$ er ortogonale. I resonnementet over trengte vi å vite at $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k) \neq 0$ dersom $\mathbf{v}_k$ ikke er nullvektoren. Dette kan i noen tilfeller være diskutabelt. La oss begynne med en titt på konseptet areal.

1 Finn arealet under grafen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Du syntes sikkert det var en lett oppgave. Hva med denne?

2 Finn arealet under grafen til funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

¹Vi har riktignok brukt noen småting som følger av vektorromsaksiomene, sånn som at $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, men det er det antagelig ingen som husker, for det var i forrige semester og jeg plaget deg ikke så mye med slikt det semesteret.

Oppgavene over var designet slik at det skulle være litt vanskelig å se forskjell på dem. Begge ber deg finne arealet til et kvadrat med sidekant 1. Den eneste forskjellen er funksjonsverdien i $x = 0$. Vi kan vel være enige om at dette ikke bør ha noe å si for arealet, og det har det ikke heller. Spørsmålet er om vi skal tenke f og g som "samme" funksjon, til tross for at de er forskjellige i ett enkelt punkt. For slike tilfeller finnes det et navn; vi sier at f og g er like **nesten overalt**.²

Nå kan vi se på et problem med indreproduktets andre aksiom:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

Det er et viktig poeng at indreproduktet ikke skal kunne være null med mindre du putter inn nullvektoren; dette trengte vi å vite i resonnementet om ortogonalitet og lineær uavhengighet. Men dersom vi er enige i at arealet under både f og g er 1, er

$$\int_0^1 f(x) - g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 1 - 1 = 0$$

selv om $f - g$ ikke er nullfunksjonen:

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Med andre ord er det litt fishy å påstå at

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

er et indreprodukt uten å si noe mer om f og g . Og skal vi si slikt som at dersom

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{er} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

må vi nesten ta stilling til at dersom to signaler er like bortsett fra i ett enkelt punkt, har de samme fourieromvending, og det er umulig for oss å vite hvilket av dem som kommer ut av rekonstruksjonen.

3 Kan du finne flere problematiske eksempler?



²https://en.wikipedia.org/wiki/Almost_everywhere

Det finnes nå to klassiske strategier for å ro seg trygt i land fra disse problemene:

C: **alltid** legge strenge restriksjoner på hvilke funksjoner man får lov til å herje med

L: ikke bry seg så mye om at funksjoner er forskjellige i enkeltpunkter

Jeg har kalt den første strategien for "C" etter Augustin Louis Cauchy, oppfinneren av begrepet **kontinuerlig funksjon**.³ Velger man denne strategien, tar man den klassiske veien inn i matematisk analyse. Fordelen med dette er at en matematikkstudent kan få oppleve stringent oppbygning av matematikk relativt tidlig i studiet. Ulempen for en ingeniør er at man i anvendelser fort begynner å bryte de nødvendige restriksjonene veldig fort, og da forsvinner jo hele poenget med stringens, og ingen skjønner hva de skal med det. At noe så enkelt som firkantpulsen

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

er inversomvendingen til sincfunksjonen

$$\hat{x}(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

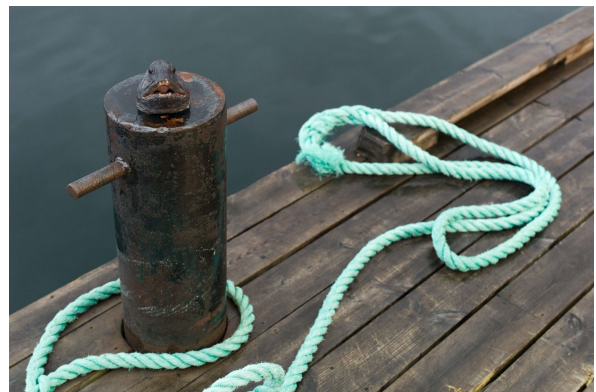
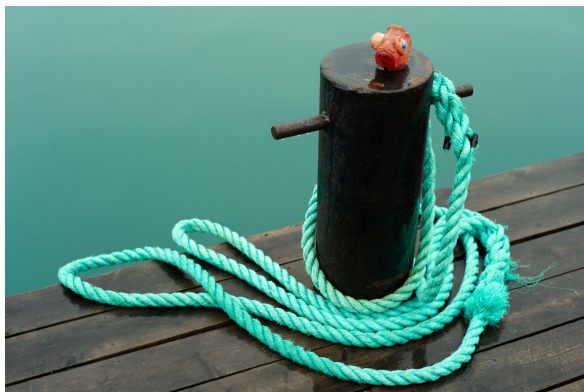
kan vi bare glemme å vite med hundre prosent sikkerhet. Det kunne jo like gjerne vært

$$y(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

eller

$$z(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \\ 187 & t = 1 \\ 42 & t = -1 \end{cases}$$

