

2 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER V - LF

1 Vi antar kjekt at

$$\frac{d}{dt}At = A$$

og deriverer eksponensialfunksjonen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= \frac{d}{dt} \left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2} + \frac{A^4t^3}{3!} + \dots \\ &= A \left(I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

Dersom vi aksepterer at

$$e^{A \cdot 0} = e^0 = I,$$

er det lett å gå med på at

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

både passer i differensiallikningssystemet og tilfredsstiller $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

3 Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda - 1) + (1 - (2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\ &= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)\end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at egenvektorene som korresponderte til forskjellige egenverdier automatisk kom ut ortogonale. Dette var ikke tilfeldig, vi kommer tilbake til det.

4 Nei. Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og prøver vi å regne ut egenvektorene, får vi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir $x_2 = x_3 = 0$ og

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som eneste egenvektor.

7 La oss si at du har Λ og V slik at $A = V\Lambda V^{-1}$. Vi skriver systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = V\Lambda V^{-1}\mathbf{x}.$$

La oss først gange fra venstre med V^{-1} , og få

$$V^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \Lambda V^{-1}\mathbf{x}.$$

Nå er det bare å sjekke at

$$\frac{d}{dt}(V\mathbf{y}) = V\dot{\mathbf{y}}$$

så lenge V er en konstant matrise, og så bytte til koordinatene $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$, og skrive

$$\dot{\mathbf{y}} = \Lambda\mathbf{y}.$$

8 For å avdekke hva som skjer, kan vi ta for oss et triks. For det første er det veldig kjapt å gange diagonalmatriser med seg selv:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Da skjønner alle barn i barnehagen at dersom Λ er diagonal, er

$$e^\Lambda = I + \Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k/k! & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k/k! & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^k/k! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

9] Dersom $A = V\Lambda V^{-1}$ kan vi nok en gang bruke trikset med diagonalmatrisene:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{V(\Lambda t)V^{-1}} \\ &= I + V(\Lambda t)V^{-1} + \frac{(V(\Lambda t)V^{-1})^2}{2} + \frac{(V(\Lambda t)V^{-1})^3}{3!} + \dots \\ &= I + V(\Lambda t)V^{-1} + \frac{V(\Lambda t)^2 V^{-1}}{2} + \frac{V(\Lambda t)^3 V^{-1}}{3!} + \dots \\ &= V \left(I + (\Lambda t) + \frac{(\Lambda t)^2}{2} + \frac{(\Lambda t)^3}{3!} + \dots \right) V^{-1} = V e^{\Lambda t} V^{-1} \end{aligned}$$

10] Nope, ikke diagonaliserbar. Men vi kan løse systemet på samme måte som i lf på eksamen i TMA4101:

13] Den peneste måten å definere eksponensialfunksjonen på, er i bunn og grunn

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

som er absolutt konvergent for alle z . La oss nå gange sammen to slike og herje litt:

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n! m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^n w^m}{n! m!}$$

Denne herjingen er tillatt så lenge rekkene er absolutt konvergente, men det er de jo. Vi ser nå tydelig at koeffisienten til $z^n w^m$ er $1/(n!m!)$, så det vi trenger å gjøre, er å sjekke at dette også er koeffisienten til $z^n w^m$ i e^{z+w} : Binomialteoremet¹ gir

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} z^l w^{k-l} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} z^l w^{k-l}. \end{aligned}$$

Nå er det egentlig bare å observere at en bestemt potens $z^n w^m$ kun opptrer på ett sted i hver sum, og voila. (Litt subtil denne her. Ikke gå i kjelleren om du må tenke en stund.)

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem

Hvis du nå bytter ut z og w med matrisene A og B , er beregningen i bunn og grunn den samme, men det er en del jobb å vise ordentlig at alle stegene i beregningen er tillatte. Man må også bruke kommutativiteten til A og B når man bruker binomialteoremet; dette tenker vi jo ikke på når vi ganger sammen reelle eller komplekse tall.

- 14 Jeg håper du husker at identitetsmatrisen kommuterer multiplikativt med absolutt alle matriser.

- 15 Siden I og N kommuterer, kan vi først beregne

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt}$$

Nå er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

og følgelig at

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

- 16 Løsningen blir altså

$$e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{(\lambda I + N)t} \mathbf{x}_0 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t}(1+t) \end{pmatrix}$$

- 17 Du kan selv sjekke at dersom N er $(n+1) \times (n+1)$, er N^{n+1} nullmatrisen, slik at eksponentialfunksjonen terminerer etter $n+1$ ledd:

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} + \dots + \frac{(Nt)^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots & t^n/n! \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- 19 Siden I og N kommuterer, kan vi først beregne

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt}$$

Nå er det bare å observere at

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og følgelig at

$$e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 18 og 20-21 løses på samme måte.

- 22 Steg en er å finne egenverdiene til A . Det karakteristiske polynomet er

$$|A - \lambda I| = -\lambda(-1 - \lambda)^2$$

slik at egenverdiene er null (enkel) og minus én (dobbel). Egenvektoren til null er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og om vi prøver å finne egenvektoren til minus én, får vi bare

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da vet vi formen på J :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

samt de to første kolonnene i V :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_{13} \\ 2 & 0 & v_{23} \\ 4 & 1 & v_{33} \end{pmatrix}$$

Likningssystemet $AV = VJ$ impliserer nå at $v_{13} = 0$, $v_{23} = 1/2$ og v_{33} kan være hva som helst. Herfra og ut er det greit. Vi skriver

$$J = D + N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og bruker at

$$e^{At} = e^{VJV^{-1}t} = e^{V(D+N)V^{-1}t} = Ve^{(D+N)t}V^{-1}.$$

Siden N^2 er nullmatrisen og D og N kommuterer ($ND = DN = -N$), kan vi skrive

$$e^{(D+N)t} = e^{Dt}e^{Nt}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og dersom vi velger $v_{33} = 0$ får vi

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

$$= Ve^{Jt}V^{-1}\mathbf{x}_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

UKENS NØTTER

- 1] Dersom f er en funksjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ og $\mathbf{x}$ en funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}^2$ og vi skal løse systemet

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

blir eksplisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k)$$

implisitt Euler

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_{k+1})$$

og trapesmetoden

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}(f(\mathbf{x}_k) + f(\mathbf{x}_{k+1}))$$

I vårt tilfelle er

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

For eksplisitt Euler får vi

$$\mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k) = (I + hA)\mathbf{x}_k.$$

Implisitt Euler blir

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hA\mathbf{x}_{k+1}$$

men om vi skriver alt med $\mathbf{x}_{k+1}$ på venstre side, får vi

$$(I - hA)\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$$

og så er det bare å invertere $I - hA$, og få

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1} \mathbf{x}_k$$

For trapesmetoden bruker vi bare det samme trikset; vi skriver

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}(A\mathbf{x}_k + A\mathbf{x}_{k+1})$$

sorterer:

$$\mathbf{x}_{k+1} - \frac{h}{2}A\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}A\mathbf{x}_k$$

bruker identitetsmatrisen:

$$\left(I - \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_{k+1} = \left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

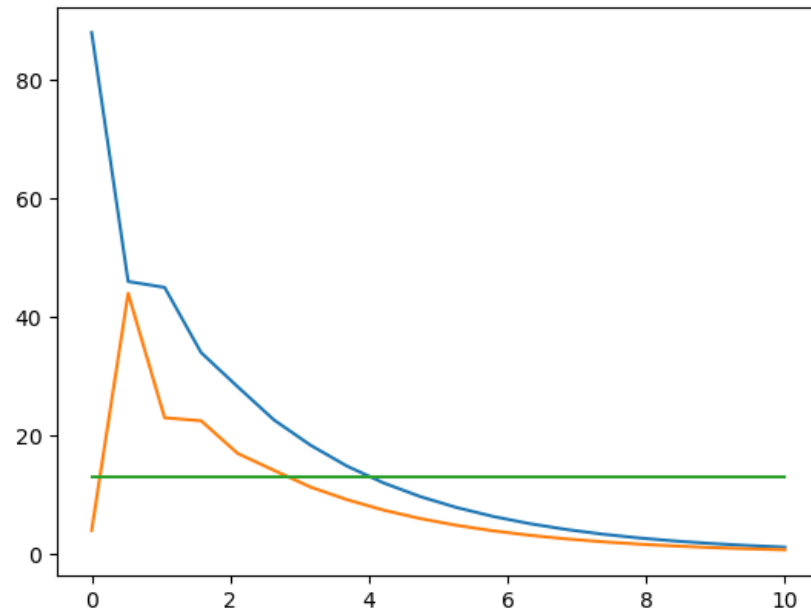
og inverterer:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I + \frac{h}{2}A\right)\mathbf{x}_k$$

I pythonkoden i forrige oppgave kan du kjøre alle metodene.

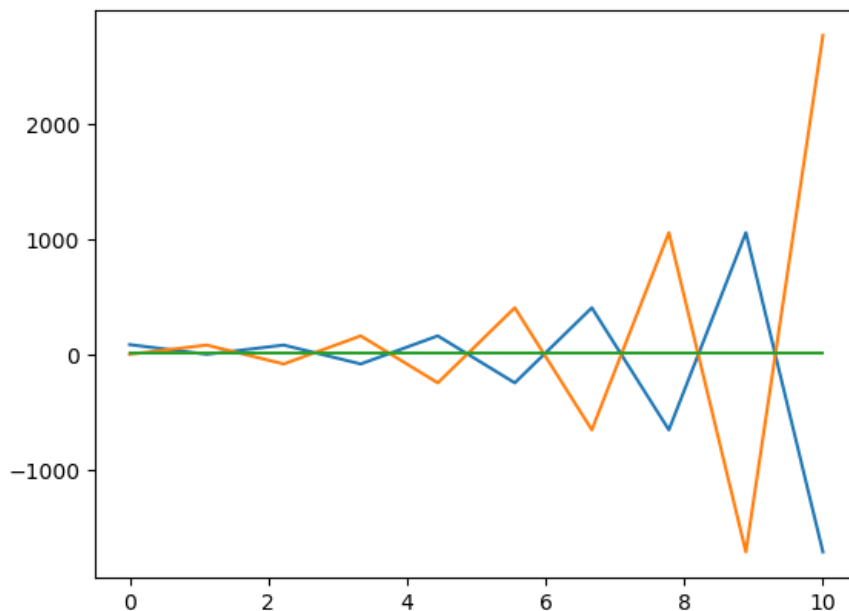
- 2 La oss begynne med å se på hva som skjer når vi kjører eksplisitt euler for store h . Dersom $h = 0.5$, begynner kurvene å se stygge ut:

HOMEOPATISKE FORVIKLINGER



og dersom $h = 1$ er det ingenting igjen som minner om korrekt fysikk:

HOMEOPATISKE FORVIKLINGER



Hva skjer? La oss først se på hvordan vi opphøyer en matrise i en stor potens. Det kan du gjøre slik:

$$\begin{aligned}
 A^n &= (V\Lambda V^{-1})^n \\
 &= (V\Lambda V^{-1})(V\Lambda V^{-1}) \dots (V\Lambda V^{-1}) \\
 &= V\Lambda V^{-1}V\Lambda V^{-1} \dots V\Lambda V^{-1} \\
 &= V\Lambda\Lambda \dots \Lambda V^{-1} \\
 &= V\Lambda^n V^{-1}.
 \end{aligned}$$

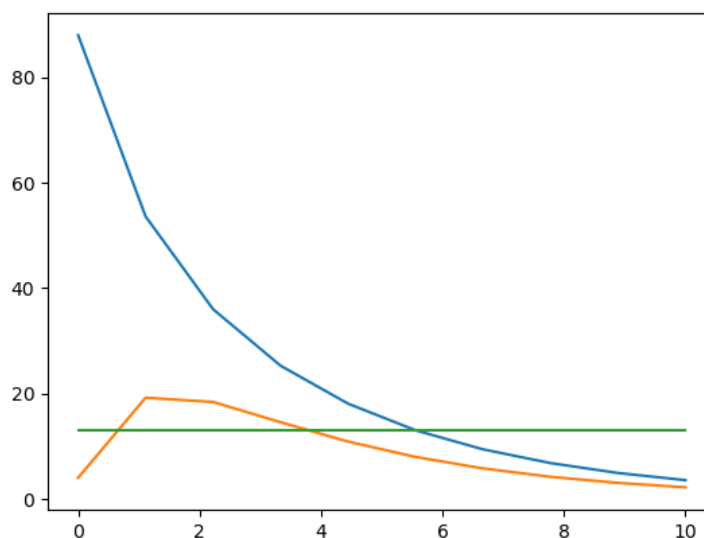
Det er altså hvorvidt egenverdiene er større eller mindre enn en som har noe å si for om vi får ukontrollert vekst. Hvis man legger inn kommandoen

```
print(np.linalg.eig(ekspl_mat))
```

i koden et eller annet sted, vil man se at i det h bikker sånn omtrent 0.76, bikker den ene egenverdien til $(I + hA)$ under -1 , og da begynner iterasjonene å stige ukontrollert.

Dersom man prøver samme eksperiment med implisitt, vil man oppdage at det går helt fint. Her er $h = 1$:

HOMEOPATISKE FORVIKLINGER



Unøyaktig som faen, men kvalitativt riktig. Forklaringen er den samme, print egenverdiene til $I - hA$, så ser du. Trapesmetoden oppfører seg likt, men legger seg tettere på den korrekte løsningen, siden den har høyere orden.²

²[https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule_\(differential_equations\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule_(differential_equations))

2 - 2 - DIFFERENSIALLIKNINGER VI - LF

- 1 Det kjappeste er nok å gange med e^{2t} på begge sider, omskrive cosinusfunksjonen med Eulers formel

$$\dot{x}(t)e^{2t} + 2x(t)e^{2t} = e^{2t} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) = \left(\frac{e^{(2+i)t} + e^{(2-i)t}}{2} \right)$$

og så integrere

$$x(t)e^{2t} = c + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} e^{(2+i)t} + \frac{1}{2-i} e^{(2-i)t} \right)$$

og så gange opp med e^{-2t} :

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^{-2t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} e^{it} + \frac{1}{2-i} e^{-it} \right) \\ &= ce^{-2t} + \frac{1}{5} \left(\frac{2-i}{2} e^{it} + \frac{2+i}{2} e^{-it} \right) \\ &= ce^{-2t} + \frac{1}{5} (2 \cos t + \sin t) \end{aligned}$$

Bruker vi initialkravet $x(0) = 0$, får vi $0 = c + \frac{2}{5}$ slik at

$$x(t) = \frac{1}{5} (2 \cos t + \sin t - 2e^{-2t}).$$

- 2 Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \left(\lambda - \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)$$

som forteller oss at den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$

Den partikulære løsningen er helt klart

$$x_p(t) = 1,$$

slik at

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right) + 1.$$

Initialkravet $x(0) = 0$ gir

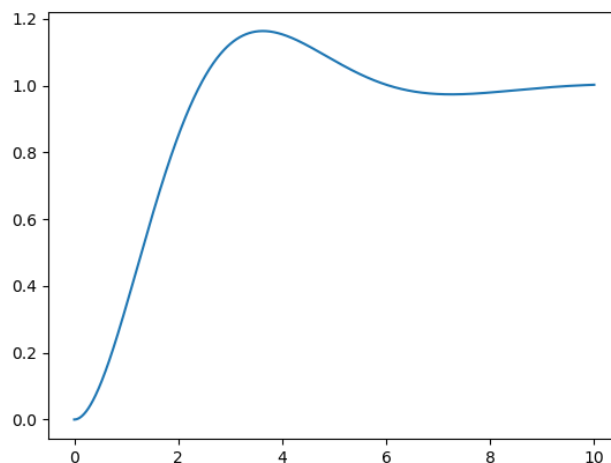
$$c_1 + 1 = 0$$

slik at $c_1 = -1$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir

$$\frac{1}{2} + c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

slik at $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Løsningen er altså

$$x(t) = 1 - e^{-t/2} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$



3 Å gausseliminere et slikt system, lærte du i høst. Vi beregner

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & \sim & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hvis vi velger $x_3 = s$ og $x_4 = t$, blir

$$x_2 = 2 - 2s - 3t$$

og

$$x_1 = \frac{2 - 3(2 - 2s - 3t) - 4s - 5t}{2} = -2 + s + 2t,$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + s + 2t \\ 2 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Merk nå at strukturen på dette problemet ligner strukturen på det forrige. Vektorene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er løsninger av det homogene systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}$$

mens vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kun passer i det inhomogene systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{array}$$

Dette går igjen hver gang du har et system som er en lineæroperator L og en vektor y og så leter du etter x slik at $Lx = y$.

- 4 Det er slitsomt å skrive $\sqrt{3}/2$ veldig mange ganger, så la oss definere

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

slik at røttene til det karakteristiske polynomet kan skrives

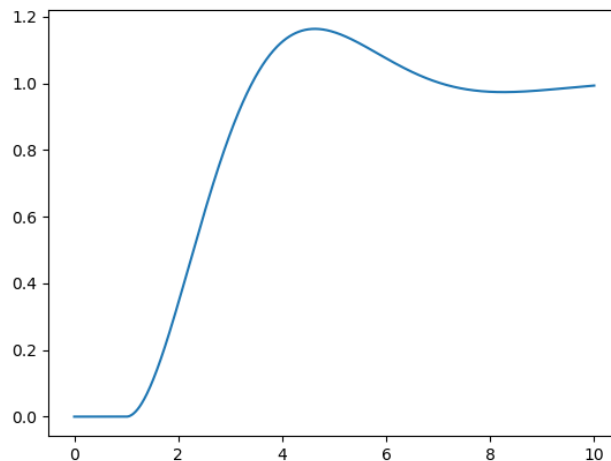
$$\lambda = \alpha \pm i\omega_0$$

og løsningen

$$x(t) = 1 - e^{\alpha t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0 t) \right).$$

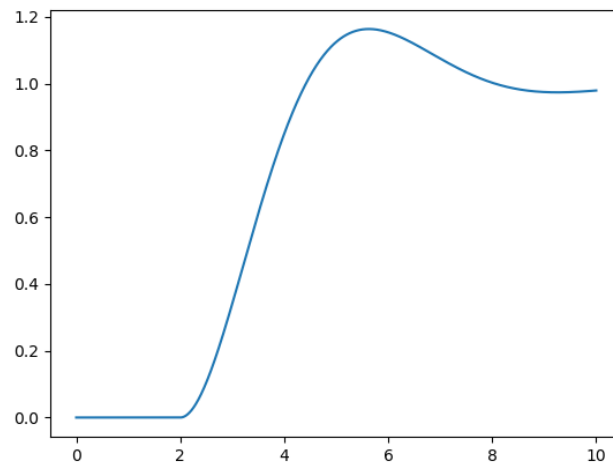
Poenget med lti-trikset er at om vi skruer på den drivende kraften $f(t) = 1$ ved tiden $t = 1$ istedet for $t = 0$, vil systemet oppføre seg akkurat likt. Vi kan derfor ta løsningen av det forrige problemet og skru den på ved tiden $t = 1$ istedet:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1)$$



- 5 Samme her:

$$x(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2)$$



- 6 Her gjelder det å skjønne at superposisjonsprinsippet må brukes for det det er verdt. Hvis vi definerer

$$x_1(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1)$$

og

$$x_2(t) = \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2)$$

og definerer lineæroperatoren

$$L(x) = \ddot{x} + \dot{x} + x,$$

har vi

$$L(x_1(t)) = u(t-1)$$

og

$$L(x_2(t)) = u(t-2)$$

slik at

$$L(x_1(t) - x_2(t)) = L(x_1(t)) - L(x_2(t)) = u(t-1) - u(t-2).$$

Med andre ord er løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ &= \left(1 - e^{\alpha(t-1)} \left(\cos(\omega_0(t-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-1)) \right) \right) u(t-1) \\ &\quad - \left(1 - e^{\alpha(t-2)} \left(\cos(\omega_0(t-2)) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\omega_0(t-2)) \right) \right) u(t-2). \end{aligned}$$

- 7 Denne skal jeg regne ut med laplacetransform litt lenger ned, og så skal vi se på løsningen og så skal vi skjønne alt.

- 8 Siden eksponensialfunksjonen er egenfunksjon til derivasjonsoperatoren, er den også egenvektor til lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorene:

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{at} + \frac{d}{dt} e^{at} + e^{at} = (a^2 + a + 1) e^{at}$$

Av denne grunn er det vel smart å gjette på

$$x_p(t) = Ce^{i\omega t}$$

som partikulærløsning. Vi setter denne inn på venstresiden og får

$$C \frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} + C \frac{d}{dt} e^{i\omega t} + C e^{i\omega t} = C ((i\omega)^2 + i\omega + 1) e^{i\omega t}$$

Denne skal jo helst bli lik $e^{i\omega t}$, og det blir den dersom

$$C = \frac{1}{(i\omega)^2 + i\omega + 1} = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

- 9 Her er det bare å skrive $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ og bruke forrige oppgave og superposisjonsprinsippet:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1} + \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\omega + 1} \right) \end{aligned}$$

Skal du ha initialkrav må du selvfølgelig ha med den homogene løsningen, men jeg droppa initialkrav i denne oppgaven for det blir så mye regning.

- 10 Vi skriver

$$\ddot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

slik at

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i\omega)e^{i\omega t} + H(-i\omega)e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2} \cdot \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Den homogene løsningen er

$$x(t) = A \cos t + B \sin t.$$

Når $\omega = 1$ er den påtrykte kraften en homogen løsning, og uttrykket over er ikke definert. Man kan gå i Arnes bok og oppdage at partikulærløsningen i dette tilfellet er

$$x_p(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

som øker i amplitude etterhvert som tiden går. Om man påtrykker en ekstern kraft som allerede er en homogen løsning, skjer det samme som når du løper frem og tilbake på fergedekket; gjør du det med riktig frekvens, får din lille masse hele fergen til å vugge frem og tilbake.

- 11 La $x(t) = e^{at}$. Så lenge realdelen til s er større enn a , får vi

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}.$$

- 12 La $\sigma > 0$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}) &= \int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st} dt \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0).\end{aligned}$$

- 13 Vi bruker linearitet og regneregelen over på venstre side, og får

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x} + ax) &= \mathcal{L}(\dot{x}) + a\mathcal{L}(x) \\ &= s\mathcal{L}(x) - x(0) + a\mathcal{L}(x) \\ &= (s+a)\mathcal{L}(x) - 1\end{aligned}$$

mens høyre side blir

$$\mathcal{L}(0) = 0$$

slik at

$$(s+a)\mathcal{L}(x) - 1 = 0$$

eller

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s+a}.$$

Sammenlikner vi med oppgave 11 og tror på rettferdighet i verden, kan vi nå slutte at

$$x(t) = e^{-at}.$$

- 14 Lett:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\ddot{x}) &= s\mathcal{L}(\dot{x}) - \dot{x}(0) \\ &= s(s\mathcal{L}(x) - x(0)) - \dot{x}(0) \\ &= s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - \dot{x}(0)\end{aligned}$$

Høyere ordens regneregler er null stress, bare fortsett i samme duren.

- 15 La $x(t) = \cos t$. Vi beregner

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \int_0^\infty e^{-st} \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{it} + e^{-it}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(i-s)t} + e^{-(i+s)t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i} \right) = \frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}$$

- 16 La $x(t) = \sin t$, slik at $\dot{x}(t) = \cos t$ og $x(0) = 0$. Derivasjonsregelen

$$s\mathcal{L}(x) - x_0 = \mathcal{L}(\dot{x})$$

gir

$$s\mathcal{L}(x) = \frac{s}{s^2 + 1},$$

slik at

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

- 18 Fra nå av skriver jeg $X(s)$ og ikke $\mathcal{L}(x)$. Det er litt lettere å lese. Vi laplacetransformerer begge sider av likningen, bruker lineariteten, derivasjonsreglene og initialkravene, og får

$$s^2 X(s) - s + X(s) = 0$$

slik at

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

som gir at

$$x(t) = \cos t.$$

- 19 Ditto. Vi transformerer

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = 0$$

og løser

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

slik at

$$x(t) = \sin t.$$

- 20 Ditto. Vi får

$$s^2 X(s) - s + sX(s) - 1 + X(s) = 0,$$

som gir

$$X(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}.$$

Merk hvordan nevneren i høyresiden er det karakteristiske polynomet til likningen. La den ene roten være $\lambda = \alpha + i\omega_0$ slik at den andre blir $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega_0$. Vi delbrøksoppspalter slik:

$$\frac{s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{A}{s - \lambda} + \frac{B}{s - \bar{\lambda}}$$

og ganger opp med $s^2 + s + 1$, slik at

$$s + 1 = A(s - \bar{\lambda}) + B(s - \lambda)$$

Sammenlikning av ordener i s på høyre og venstre side gir

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A\bar{\lambda} - B\lambda &= 1 \end{aligned}$$

som løses av

$$A = \frac{1 + \lambda}{\lambda - \bar{\lambda}} = \frac{1 + \lambda}{2i\omega_0} \quad B = \frac{1 + \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \lambda} = -\frac{1 + \bar{\lambda}}{2i\omega_0}$$

slik at

$$\frac{s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{2i\omega_0} \left(\frac{1 + \lambda}{s - \lambda} - \frac{1 + \bar{\lambda}}{s - \bar{\lambda}} \right)$$

Nå gjelder det å holde tungen beint i munnen:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2i\omega_0} \left((1 + \lambda) e^{\lambda t} - (1 + \bar{\lambda}) e^{\bar{\lambda} t} \right) \\
 &= \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0} \left((1 + \lambda) e^{i\omega_0 t} - (1 + \bar{\lambda}) e^{-i\omega_0 t} \right) \\
 &= \frac{e^{\alpha t}}{2i\omega_0} \left((1 + \lambda) e^{i\omega_0 t} - \overline{(1 + \lambda) e^{i\omega_0 t}} \right) \\
 &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \operatorname{im} (1 + \lambda) e^{i\omega_0 t} \\
 &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \operatorname{im} ((1 + \alpha + i\omega_0) (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t))) \\
 &= \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} (\omega_0 \cos(\omega_0 t) + (1 + \alpha) \sin(\omega_0 t)) \\
 &= e^{\alpha t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1 + \alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)
 \end{aligned}$$

Hvis vi sammenlikner denne strategien med å lete opp den homogene løsningen

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

fra det karakteristiske polynomet og så bruke initialkravene for å finne $A = 1$ og $B = (1 + \alpha)/\omega_0$, må vi vel konkludere med at laplacetransform i dette tilfellet var fullstendig underlegent gamlemåten dersom målet var å finne $x(t)$. Men merk at veien frem til

$$X(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

var veldig kort. Poenget med laplacetransformen er ikke egentlig å finne x , men derimot å finne X og så melke denne for informasjon. En trent ingeniør gidder sjelden finne x . Poenget med disse oppgavene er bare at du skal skjønne at en bestemt X leder til en bestemt x .