Den andre strategien ligger i bånn for noe som kalles **målteori**, oppfunnet av Henri Lebesgue tidlig i det tjuende århundret. I grove trekk bygger man alt på **ekvivalensklasser av funksjoner** istedet for funksjoner; for eksempel er signalene x , y og z over i samme ekvivalensklasse siden de bare er forskjellige i enkeltpunkter. Fordelen med denne strategien er at du kan herje ganske fritt, men ulempen er at det er altfor abstrakt for oss.⁴



³Jeg trodde lenge at han oppfant ϵ - δ -resonnementet, men det var visst Bernhard Bolzano.

⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics))

Det er i bunn og grunn ikke noen vits i å prøve å lage en stringent oppbygning av matematikken i et ingeniøremne, for det er bare John Aslak og et par andre som ville skjønt noe av det eller synes det var interessant. Men det kan være greit å ta en liten titt på hvilke skjeletter vi har gjemt i skapet til nå, for mange av dere kommer til å støte på begrepsapparatet på et senere tidspunkt.

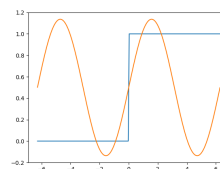
Det vi skal gjøre, er å pløye oss gjennom en klassisk matryosjka av funksjonsklasser. Mennesker elsker å kategorisere, og vi har selvfølgelig kategorisert funksjonene. Den ytterste matryosjkaen heter bare funksjon. Den innafor der igjen heter **kontinuerlig funksjon**. Det finnes to klassiske strategier for å definere kontinuerlig funksjon. Den første er å gå rett på. Vi sier at en funksjon er kontinuerlig i punktet x_0 dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$\|x_0 - x\| < \delta \implies \|f(x_0) - f(x)\| < \epsilon \quad (5)$$

for alle x i nærheten av x_0 . En funksjon er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig overalt i definisjonsområdet sitt.⁵ Denne definisjonen er fryktet og hatet av titusenvs av NTH-studenter opp gjennom tidene, men det finnes heldigvis et spesialtilfelle som er lett å huske:

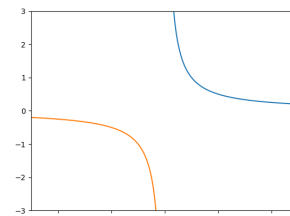
En funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlig hvis og bare hvis du kan tegne den fra a til b uten å løfte blyanten fra papiret.

- 4 Hvilken funksjon er kontinuerlig, den oransje eller blå? Se nøye på definisjonen. (Denne oppgaven illustrerer hvorfor du aldri skal tegne en vertikal linje der en diskontinuerlig funksjon har et sprang.)



En ting som kan være litt forvirrende i starten, er spørsmålet hvorvidt $1/x$ er en kontinuerlig funksjon. Dette illustrerer at man må spesifisere definisjonsmengden før man kan avgjøre om en funksjon er kontinuerlig. Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$



eksisterer ikke og $1/x$ er ikke definert i origo, så den er definitivt ikke kontinuerlig i origo.⁶ Men $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

er kontinuerlig. Det som skaper forvirring her er at den største mulige definisjonsmengden til $1/x$ (altså alle reelle tall unntatt null) er punktert i origo. Kontinuitet er en lokal egenskap, og den korresponderer ikke kjempegodt til det mentale bildet en typisk ikkematematiker vil ha av en graf som kan tegnes uten å løfte pennen fra papiret, med mindre definisjonsmengden er et lukket intervall. Derfor er det tryggest når definisjonsmengden er et lukket intervall. I en typisk analysebok er det mye mas om noe som kalles kompakte mengder. Dette er en generalisering av lukket og begrenset intervall, og alt for komplisert for oss.⁷

⁵Jeg har skrevet $\|\cdot\|$, fordi denne definisjonen fungerer fint i alle dimensjoner.

⁶Merk at f må være definert i x for å være kontinuerlig i x .