21 Vi får

$$s^2 X(s) + sX(s) + X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

slik at

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 1)}.$$

Denne kommer til å bli enda verre enn den forrige; vi må delbrøksoppspalte noe ut av det hinsidige. Det er mye enklere å finne homogen og partikulær. Den homogene løsningen er

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t),$$

mens den partikulære kan vi relativt enkelt finne ved å skrive

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

slik at

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \frac{1}{2} (H(i)e^{it} + H(-i)e^{-it}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} e^{it} + \frac{1}{-i} e^{-it} \right) \\
 &= \sin t
 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + \sin t \end{aligned}$$

Kravet $x(0) = 0$ gir nå $A = 0$, mens $\dot{x}(0) = 0$ gir $\omega_0 B + 1 = 0$, slik at

$$x(t) = \sin t - \frac{e^{\alpha t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

24 Denne likner på den forrige, vi kjører samme strategi:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= e^{\alpha t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + H(i\omega) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Konstantene A og B kan du regne ut om du orker.

25 Denne er litt artig, men vi trenger å smake på et laplacetriks, nemlig **konvolusjonsregelen**. Dersom $Z = XY$, er

$$z(t) = \int_0^t x(u) y(t-u) du.$$

Vi får nemlig

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \sin(u) \sin(t-u) du \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^t (e^{iu} - e^{-iu}) (e^{i(t-u)} - e^{-i(t-u)}) du \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^t e^{it} + e^{-it} - e^{i(t-2u)} - e^{-i(t-2u)} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos(t-2u) - \cos t du \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

Konvolusjon er viktig, men fremstår som snodig i begynnelsen. Vi kommer tilbake til det.

26 Denne er også litt artig. Vi får

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Siden

$$-\frac{d}{ds} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

gir neste oppgave oss at

$$x(t) = e^{-t} + te^{-t}$$

Dette er den homogene og den partikulære løsningen, men det er ikke innlysende at man skal gjette på partikulærløsningen te^{-t} når det drivende leddet er en homogen løsning. Så her var laplacetransform helt klart til hjelp.

27 Vi ganger likningen

$$y(t) = tx(t)$$

med e^{-st} og får

$$y(t)e^{-st} = tx(t)e^{-st} = -\frac{d}{ds}x(t)e^{-st}$$

og integrerer fra 0 til ∞ , slik at

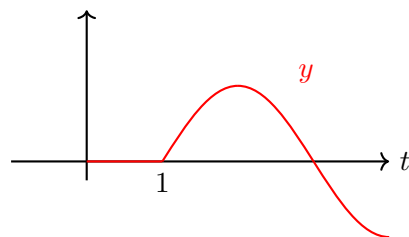
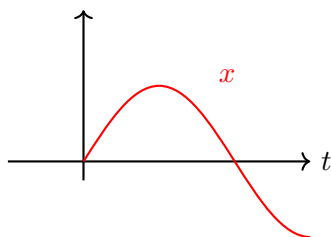
$$Y(s) = \int_0^\infty tx(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds}X(s).$$

29 Vi beregner

$$\int_0^\infty u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-as}}{s}$$

og

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^\infty u(t-a)x(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^\infty x(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty x(t)e^{-s(t+a)} dt \\ &= e^{-as} \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt = e^{-as}X(s) \end{aligned}$$



På oppgave 4-6 får vi henholdsvis

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)} = e^{-s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right)$$

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + s + 1)} = e^{-2s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s^2 + s + 1)} \\ &= e^{-s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) - e^{-2s} \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) \\ &= (e^{-s} - e^{-2s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \right) \end{aligned}$$

som gir t -skiftede superposisjoner av $x_p(t) = 1$ og løsningen fra oppgave 20. I oppgave 7 får vi

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1} + \frac{e^{-s}}{s(s^2 + s + 1)}$$

som vi også ser er en superposisjon av løsningene på oppgave 4 og 20. Superposisjonsprinsippet er jammen greit å vite om.

31 Lett!

$$Y(s) = \int_0^\infty x(t)e^{at}e^{-st} dt = \int_0^\infty x(t)e^{-(s-a)t} dt = X(s-a)$$

32 Regelen over gir umiddelbart at transformene blir

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} \quad \text{og} \quad \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

Jeg vet ikke om det er helt riktig å si at oppgave 20 blir enklere, men vi kan ihvertfall gjøre den på en komplisert men litt annerledes måte. Vi skriver

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

og ser nå lett at

$$x(t) = e^{-t/2} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

Med litt trening, kan det tenkes at dette går kjappere enn å bare skrive opp den homogene løsningen og så bruke initialkravene. Du kan jo ta tiden på deg selv og se. Send meg en epost om du finner ut noe interessant.

33 Vi får

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(x-s) ds = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_{x-k}^x f(s) ds = f(x).$$

34 Dersom pulsen går på i $t = a$ er $X(s) = e^{-as}$.

35 Vi regner i vei, og får

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$

slik at

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)}.$$

36 og ditto:

$$x(t) = u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

37 og superposisjonsprinsippet:

$$x(t) = u(t-1)e^{-(t-1)} - u(t-2)e^{-(t-2)}.$$

38 Hvis du vil løse med laplace, blir transformen

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{e^{-s}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right) e^{-s} \end{aligned}$$

som gir

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(e^{-(t-1)/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) \right) \right) u(t-1),$$

altså løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$$

men flyttet et knepp til høyre på t -aksen. Det finnes en annen måte å gjøre det på, se oppgave 39 og 40.

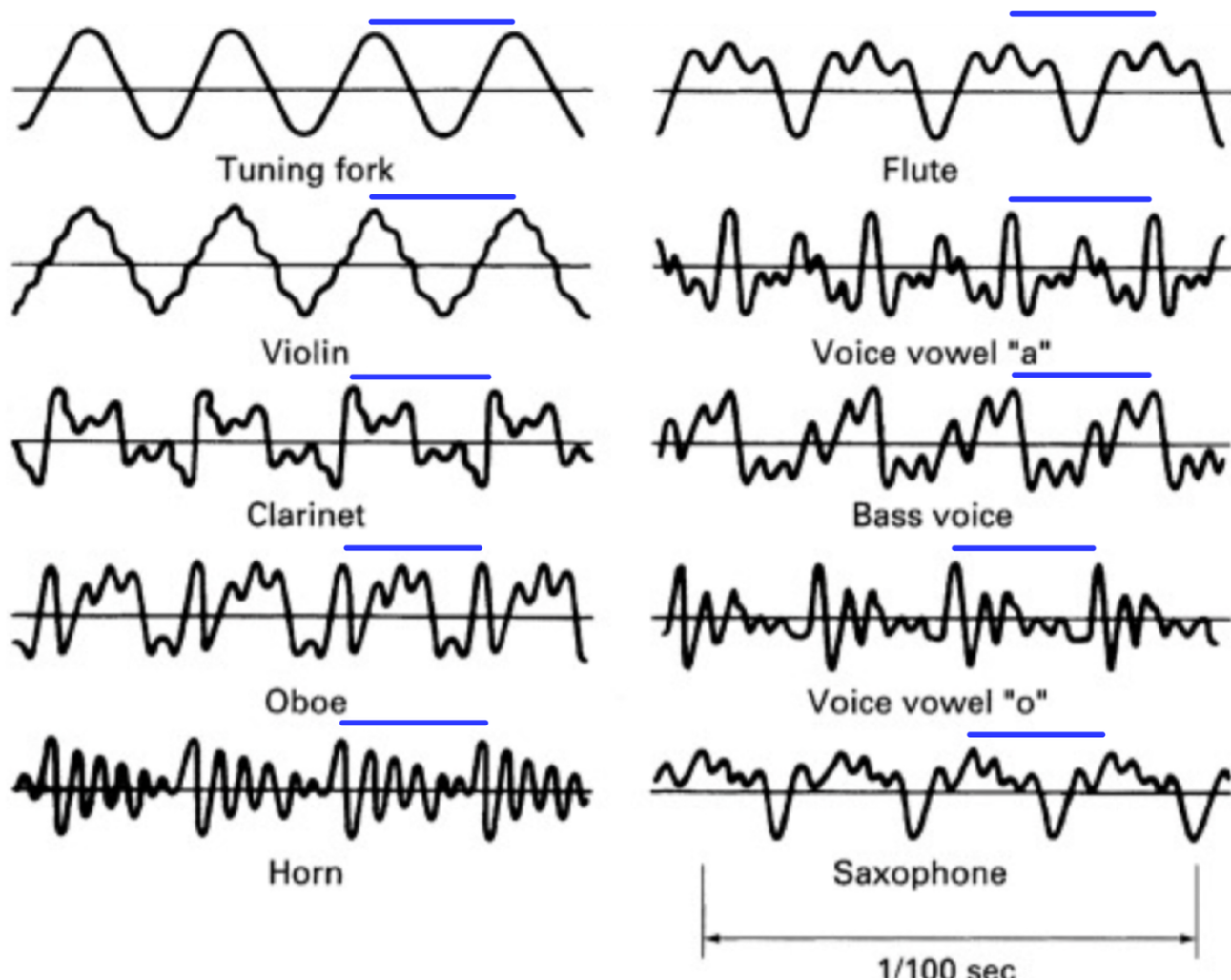
39-40 Her kommer et eksempel på et tilfelle der laplacetransform gjør analysen fryktelig mye enklere. Begge problemene i oppgaven har laplacetransform

$$X(s) = \frac{m(v_0 + sx_0) + bx_0 + 1}{ms^2 + bs + k}$$

der det siste ett-tallet kommer fra deltapulsen i det ene tilfellet, og fra tillegget $1/m$ i initialfarten i det andre. Dette betyr at vi kan tolke deltapulsen som noe som momentant tilfører bevegelsesmengden 1 til bevegelsen. (Husk at bevegelsesmengde er mv .)

2 - 3 - FOURIERANALYSE I - LF

3



4 Hvis $f = 100$ hertz, blir $\omega = 2\pi f \approx 628$ radianer per sekund.

5 Du finner ymse koder som plotter fourierrekker her:
<https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/fourierrekker/>

6 Lett! Dersom $n = m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

og dersom $n \neq m$, får vi

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \frac{1}{i(n-m)\omega} e^{i(n-m)\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

slik at

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} T & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Nå tar vi likningen

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

og ganger med $e^{-im\omega t}$ og integrerer:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt$$

og så gjør Satan en egentlig ulovlig flytting av integraltegnet (siden summen går mot uendelig), slik at hen kan bruke ortogonaliteten og drepe alle ledd i summen unntatt ett:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = c_m \cdot T$$

slik at hun kan skrive

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt.$$

7 Firkantbølgen er gitt ved den T -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < T/2 \end{cases}$$

Vi ser raskt at

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega t) dt = 0$$

for alle $n \geq 1$, mens

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt = 1$$

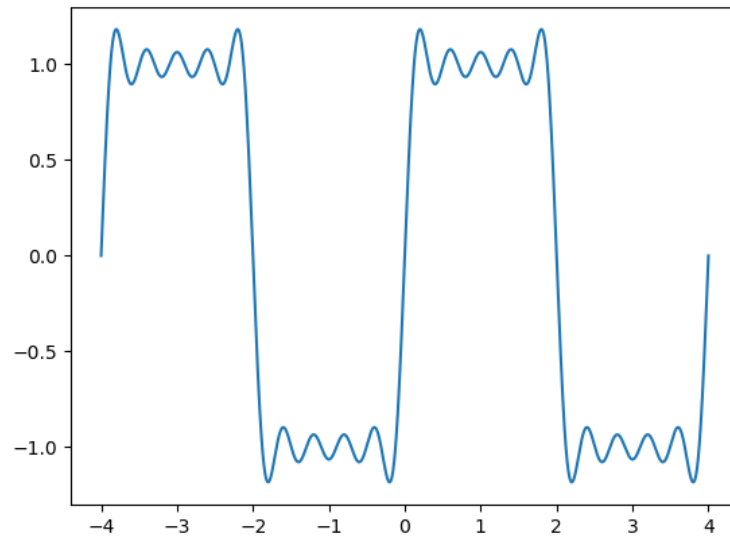
Videre kan vi beregne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} (-\cos(n\omega t)) \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\omega t).$$

Vi skriver $\sim$ og ikke $=$ siden fourierrekken ikke tar den samme verdien som signalet i $t =$ heltallsmultipler av $T/2$. Her er plot av en partialsum:



Hvis vi vil ha rekken på kompleks form, kan vi enten regne ut fra scratch, eller bruke formlene

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

La oss ta det fra scratch. For $n = 0$ får vi

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{2},$$

mens for $n \neq 0$, får vi

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-in\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i n} e^{-in\omega t} \Big|_0^{T/2} \\ &= \frac{1}{2\pi i n} (1 - e^{-\pi i n}) \\ &= \frac{1}{2\pi i n} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{1}{\pi i n} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevne } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t}.$$

8 Sagtannbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = t.$$

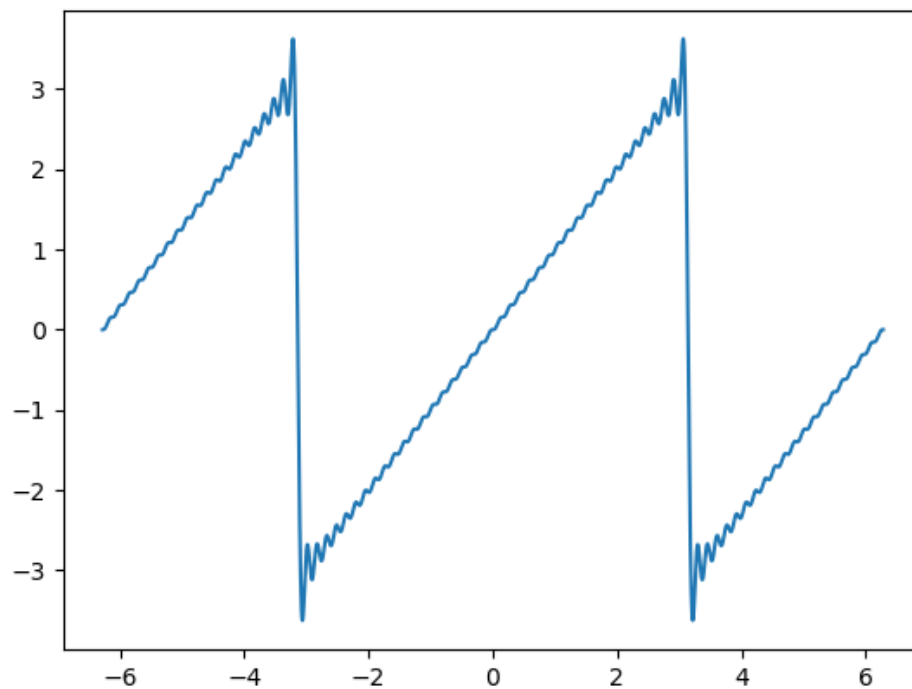
Siden den er en odde funksjon, blir $a_n = 0$ for alle n , og da er det ofte enkelt å beregne den reelle fourierrekken. Koeffisientene blir

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} t \cos(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt \right) \\ &= \frac{-2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

Her er plot av en partialsum:



- 9 Trekantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Denne er jevn, så vi vet at $b_n = 0$ for alle n . Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \pi$$

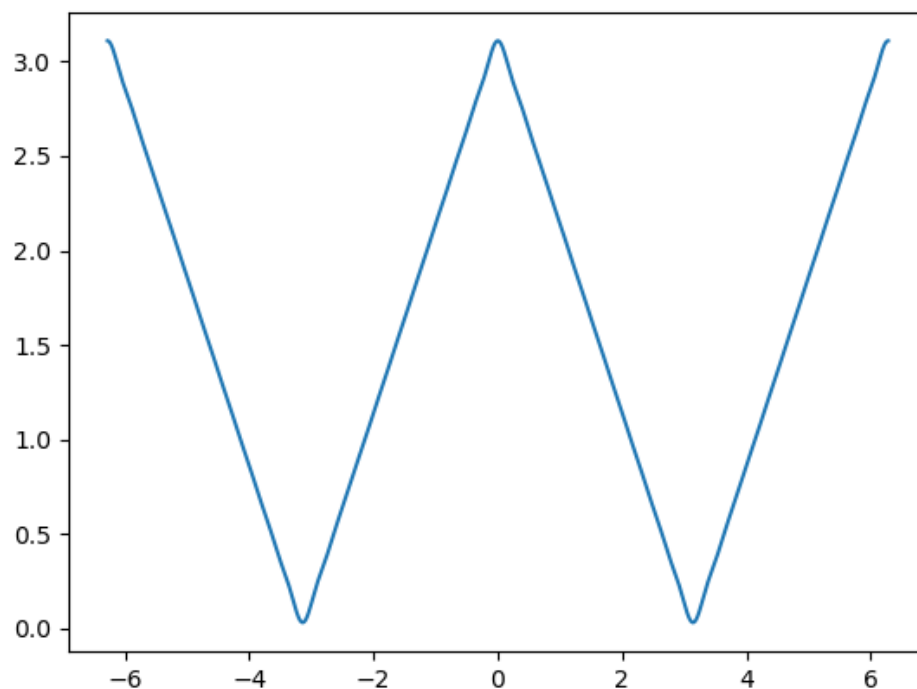
og

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} (\pi - t) \sin(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right) \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevn } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t).$$

Her er plot av en partialsum:



- 10 Det enkleste er å ta det direkte fra koeffisientformlene. La n være et naturlig tall. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) (\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \end{aligned}$$

Formler for den andre veien tar vi med gausseliminasjon. Legger vi sammen

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{og} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

får vi $a_n = c_n + c_{-n}$, og trekker vi dem fra hverandre, får vi $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

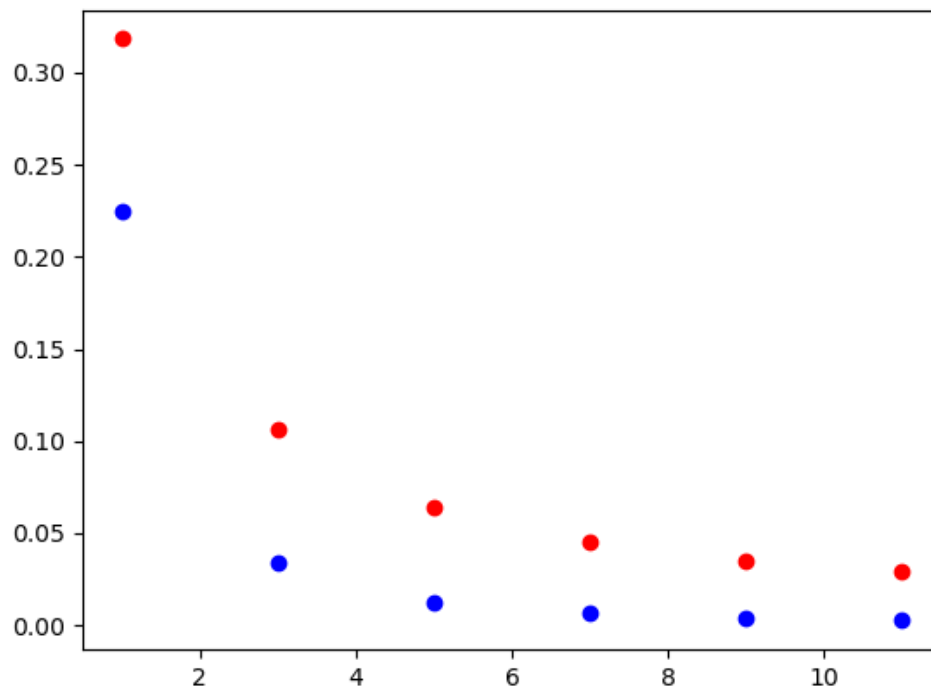
- 12 Amplitudene er absoluttverdiene til fourierkoeffisientene. Amplitudene til koeffisientene til x er

$$\left| \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{2n-1} \right| = \frac{1}{\pi(2n-1)}$$

mens amplitudene til y er (jeg setter $RC = 1$ for enkelhets skyld)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{(2n-1)i+1} \right| &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \left| \frac{1}{(2n-1)i+1} \right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \left| \frac{1-(2n-1)i}{(2n-1)^2+1} \right| \\ &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{(2n-1)^2+1}}{(2n-1)^2+1} \end{aligned}$$

Her er plot av amplituder (x er røde og y er blå) for $n = 1 \dots 11$. Merk hvordan de blå overtonene dempes mer og mer når n stiger.



13 Amplituderesponsen er

$$\begin{aligned}
 |H(i\omega)| &= \left| \frac{1}{RCi\omega + 1} \right| \\
 &= \left| \frac{-RCi\omega + 1}{(RC\omega)^2 + 1} \right| \\
 &= \frac{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}
 \end{aligned}$$

mens faseresponsen er

$$\begin{aligned}
 \arg(H(i\omega)) &= \arg\left(\frac{1}{RCi\omega + 1}\right) \\
 &= \arg\left(\frac{-RCi\omega + 1}{(RC\omega)^2 + 1}\right) \\
 &= \arg(1 - RCi\omega) = -\arctan(RC\omega)
 \end{aligned}$$

14 Temperaturfirkantbølgen er

$$f(t) \sim 20\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t} \right),$$

og difflikningen er

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Lapacetransformen til likningen er

$$sX - x(0) + \alpha X = F$$

så transferfunksjonen blir

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\
 &= ce^{-\alpha t} + 10 + \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H((2n+1)i\omega)}{2n+1} e^{(2n+1)i\omega t} \\
 &= ce^{-\alpha t} + 10 + \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)((2n+1)i\omega + \alpha)} e^{(2n+1)i\omega t}
 \end{aligned}$$

og krever vi $x(0) = 20$, får vi

$$c = 10 - \frac{20\alpha}{\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)((2n+1)i\omega + \alpha)}$$

hva nå enn dette er.

2 - 4 - INDREPRODUKTROM - LF

1 Under vår elskede coronapandemi kjørte jeg dette inn på video: <https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=996df708-18f0-4319-bdbd-acd00068f723>

3 Dette finner du også i videolenken over.

4 Siden

$$\frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|}{\|\mathbf{y}\|} = |a| \leq \|\mathbf{x}\|$$

kan vi gange opp med $\|\mathbf{y}\|$ og få

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

(Husk at $\|\mathbf{y}\| > 0$, så vi trenger ikke bekymre oss for noen fortegnsgreier når vi ganger opp.)

5 Vi kjører på

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

og så er det bare å ta kvadratroten:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

6 Argumentet er generisk; vi skriver

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2$$

og prikker med $\mathbf{y}_1$ på begge sider

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1 = c_1 \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_1$$

og bruker ortogonaliteten

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1 = c_1 \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1$$

og deler på $\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1$:

$$c_1 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}$$

Utleddningen av

$$c_2 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_2 \cdot \mathbf{y}_2}$$

er identisk.

7 Vi lar

$$P = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}.$$

Nå kan du selv sjekke at

$$P\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y}$$

ved å sette

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

og gange ut

$$\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y} \quad \text{og} \quad \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{x}$$

og sjekke at det blir det samme.

8 La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Dersom vi ganger systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ fra venstre med A^T , får vi $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. Men

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

som er kjappere å regne ut for hånd enn gausseliminasjon. Ikke at du skal regne så mye for hånd i ditt liv, men artig lell.

10 La de ortogonale vektorene hete $\mathbf{v}_k$, der $1 \leq k \leq n$. Vi har

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_l = \begin{cases} \|\mathbf{v}_k\|^2 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Vi må sjekke at likningen

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k$$

impliserer at $c_k = 0$ for alle k . Men om vi tar skalarproduktet med $\mathbf{v}_l$ får vi

$$0 = \mathbf{v}_l^T \mathbf{0} = \mathbf{v}_l^T \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_k = c_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l = c_l \|\mathbf{v}_l\|^2.$$

Siden $\mathbf{v}_l$ ikke er nullvektoren, må $\|\mathbf{v}_l\|^2 \neq 0$, og følgelig er $c_l = 0$.

- 11 Vi prikker med $\mathbf{v}_l$, bruker ortogonaliteten, og får

$$\mathbf{v}_l^T \mathbf{x} = \mathbf{v}_l^T \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_k = c_l \mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l$$

som gir

$$c_l = \frac{\mathbf{v}_l^T \mathbf{x}}{\mathbf{v}_l^T \mathbf{v}_l}$$

- 13 Lett! Dersom $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er ortogonale, er projeksjonen $\mathbf{z}$ av $\mathbf{x}$ i planet utspent av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{v}_1^T \mathbf{x}}{\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{x}}{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2$$

Skal du skjønne hvorfor, må du forstå resonnerementet som kommer etter denne oppgaven i økten.