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space

En alternativ strategi er å først definere grenseverdi. En funksjon f sies å ha grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x_0 - x| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

En funksjon f er kontinuert i x_0 dersom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Disse to definisjonene av kontinuert funksjon er ekvivalente. Jeg har skrevet opp begge, for noen bøker bruker den ene og noen den andre. Dette kan være forvirrende i starten. Sjekk ut studass Kallands geniale javascript med røde og grønne fargekoder her:

<https://tma41x1.math.ntnu.no/12/epsilon-delta/>

- 5 Sett $x_0 = 0.5$ i studass Kallands javascript og merk deg hvordan du ikke klarer å få linjene til å bli grønne uansett hvor mye du prøver.

- 6 Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuert uansett hva c er.

- 7 Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuert i $x = 0$.

Får du til oppgaven under, vil du kanskje se at dersom jeg hadde bedt deg sjekke at

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx$$

er det et indreprodukt så lenge f og g er kontinuerte på $[0, 1]$, hadde vi vært på trygg grunn.

8
$$z(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \\ 187 & t = 1 \\ 42 & t = -1 \end{cases} \quad \text{Kontinuert?}$$

TMA4101/4106/4111/4121



Hvis du synes dette er teknisk og uforståelig, kan jeg trøste deg med at Isaac Newton klarte å finne opp både derivasjon og integrasjon uten å ha en presis ide om hverken reelle tall eller grenseverdier, så det er fullt mulig å hoppe over hele denne undervisningsuken og allikevel opparbeide en helt grei arbeidskunnskap om kalkulus. Men dette er et kurs i matematikk, så vi må nesten se litt på det. Fordelen med å forstå grenseverdi er at vi kan definere stigningstall.

En funksjon f er **deriverbar** i x dersom

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eksisterer.

11 Forklar at en deriverbar funksjon må være kontinuerlig.

12 Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ikke er deriverbar i $x = 0$.

13 Forklar at $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

ikke er deriverbar i $x = 0$.

En merkelig fun fact er at en funksjon kan være deriverbar til tross for at den derivate ikke er en kontinuerlig funksjon.

14 Forklar at

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$. Er f' kontinuerlig i $x = 0$?



Derav følgende definisjon.

- En funksjon f er n **ganger deriverbar** i x dersom den n -te deriverte eksisterer i x .
- Dersom den n -te deriverte er en kontinuerlig funksjon, sier vi at f er n **ganger kontinuerlig deriverbar**, og vi skriver $f \in \mathcal{C}^n$.
- Dersom f kan deriveres uendelig mange ganger uten å støte på noen problemer, sier vi at f er **glatt**, og skriver $f \in \mathcal{C}^\infty$.

15 La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Er $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$? $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$?

Dette var nesten hele matryosjkaen. Den siste og innerste heter **analytisk funksjon**, og består av funksjoner som kan skrives som en taylorrekke:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

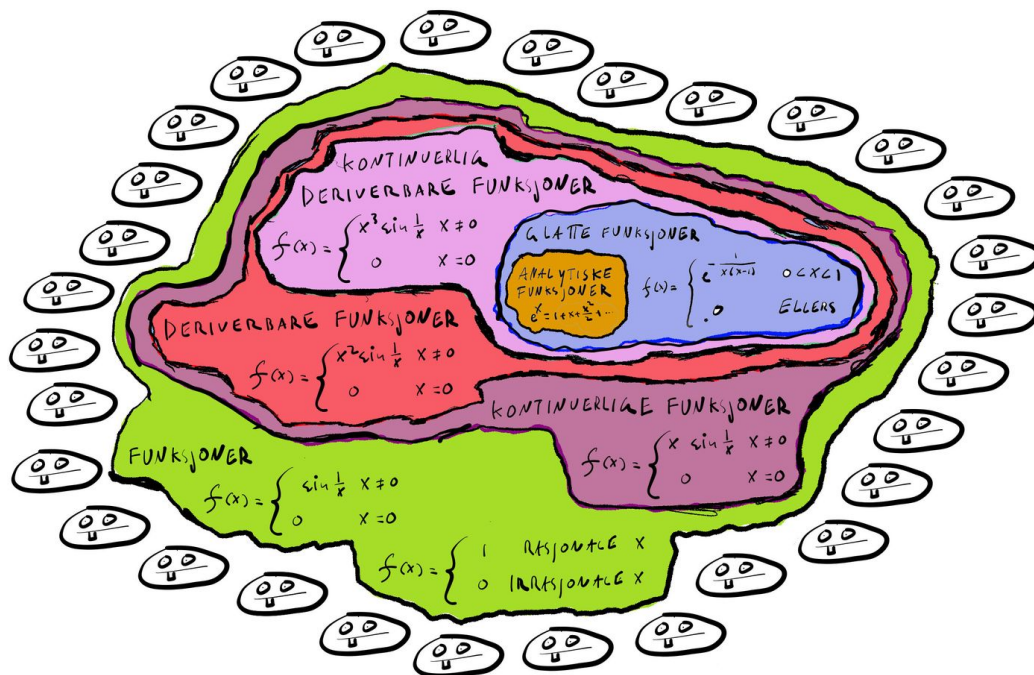
Det bør være rimelig åpenbart at en funksjon må være $\mathcal{C}^\infty$ for å være analytisk. Men det motsatte er ikke sant. Det finnes glatte funksjoner som ikke kan skrives som en taylorrekke, for eksempel **hufsafunksjonen**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/((1-x)(1+x))} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Du finner et eksempel på en liknende funksjon her:

<https://tma41x1.math.ntnu.no/12/graffer/>

16 Forklar at hufsafunksjonen er glatt men ikke analytisk.



Vi nærmer oss veis ende - her er semesterets siste side. Vi skulle gjerne hatt en formel for invers laplacetransform. Vi vet at

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

og for signaler som har fourieromvending, er denne helt fin. Men hva med

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases} \quad ?$$

Denne kan laplaceomvendes, men ikke fourieromvendes. Finnes det en formel slik at

$$\sin t = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \quad ?$$

Vi kan ikke bare skrive

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

for dette integralet konvergerer ikke. Derfor kompleks analyse.⁸ Vi skriver

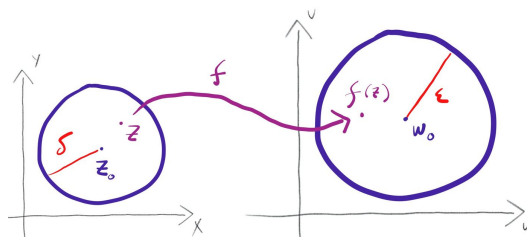
$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

der $z = x + yi$ er den uavhengige variabelen, og $w = u + iv$ er den avhengige variabelen. Merk at u og v er funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$. Nå er vi over i en del av matematikken som av mange matematikere betraktes mer som en form for kunst enn en form for vitenskap. Det er ikke så lett å visualisere komplekse funksjoner, så man må samle på fun facts. Definisjonen av grenseverdi er identisk med definisjonen for reelle funksjoner. Vi sier at

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \epsilon$$



Vi sier videre at f er **deriverbar** i z dersom

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

eksisterer. På noen måter fungerer denne definisjonen akkurat som den du er vant til.

17 Vis at $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$ og at $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$

Men likheten slutter her, siden det komplekse tallet h må kunne reise inn mot z på vilkårlig vis.

18 Bruk dette til å finne frem til **Cauchy-Riemannlikningene**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En funksjon av en kompleks variabel oppfører seg fundamentalt annerledes enn en funksjon av en reell variabel. Det finnes for eksempel ingenting mellom deriverbar og analytisk funksjon! Dette skal vi se på til høsten.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_analysis

UKENS NØTTER

I den klassiske mekanikkens åndelige sentrum sitter differensialoperatoren:

$$T(x) = \dot{x}$$

Den er en lineæroperator. Men hvordan vet vi egentlig det? Følgende oppgaver forteller det det sånn omtrent.

1 Vis at en grenseverdi er entydig dersom den eksisterer.

2 Vis at dersom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = L_2$$

er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + f_2(x) = L_1 + L_2$$

3 Vis at dersom a er en konstant og

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

er

$$\lim_{x \rightarrow x_0} af(x) = aL$$

4 Vis at differensialoperatoren er lineær.

Det finnes ellers en liten nisje mellom kontinuerlige og deriverbare funksjoner som er slik at sekanten aldri er brattere enn som så. Dette kalles **lipschitzkontinuitet**, og dukker opp her og der i anvendelser. En funksjon er lipschitzkontinuerlig dersom det finnes et tall c slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

for alle x, y . Kjennere sier bare "lipschitz" istedet for "lipschitzkontinuerlig".

5 Er kvadratrotfunksjonen lipschitz?

6 Er sinc-funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

kontinuerlig? Deriverbar? Kontinuerlig deriverbar? Lipschitz?

(Hint: vi har i TMA4101 funnet grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.)