2 - 5 - REGRESJON - LF

1 Disse er gitt ved

$$c = x_1 + 2x_2$$

for forskjellige verdier av c .

2 - 6 - HVA ER EN KATT? - LF

- 1] Jeg beregna faktisk den inverse i oppgave 9 i økt 2-4, det er bare å transponere A og så skalere radene litt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- 2] Her er det viktig å forstå at dersom P er en matrise med ortonormale kolonner, er

$$P^{-1} = P^T$$

og dette gjelder ikke for

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

for

$$V^T V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

men om vi normaliserer kolonnene og definerer

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \end{pmatrix},$$

er

$$PP^T = P^T P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Du kan nå sjekke selv at

$$A = P\Lambda P^T, \quad \Lambda = \text{diag}(9, 4, 0).$$

- 3] Vi beregner først det karakteristiske polynom

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda - 1) + (1 - (2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\ &= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Heldigvis er vi flinke i projeksjon, og ser at hvis vi bytter ut $\mathbf{v}_2$ med

$$\mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3} \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så er denne fortsatt egenvektor, men også ortogonal på både $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$. Dersom vi normaliserer alle egenvektorer og setter dem opp som kolonner i en matrise

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

vil $A = VDV^T$, der

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merk at egenvektorene som korresponderte til forskjellige egenverdier automatisk kom ut ortogonale. Dette var ikke tilfeldig, for

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = (\lambda_1 \mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = (A \mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T A^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T (A \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^T (\lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$$

slik at

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$$

eller

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0.$$

Dersom A er symmetrisk og $\lambda_1 \neq \lambda_2$ må altså $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$.

- 4 Dette er litt greit å vite, for det blir lettere å lese statistikkbøker om man er god i lineæralgebra.

$$\mathbf{1}^T \mathbf{1} = n$$

$$\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = n\bar{\mathbf{x}}$$

- 5 En projeksjon er en lineæroperator som tilfredsstiller $P = P^2$. Vi beregner

$$\begin{aligned} C_n^2 &= \left(I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) \left(I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right) \\ &= I - \frac{2}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \\ &= I - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \end{aligned}$$

Gjennomsnittet til den sentrerte variabelen er selvfølgelig null. Det er det som er poenget.

- 6 Med sentrerte variable der $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} = 0$, får vi

$$\beta_1 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad \text{og} \quad \beta_0 = 0.$$

Nå kjenner vi igjen β_1 som projeksjonen av $\mathbf{y}$ på $\mathbf{x}$.

- 7 Vi har

$$\mathbf{y} = \beta_{10}\mathbf{x}_1 + \beta_{01}\mathbf{x}_2 + \beta_0\mathbf{1}$$

altså

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta_{10} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + \beta_{01} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La nå A være matrisen

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ganger med A^T fra venstre for å få normallikningene:

$$A^T \mathbf{y} = A^T A \beta$$

Skrevet ut på komponentform blir dette

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 \\ n\bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_1\|^2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & n\bar{\mathbf{x}}_1 \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \|\mathbf{x}_2\|^2 & n\bar{\mathbf{x}}_2 \\ n\bar{\mathbf{x}}_1 & n\bar{\mathbf{x}}_2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{01} \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

Dersom $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{y} = 0$, blir dette mye enklere:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_1\|^2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & 0 \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \|\mathbf{x}_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{01} \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

og vi ser lett at $\beta_0 = 0$, slik at likningssystemet blir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_1\|^2 & \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \|\mathbf{x}_2\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{01} \end{pmatrix}$$

Et klassisk triks for å kjapt løse 2×2 -matriser, er å kjenne til formelen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

slik at

$$\begin{aligned} \beta &= (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|^2 \|\mathbf{x}_2\|^2 - (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2)^2} \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_2\|^2 & -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \|\mathbf{x}_1\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I dataanalyse er det også vanlig å dele ut standardavvikene. Dette er det samme som å normalisere vektorer i lineæralgebra. Gjør vi det, blir det enda penere:

$$\beta = \frac{1}{1 - (\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}^T \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}^T \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

8 Empirisk kovarians mellom to datasett $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ ser slik ut

$$\frac{1}{n-1} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

og dersom vi sentrerer, blir dette bare skalarproduktet mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ delt på $n-1$. Hvis du ser nøye på $\frac{1}{n-1} X^T X$ vil du se at hvert element er den empiriske kovariansen mellom de forskjellige kolonnene i X siden $X^T X$ bare er skalarprodukter mellom kolonner i X .

9 Alle matriser på formen $A^T A$ er positivt definitte om de har full rang, og positivt semidefinitte om de ikke har det.¹ Dersom A har full rang, er

$$0 < \|A\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}$$

så lenge $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dersom A ikke har full rang, er

$$0 \leq \|A\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x}$$

siden det finnes $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

¹Full rang betyr maksimalt antall lineært uavhengige rader eller kolonner:
[https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_\(linear_algebra\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra))

- 10 PCA er en teknikk for å projisere dataskyen inn på en retning i rommet slik at variansen til det resulterende envariable datasettet blir maksimert:

https://en.wikipedia.org/wiki/Principal_component_analysis

Jeg har plaget dere med dette fordi det er sentralt i kunstig intelligens, og skal du skjønne noe av dét er du nødt til å forstå lineæralgebra og statistikk. La oss anta for enkelhets skyld at X kun har to kolonner. Vi ønsker å finne den retningen $\mathbf{p}$ i koordinatsystemet der datamengden er plotta slik at datamengden projisert på $\mathbf{p}$ har så stor varians som mulig. Produktet $X\mathbf{p}$ er en lang kolonnevektor der element k er projeksjonen av datapunkt k på $\mathbf{p}$, og dersom vi ønsker å maksimere summen av kvadratene av disse, må vi maksimere

$$\|X\mathbf{p}\|^2 = \mathbf{p}^T X^T X \mathbf{p}.$$

Nå er det et standardresultat i numerisk analyse at om denne skal maksimeres, må man velge $\mathbf{p}$ som den egenvektoren til $X^T X$ med størst egenverdi.

- 11 Jeg er ikke ekspert på datatolkning, men får egenverdier på 36 og 28, så det betyr nok for alle praktiske formål ingen samvariasjon. Hvis det hadde vært stor forskjell på dem ville det betydd at det var mye variasjon når vi projiserte dataene på den ene egenvektoren og lite variasjon når vi projiserte på den andre.

- 13 De er ortogonalt diagonaliserbare siden de er reelle og symmetriske.

- 14 Dersom A har dimensjon $n \times p$, har $A^T A$ og V dimensjon $p \times p$ mens AA^T og U er $n \times n$. Siden AA^T har samme rang som A , som er høyst p , kan høyst p av egenverdiene til AA^T være forskjellige fra null.

- 15 Dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor til $A^T A$ med egenverdi $\lambda \neq 0$, kan vi gange likningen

$$A^T A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

med A og få

$$AA^T A \mathbf{v} = \lambda A \mathbf{v}$$

som sier at $A \mathbf{v}$ er en egenvektor til AA^T med den samme egenverdien. Dersom $\lambda = 0$ bryter dette sammen siden $A \mathbf{v} = 0$ og nullvektoren ikke kvalifiserer som egenvektor. Resonnementet den andre veien er likt, og egenvektorene til AA^T kaller vi $\mathbf{u}$. Egenverdiene må være større enn null, siden

$$0 \leq \|A \mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T A^T A \mathbf{v} = \lambda \|\mathbf{v}\|^2.$$

- 16 Beregningen i oppgaven over viser at dersom $\|\mathbf{v}\| = 1$ er

$$\|A \mathbf{v}\| = \sqrt{\lambda}.$$

- 17 I de foregående oppgavene har vi vist at

$$A \mathbf{v} = \sqrt{\lambda} \mathbf{u}$$

der $\mathbf{v}$ er en egenvektor til $A^T A$ og $\mathbf{u}$ er en egenvektor til AA^T , begge normaliserte og med egenverdi $\lambda \neq 0$. Setter vi opp alt dette i en matriselikning, får vi

$$AV = U\Sigma$$

der Σ er en diagonal og kvadratisk matrise med singularverdiene på diagonalen. Dette kalles den **reduerte svd-faktoriseringen** til A . Dersom $A^T A$ eller AA^T har egenverdier som er null kan vi utvide faktoriseringen til å inkludere de korresponderende egenvektorene, men disse er sjelden nyttige i praktiske anvendelser. Svd-faktoriseringen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

finner vi ved å beregne egenverdier og egenvektorer til

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

og for

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = 0 \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Du kan nå selv sjekke at

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dette kalles egentlig **reduert svd**. Vi kan inkludere den siste egenvektoren til AA^T , og skrive

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

som kalles **full svd**.

2 - 7 - BØLGE- OG VARMELIKNINGEN - LF

- 5 Den partiellderiverte med hensyn på x er

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t)y(x+h) - z(t)y(x)}{h} \\ &= z(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = z(t)y'(x).\end{aligned}$$

Beregningen for $\frac{\partial u}{\partial t}$ er lik.

- 6 Vi setter $u(x, t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen og får

$$\dot{z}(t)y(x) = \alpha z(t)y''(x).$$

Hvis vi nå deler ut $\alpha z(t)y(x)$, får vi

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}$$

og den eneste muligheten er at begge sidene av denne likningen er konstante, siden de er avhengige av hver sin variabel:

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k$$

Dette gir

$$y''(x) - ky(x) = 0,$$

og dersom vi skal ha $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, må vi ha $y(0) = y(\pi) = 0$. (Å sette $z = 0$ for alle t er åpenbart en dårlig ide, siden vi da får $u = 0$ for alle x og t .) Gjør du det samme med bølgelikningen, får du den samme konklusjonen.

- 7 Dersom $k = 0$, får vi $y(x) = ax + b$ der a og b er konstanter, og dersom $y(0) = y(\pi) = 0$, får vi $a = b = 0$. Dette er en gyldig løsning av randverdiproblemet, men vi får jo $u = 0$ for alle x og t , som ikke er særlig spennende, og dessuten ikke tilfredsstillende initialkravene. Dersom $k > 0$, får vi

$$y(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x},$$

som gir likningssettet

$$0 = y(0) = a + b$$

$$0 = y(\pi) = ae^{\sqrt{k}\pi} + be^{-\sqrt{k}\pi}.$$

Determinanten til dette systemet er $-2 \sinh \sqrt{k} \pi \neq 0$, så systemet har den entydige løsningen $a = b = 0$ dersom $k > 0$. Vi støter altså på samme problem. Dersom $k < 0$, får vi

$$y(x) = a \cos(\sqrt{-k}x) + b \sin(\sqrt{-k}x)$$

og nå er det håp. Kriteriet $y(0) = 0$ gir $a = 0$, mens $y(\pi) = 0$ kan tilfredsstilles ved å sette $\sqrt{-k} = n$, der $n \in \mathbb{N}$. Vi får følgende $k = -n^2$, slik at vi får en haug med løsninger på formen

$$y_n(x) = \sin(nx).$$

8 Siden $k = -n^2$, får vi

$$\dot{z}(t) + \alpha n^2 z(t) = 0,$$

som har løsning

$$z_n(t) = e^{-\alpha n^2 t},$$

slik at

$$u_n(x, t) = z_n(t) y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx).$$

9 Samme her, vi får

$$\ddot{z}(t) + c^2 n^2 z(t) = 0,$$

som har løsninger

$$z_n(t) = a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)$$

slik at

$$u_n(x, t) = (a_n \cos(cnt) + b_n \sin(cnt)) \sin(nx).$$

10 Setter vi inn $u_n(x, t) = z_n(t) y_n(x) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$ i initialkravet $u(x, 0) = f(x)$, får vi

$$f(x) = b_n \sin(nx).$$

Dette går åpenbart ikke med mindre f er en skalarmultippel av $\sin(nx)$. Joseph Fourier mente at dersom du prøver å legge sammen alle overtonene slik:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

kan du klare å få til

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

nesten uansett hva f er, og han hadde faktisk rett. En uendelig sum av sinuser kan du få til å bli nesten hva som helst, selv den infernalske og stygge lyden av en klarinett.

UKENS NØTTER

1 Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x + ct) + \psi''(x - ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \phi''(x + ct) + c^2 \psi''(x - ct).$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen. Tolkningen er at vi har to vandrende bølger, der ψ beveger seg mot høyre og ϕ mot venstre.

2 Vi vet at

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \quad (1)$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x, 0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$\dot{u}(x, 0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + \phi(0) - \psi(0).$$

Vi har nå et lineært 2×2 -likningssystem for ϕ og ψ . Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds + \phi(0) - \psi(0)$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds - \phi(0) + \psi(0)$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(s) ds - \int_0^{x-ct} g(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \end{aligned}$$

2 - 8 - FOURIERANALYSE II - LF

- 2] Litt triksing med trigonometriske funksjoner gir oss

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(mx) \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) dx \\ &= \begin{cases} \pi/2 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}\end{aligned}$$

siden både $\cos((m-n)x)$ og $\cos((m+n)x)$ er like mye over x -aksen som under på $[0, \pi]$. Unntaket er når $m = n$, for da blir $\cos((m-n)x) = 1$.

- 3] Vi ganger med $\sin(mx)$ og integrerer og får

$$\int_0^\pi \sin(mx) \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) dx = \int_0^\pi f(x) \sin(mx) dx.$$

Hvis vi flytter $\sin(mx)$ og bruker ortogonaliteten, får vi

$$\int_0^\pi f(x) \sin(mx) dx = \sum_{n=1}^N \int_0^\pi b_n \sin(mx) \sin(nx) dx = \frac{\pi b_m}{2}$$

slik at

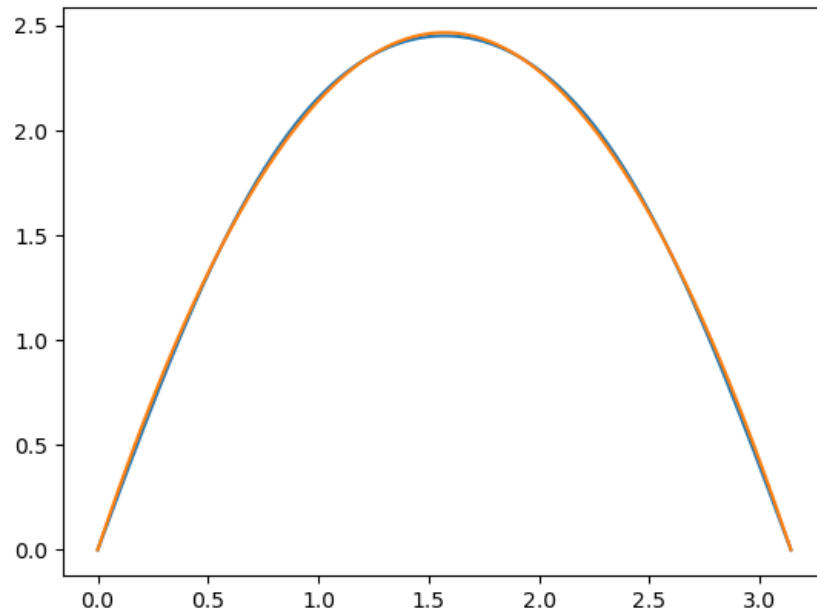
$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx = b_n.$$

Det er nå vanlig å bli forvirret av at jeg bytta fra m til n . Men dette er en dummy variable, det spiller ingen rolle hva den heter.

- 4] Vi får bare brette opp ermene:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x(\pi-x) \sin(nx) dx &= \frac{1}{n} \left(-x(\pi-x) \cos(nx) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\pi-2x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi (\pi-2x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n^2} \left((\pi-2x) \sin(nx) \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2}{n^3} \cos(nx) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{n^3} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{4}{n^3} & \text{odde } n \end{cases}\end{aligned}$$

Her er signalet og de to første leddene i rekken:



5 Varmedningsproblemet er

$$\dot{u}(x, t) = \alpha \Delta u(x, t) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad u(x, 0) = x(\pi - x)$$

og vi vet at funksjonene

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

alle tilfredsstillers varmelikningen og randkravene. Nå sier altså Joseph Fourier at atmosfæren vil fungere som et drivhus og at

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx)$$

tilfredsstillers

$$u(x, 0) = x(\pi - x)$$

dersom vi setter

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jevne } n \\ \frac{8}{\pi n^3} & \text{odde } n \end{cases}$$

slik at

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} e^{-\alpha(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x).$$

6 I denne modellen er varmeflyten proporsjonal med temperaturgradienten, så om man krever at temperaturgradienten er null i endepunktene, stenger man av varmeflyten der.

- 7 Vi gjentar suksessen fra forrige økt, og setter $u(x, t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen og får

$$\dot{z}(t)y(x) = \alpha z(t)y''(x).$$

slik at

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k$$

og

$$y''(x) - ky(x) = 0,$$

der k er en konstant. Dersom vi skal ha $\nabla u(0, t) = \nabla u(\pi, t) = 0$, må vi ha $y'(0) = y'(\pi) = 0$. Dersom $k = 0$, får vi $y(x) = ax + b$ der a og b er konstanter, og dersom $y'(0) = y'(\pi) = 0$, får vi $a = 0$, mens b kan være hva som helst. Dersom $k > 0$, får vi

$$y(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x},$$

som gir likningssettet

$$0 = y'(0) = a - b$$

$$0 = y'(\pi) = ae^{\sqrt{k}\pi} - be^{-\sqrt{k}\pi}.$$

Determinanten til dette systemet er $2 \sinh \sqrt{k}\pi \neq 0$, så systemet har den entydige løsningen $a = b = 0$ dersom $k > 0$. Dersom $k < 0$, får vi

$$y(x) = a \cos(\sqrt{-k}x) + b \sin(\sqrt{-k}x)$$

og nå er det håp. Kriteriet $y'(0) = 0$ gir $b\sqrt{-k} = 0$, mens $y'(\pi) = 0$ kan tilfredsstilles ved å sette $\sqrt{-k} = n$, der $n \in \mathbb{Z}$. Vi får følgelig $k = -n^2$, slik at vi får en haug med løsninger på formen

$$y_n(x) = a_n \cos(nx).$$

Merk at forskjellen fra Dirichletproblemet er at $n = 0$ også må med. Men det er fortsatt ikke vits i å ha med negative verdier av n . Når vi løser

$$\dot{z} + \alpha n^2 z = 0$$

får vi også konstante z som en mulighet, men konstant u er allerede tatt med i regnskapet, så konklusjonen er at

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)$$

alle er gyldige løsninger, også for $n = 0$. Initialkravet gir

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

slik at

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Formelen for a_n gir også riktig verdi for a_0 , dette er grunnen til faktoren $1/2$ foran a_0 i uttrykket for u .

8 Løs problemet over for initialvarmefordelingen $f(x) = x$.

9-10 Disse er så og si helt like som 7 over.

11-12 Disse er så og si helt like som oppgave 2 og 3 over. Ortogonaliteten gir oss et generisk resonnement vi kan bruke igjen og igjen og igjen.

13 Firkantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Denne er hverken odde eller jevn, men vi ser jo raskt at

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = 0$$

for alle $n \geq 1$, mens

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Videre kan vi beregne

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} (-\cos(nt)) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevn } n \end{cases} \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t).$$

Merk at vi skriver $\sim$ og ikke $=$ siden fourierrekken ikke tar den samme verdien som signalet i $t = \text{heltallsmultipler av } \pi$.

14 Fourierkoeffisientene blir

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = -\frac{1}{2in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) \\ &= -\frac{1}{in} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}. \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{-inx} \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx
 \end{aligned}$$

på $(-\pi, \pi)$.

15 Trekantbølgen er gitt ved den 2π -periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Denne er jevn, så vi vet at $b_n = 0$ for alle n . Vi beregner (funksjonen ser ut som en trekant, så her kan vi ta grunnlinje ganger høyde og dele på to)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

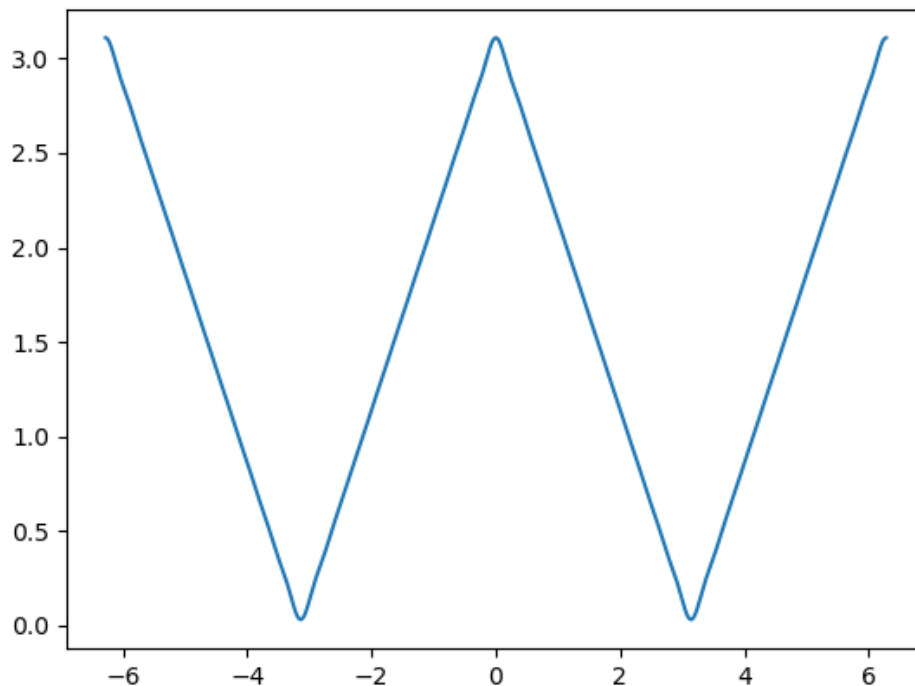
og

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} (\pi - t) \sin(nt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right) \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi} & \text{odde } n \\ 0 & \text{jevn } n \end{cases}
 \end{aligned}$$

slik at

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t).$$

Her er plot av en partialsum:



- 16 For firkantbølgen konvergerer rekka til $1/2$ i $x = 0$ og $x = \pm\pi$, så om vi vil at fourierrekkja og signalet skal være dønn likt, må vi egentlig definere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < \pi \\ 1/2 & \text{for } x = 0 \text{ og } x = \pm\pi \\ 0 & \text{for } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Samme greia med sagtannbølgen, men ingen problemer med trekantbølgen. Det som spiller en rolle her er om den periodiske utvidelsen er kontinuert, se økt 2-13.

- 17 Dersom $f(-x) = f(x)$ og $g(-x) = g(x)$, er

$$f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$$

så fg er jevn. De andre beregningene er like.

- 18 Det enkleste er å se på en typisk fourierkoeffisient:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx$$

Dersom f er jevn, blir innmaten i integralet odde, og følgelig blir integralet null.

2 - 9 - REELLE INDREPRODUKTROM - LF

1 La oss begynne med skalarproduktet. For det første er

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \mathbf{y}^T \mathbf{x},$$

for det andre er

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$$

og kun lik null for nullvektoren, og for det tredje er

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})^T \mathbf{z} = a\mathbf{x}^T \mathbf{z} + b\mathbf{y}^T \mathbf{z}.$$

Så til det andre indreproduktet. For det første er

$$\int_c^d x(t)y(t) dt = \int_c^d y(t)x(t) dt,$$

for det andre er

$$\int_c^d x(t)x(t) dt = \int_c^d x^2(t) dt \geq 0$$

siden $x^2 \geq 0$, og siden x er kontinuerlig er integralet bare null om $x(t) = 0$ for alle t , og for det tredje er

$$\int_c^d (ax(t) + by(t))z(t) dt = \int_c^d ax(t)z(t) + by(t)z(t) dt = a \int_c^d x(t)z(t) dt + b \int_c^d y(t)z(t) dt.$$

2 1: Vi bruker definisjonen på lengde og første aksiom, og beregner

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

På den ene side: Dersom

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

kan vi trekke denne fra likningen over og se at

$$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

som betyr at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale. På den andre: Dersom $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, får vi

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

2: Cauchy-Schwarz' ulikhet: $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$

La t være en skalar. Vi beregner først

$$\|x + ty\|^2 = (x, x) + 2t(x, y) + t^2(y, y).$$

Denne kvadratiske funksjonen av t er alltid positiv, og dersom y ikke er nullvektoren, har den et minimum i

$$t = -\frac{(x, y)}{(y, y)},$$

som gir

$$0 \leq (x, x) - 2\frac{(x, y)^2}{(y, y)} + \left(\frac{(x, y)}{(y, y)}\right)^2 (y, y) = (x, x) - \frac{(x, y)^2}{(y, y)}$$

eller

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

eller

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

3: Vi beregner

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

slik at

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

4: Vi antar at

$$x = \sum_{k=1}^n c_k v_k$$

Vi tar indreproduktet med v_m og bruker ortogonaliteten, og får

$$(x, v_m) = \left(\sum_{k=1}^n c_k v_k, v_m \right) = \sum_{k=1}^n c_k (v_k, v_m) = c_m (v_m, v_m)$$

slik at

$$c_m = \frac{(x, v_m)}{(v_m, v_m)}$$

for alle m . Dette betyr at

$$x = \sum_k \frac{(x, v_k)}{(v_k, v_k)} v_k$$

5: Først kan vi se at $x - z$ står ortogonalt på V , siden

$$\begin{aligned} (x - z, v_m) &= (x, v_m) - (z, v_m) \\ &= (x, v_m) - \left(\sum_k \frac{(x, v_k)}{(v_k, v_k)} v_k, v_m \right) \\ &= (x, v_m) - (x, v_m) = 0 \end{aligned}$$

for alle $\mathbf{v}_m$. Dersom $\mathbf{y}$ er en annen vektor i V , ligger også $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ i V , og da står $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ og $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ ortogonalt på hverandre. Pytagoras' setning med retningen på $\mathbf{y}$ byttet om gir

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z} - (\mathbf{y} - \mathbf{z})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2.\end{aligned}$$

for alle $\mathbf{y} \in V$.

- 3 Her gjelder det å huske trigonometriske identiteter. En klassiker er

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

og trekker man disse fra hverandre, får man

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Dersom $m = n$, kan vi gjøre slik:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} 1 - \cos(2n\omega t) dt = \frac{T}{2}$$

og dersom $n \neq m$, kan vi gjøre slik

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos((n-m)\omega t) - \cos((n+m)\omega t) dt = 0$$

De andre beregningene er tilsvarende. Jeg kunne fortsatt med å gange med $\sin m\omega t$ og integrert og kansellert, men helt seriøst, det er akkurat det samme som i beviset for fun fact 4 over. Du må bare forstå hva et indreprodukt er og så er det gudd.

- 4 Du kan sjekke at

$$(f, g) = \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k),$$

er et indreprodukt, og når vi finner minste kvadrats løsning, minimerer vi normen i akkurat dette indreproduktet. Fun fact fem sier at dette får du til nettopp ved å velge fourierkoeffisientene. Å måle feilen ved L^2 -normen slik

$$\|x - y\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - y(t))^2 dt$$

istedet, prøver du på en måte å minimere avstanden mellom x og y overalt istedet for bare i et endelig antall punkter, men prinsippet er det samme.

- 5 Oppgave 6 her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2018h/eksamen/tma4110-2018h-1f.pdf>

- 6 Dette er oppgave 6 herfra:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2018h/eksamen/tma4110-2018h-nb.pdf> og du finner løsningen her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2018h/eksamen/tma4110-2018h-1f.pdf>

- 7] Hvis du leser om legendrepolyomene på wikipedia, vil du se at de skal være ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

De to første moniske polynomene $P_0(x) = 1$ og $P_1(x) = x$ er allerede ortogonale med hensyn på indreproduktet over. Det neste, x^2 , er ortogonal på P_1 , men ikke på P_0 . Vi prøver Gram-Schmidt, og får

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 \\ &= x^2 - \frac{0}{2/3}x - \frac{2/3}{2} \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Merk ellers hvor deilig det er at $\cdot$ er frigjort til vanlig multiplikasjon etter at vi begynte å skrive $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ istedet for $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Det er vanlig å skalere legendrepolyomene slik at $P_n(1) = 1$, og $P_2(1) = 2/3$. Derfor ganger vi P_2 med $3/2$. Fortsetter vi slik som dette, får vi polynomene

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Det går an å vise at de tilfredsstiller rekursjonen

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

men det skal vi ikke gjøre.

- 8] Hvordan man løser denne avhenger litt av hvordan man tenker på uttrykket

$$(f, g) = \sum_{k=1}^n f(x_k) g(x_k).$$

Hvis du tenker på f og g som diskrete signaler, kun definert i gitterpunktene x_k , blir det veldig greit, for da er uttrykket over bare det vanlige skalarproduktet, og åpenbart et indreprodukt siden skalarproduktet er et indreprodukt.

Dersom du tenker på f og g i indreproduktet som funksjoner på $\mathbb{R}$ som er samlet i gitterpunktene, må vi være litt forsiktige, for aksiom nummer to sier at

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Hvis du ser nøye på hvordan dette aksiomet er formulert, ser du at det inneholder en implikasjon om at dersom $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, må $\mathbf{x}$ være nullvektoren. At nullvektoren må ha lengde null følger av det tredje aksiomet, siden

$$(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = (0 \cdot \mathbf{x}, 0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot 0 \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0,$$

og det andre aksiomet sier altså at ingen andre vektorer kan ha lengde null. Men dersom du tar en funksjon f som har et nullpunkt i alle gitterpunkter, vil

$$(f, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k)^2 = 0$$

selv om f ikke er konstant lik null, så vi ser nå at "litt" av aksiom to ikke holder. Men det er ikke så veldig alvorlig, for mye som er sant for indreprodukter, er fortsatt sant om dette aksiomet slakkes litt på. Fun factene i denne økten er for eksempel sanne dersom man er nøye på å kreve at den ovennevnte funksjonen holdes utenfor; dette kan du få til ved å kreve at basiser skal være ortonormale og ikke bare ortogonale. Nå er det ikke første gang i verdenshistorien noen støter på noe som er av interesse men som bare nesten tilfredsstiller det andre aksiomet, så det har et navn, og det er **semi-indreprodukt**,

- 9 Alt dette betyr at vi kan minimere avstanden mellom responsvariabelen og forklaringsvariabelen med avstanden induisert av indreproduktet over, og forvente at fourierkoeffisientene gir oss den korrekte minimerte avstanden. La oss tenke at vi har et datasett

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

og la $y(x)$ være en funksjon med funksjonsverdier $\mathbf{y}$. Vi er interessert i å finne den rette linjen $p(x) = \beta_1 x + \beta_0$ som minimerer avstanden til $y(x)$ målt i indreproduktet, som blir:

$$(p_1 - y, p_1 - y) = \sum_{k=1}^n (\beta_1 x_k + \beta_0 - y_k)^2$$

Dette er akkurat den kvadratsummen vi minimerte i forrige uke. En basis for alle rette linjer er $\{1, x\}$, men disse er ikke ortogonale med hensyn på dette indreproduktet, så vi må ortogonalisere litt. La oss kalle den ortogonale basisen $\{v_0, v_1\}$ og sette $v_0 = 1$. Gram-Schmidt gir

$$v_1(x) = x - \frac{\sum_{k=1}^n x_k \cdot 1}{\sum_{k=1}^n 1 \cdot 1} = x - \bar{x},$$

og basisen gitt av $v_0(x) = 1$ og $v_1(x) = x - \bar{x}$ er ortogonal, så nå er det bare å bruke fun fact 5, og skrive

$$p_1 = \frac{(y, v_0)}{(v_0, v_0)} v_0 + \frac{(y, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1.$$

Siden

$$\frac{(y, v_0)}{(v_0, v_0)} v_0 = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \cdot 1}{\sum_{k=1}^n 1 \cdot 1} = \bar{y}$$

og

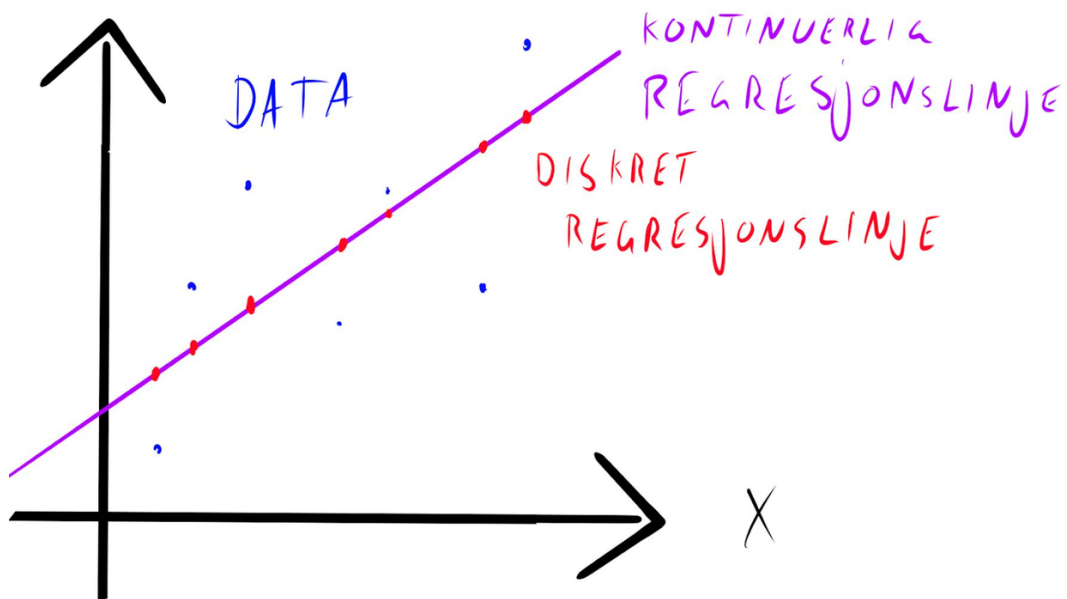
$$\begin{aligned} \frac{(y, v_1)}{(v_1, v_1)} &= \frac{\sum_{k=1}^n y_k \cdot (x_k - \bar{x})}{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}) \cdot (x_k - \bar{x})} \\ &= \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y} - n\bar{x}\bar{y}}{\|\mathbf{x}\|^2 - n(\bar{x})^2} \end{aligned}$$

får vi

$$p_1(x) = \bar{y} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y} - n\bar{x}\bar{y}}{\|\mathbf{x}\|^2 - n(\bar{x})^2} (x - \bar{x})$$

som du kan dobbeltsjekke er rett svar.

Det som er forskjellen på de to forskjellige tolkningene av indreproduktet, er hvorvidt denne løsningen er entydig. Hvis du tenker kontinuerlig, vil det ikke finnes noen entydig funksjon som minimerer avstanden, for du kan legge til en vilkårlig funksjon med nullpunkter i alle x_k uten at avstandsmålet "ser" noe til denne. Dersom du tenker diskret, får du ikke dette problemet. Men jeg har ikke plaget dere med entydighet, så ikke tenk så mye på det.



10 La oss begynne med å lage en (for vårt bruk) bedre ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. La

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{y} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\|} \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{y} \times \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\|}$$

Trikset er nå å skrive $\mathbf{x}$ i denne basen:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{v}_1 + \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\| \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3$$

Dette ser mer komplisert ut, men nå kan vi rotere de to siste koordinatene

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\| \\ 0 \end{pmatrix} = \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

og få

$$\begin{aligned}\text{rotert } \mathbf{x} &= (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{v}_1 + \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\| \mathbf{v}_2 \cos \theta + \|\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}\| \mathbf{v}_3 \sin \theta \\ &= (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) \mathbf{y}) \cos \theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin \theta \\ &= \mathbf{y} (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) (1 - \cos \theta) + \mathbf{x} \cos \theta + \mathbf{y} \times \mathbf{x} \sin \theta.\end{aligned}$$

- 11 Vi husker fra skolen at $\|\mathbf{y} \times \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \sin \theta$ der θ er vinkelen mellom $\mathbf{y}$ og $\mathbf{x}$, og dette er helt klart lengden av $\mathbf{x}$ projisert ned på planet normalt på $\mathbf{y}$. På skolen lærte du også høyrehåndsregelen, og hvis du setter deg ned med den, vil du se at det den gjør er det samme som å først gå ned i ovennevnte plan og så rotere nitti grader.

- 12 Du får identitetsmatrisen! For ortonormale matriser er $B^T = B^{-1}$. Dette skal vi bruke hardt kommende uke.

- 13 Vi kan faktisk klare enda bedre. La

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n d_k \mathbf{v}_k$$

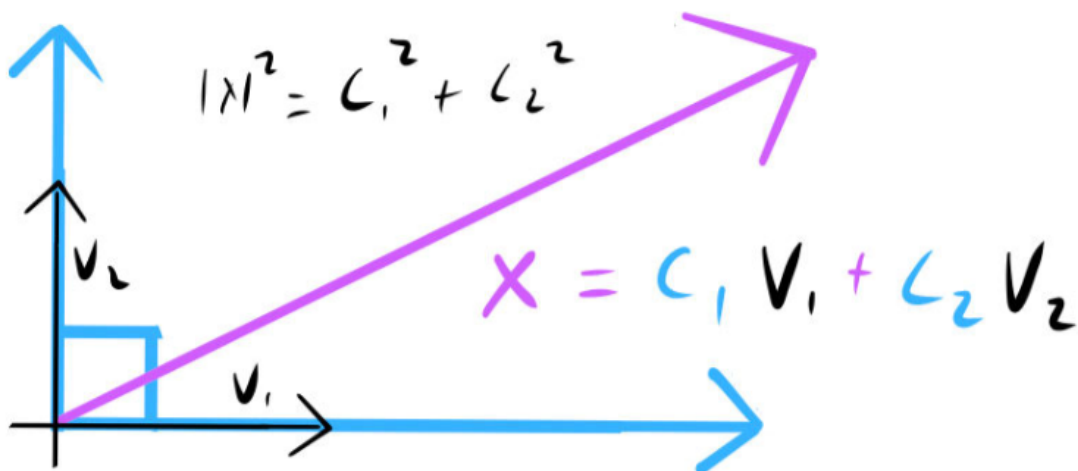
Da er

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{v}_k, \sum_{l=1}^n d_l \mathbf{v}_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k d_l (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = \sum_{k=1}^n c_k d_k\end{aligned}$$

Likningen

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n c_k^2$$

er et spesialtilfelle. I $\mathbb{R}^2$ ser det slik ut:



TMA4101/4106/4111/4121



2 - 10 - KOMPLEKSE INDREPRODUKTROM - LF

1 Den adjungerte til

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$

er

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{pmatrix}$$

2 La

$$z = z_1 + z_2 i \quad w = w_1 + w_2 i \quad |w| = 1.$$

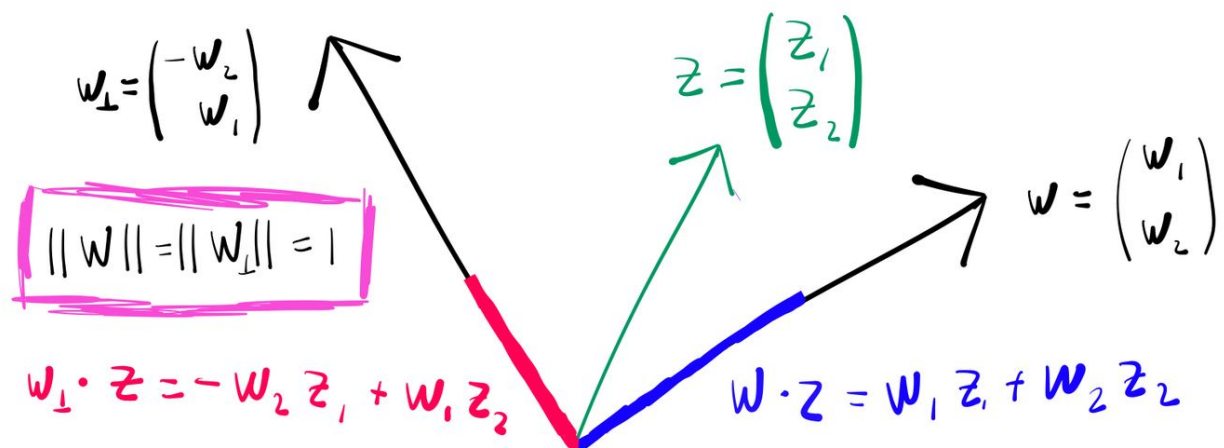
og

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_\perp = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

Vi beregner:

$$\begin{aligned} w^* z &= (w_1 - w_2 i)(z_1 + z_2 i) \\ &= w_1 z_1 + w_2 z_2 + (-z_1 w_2 + z_2 w_1) i \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{w} + \mathbf{z}^T \mathbf{w}_\perp i \end{aligned}$$

Produktet $w^* z$ sin realdel er skalarprojeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}$, mens imaginærdelen er skalarprojeksjonen av $\mathbf{z}$ på normalen til $\mathbf{w}$. Hvis du ikke synes dette er vakkert, er du en hard nøtt.



2 - 11 - FOURIEROMVENDING - LF

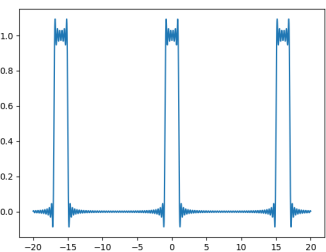
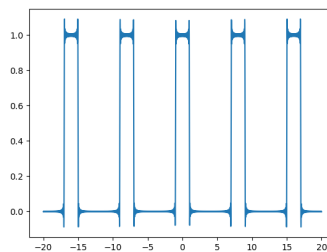
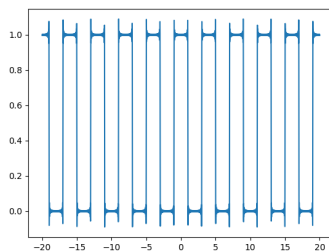
1 La $T > 2$. Vi beregner

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1}^1 e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{in\omega T} (e^{in\omega} - e^{-in\omega}) = \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \end{aligned}$$

og $c_0 = 2/T$. Vi setter så sammen rekken, og får

$$\begin{aligned} y(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} + \sum_{n \neq 0} \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} + \frac{\sin(-n\omega)}{(-n\omega)} e^{-in\omega t} \right) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{in\omega t} + \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} e^{-in\omega t} \right) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}) \right) \\ &= \frac{2}{T} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega)}{n\omega} \cos(n\omega t) \right) \end{aligned}$$

Under er plot av en partialsum med de hundre første leddene for T lik 4, 8, og 16.



9 Vi beregner:

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}\end{aligned}$$

Denne kalles sinc-funksjonen og er veldig viktig i elektroteknikk. Merk likheten med fourierkoeffisientene fra forrige oppgave

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0)}{n\omega_0}$$

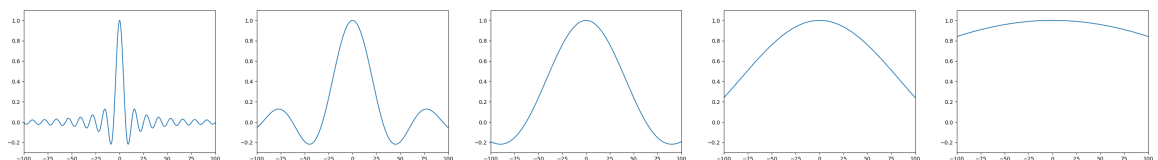
der jeg har bytta navn fra ω til ω_0 for å poengtere at et periodisk signal har en grunnfrekvens ω_0 og så dekomponeres signalet i heltallsmultipler av denne. I fouriertransform gir ikke konseptet "grunnfrekvens" noen mening lenger, for når signalet ikke er periodisk, må man fort ha alle frekvenser på den reelle akse for å rekonstruere signalet:

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}$$

10 Denne blir ikke helt ulik den forrige:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1/2a}^{1/2a} ae^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-a}{i\omega} (e^{-i\omega/2a} - e^{i\omega/2a}) = \frac{\sin \omega/2a}{\omega/2a}\end{aligned}$$

Her er plot av denne for a lik 1, 5, 10, 20 og 50. Merk at når $a \rightarrow \infty$ går $\hat{f}$ mot 1 overalt. Dette har sammenheng med oppgave 12 under.

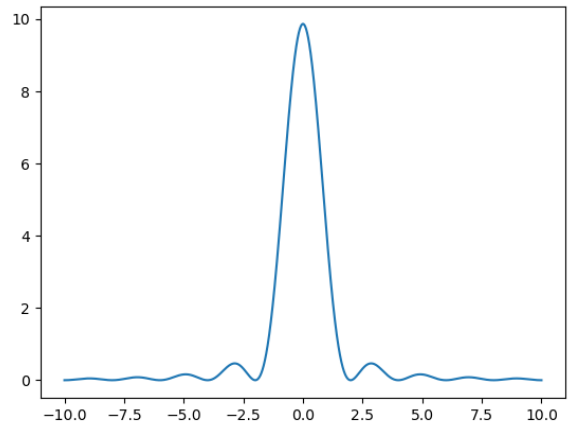


11 Trekantpulsen er gitt ved

$$x(t) = \begin{cases} \pi - |t| & |t| \leq \pi \\ 0 & \pi < |t| \end{cases}$$

Vi beregner

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos(\omega\pi)) \end{aligned}$$



12 Lett!

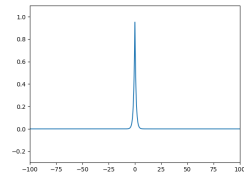
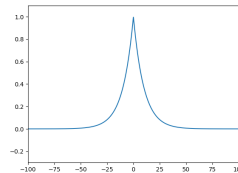
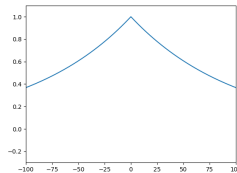
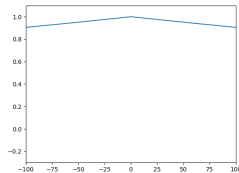
$$\hat{\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1$$

Se på oppgave 10 over. Signalet

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \begin{cases} a & |t| < 1/2a \\ 0 & |t| \geq 1/2a \end{cases}$$

er en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på.

13 Denne funksjonen er også en av mange heuristiske måter å sette opp diracpulsen på. Her er plot for a lik 0.001, 0.01, 0.1 og 1:



$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} e^{(a-i\omega)t} \Big|_{t=-\infty}^{t=0} - \frac{1}{(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Dette gir OGSÅ en heuristisk finfin måte å sette opp diracpulsen på når $a \rightarrow 0$.

- 14 Her bruker vi et skittent triks som vi ikke egentlig kan bruke. Men vi er ingeniører og eier ikke skam, så det går bra. I forrige oppgave regnet vi ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

og hvis vi skal tro de som har peiling, er følgelig

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

Hvis vi bytter fortegn på t og ganger med π/a , får vi

$$\frac{\pi}{a} e^{-a|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} e^{-i\omega t} d\omega$$

som er det vi er ute etter, bare med variabelnavnene byttet om. For ordens skyld kan vi bytte:

$$\frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega)$$

- 15 Her kan du bruke oppgave 10 og samme triks.

- 16 Vel, tosidig laplacetransform er

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

slik at

$$X(i\omega) = \hat{x}(\omega)$$

Litt forenklet kan man nok si at i fagfelt der man er opptatt av initialbetingelser (for eksempel regulerings- og prosesseteknikk), er det litt skummelt å si at fourier er spesialtilfelle av laplace (fordi regnereglene for derivasjon blir litt forskjellige), men i fagfelt der man ikke er det (kretsanalyse), er det samme greia.

- 17 I denne oppgaven må vi begynne å tenke litt på hva vi fourieromvender. Siden $e^{-i\omega t}$ alltid ligger på enhetssirkelen i det komplekse planet, ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt.$$

Med andre ord kan vi være sikre på at integralet konvergerer dersom $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ er et tall og ikke uendelig. Vi sier i dette tilfellet at x er **absolutt integrerbar**, og du kan i bunn og grunn tenke på x som en skalarmultippel av en sannsynlighetsfordeling. Vi kan nå delvisintegrere slik

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{x} \end{aligned}$$

siden

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0.$$

- 18 La $y(t) = x(t - \theta)$ Vi tar et trivielt variabelskifte, og beregner

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega(p+\theta)} dp \\ &= e^{-i\omega\theta} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p} dp = e^{-i\omega\theta} \hat{x}(\omega).\end{aligned}$$

- 19 La $y(t) = e^{i\theta t} x(t)$. Her er det ikke nødvendig med variabelskifte en gang:

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} x(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i(\omega - \theta)t} dt = \hat{x}(\omega - \theta).\end{aligned}$$

- 20 La $y(t) = x(at)$ og la $a > 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = \frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

La så $y(t) = x(at)$ og la $a < 0$. Et variabelskifte gir

$$\begin{aligned}\hat{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(p) e^{-i\omega p/a} dp = -\frac{1}{a} \hat{x}(\omega/a).\end{aligned}$$

Alt i alt kan vi skrive dette som

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{x}(\omega/a).$$

- 21 La oss studere funksjonen

$$x(t) = e^{-t^2/2}$$

Hele utledningen bygger på to pene faktum. Det første er at

$$\dot{x}(t) = -te^{-t^2/2}$$

og det andre er at

$$\frac{d}{d\omega} x(t) e^{-i\omega t} = -ite^{-t^2/2} e^{-i\omega t}$$

som tilsammen gir

$$i\omega \hat{x}(\omega) = \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -te^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = -i \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega)$$

eller

$$\omega \hat{x}(\omega) + \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = 0.$$

Som alle barn i barnehagen vet, kan en differensiallikning ofte løses ved å herje litt og integrere. I dette tilfellet er herjingen å gange med $e^{\omega^2/2}$:

$$e^{\omega^2/2} \omega \hat{x}(\omega) + e^{\omega^2/2} \frac{d}{d\omega} \hat{x}(\omega) = 0,$$

for da ser vi at dette er bare likningen

$$\frac{d}{d\omega} (e^{\omega^2/2} \hat{x}(\omega)) = 0,$$

som integrerer til

$$e^{\omega^2/2} \hat{x}(\omega) = c,$$

eller

$$\hat{x}(\omega) = c e^{-\omega^2/2}.$$

Konstanten c kan vi bestemme ved å evaluere likningen i $\omega = 0$:

$$c = \hat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

Det siste integralet skal vi som sagt komme tilbake til neste semester. Konklusjonen er at

$$\hat{x}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2},$$

og siden fourieromvending er en lineæroperator, er fourieromvendingen til standardnormalfordelingen $e^{-\omega^2/2}$, enkelt og greit.

Standardnormalfordelingens karakteristiske funksjon er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{i\omega t} dt$$

Men dette kjenner vi igjen som inversomvendingen til det vi nettopp regna ut. Vi vet jo at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega$$

eller

$$e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} e^{i\omega t} d\omega$$

og høyresiden er nettopp det vi er ute etter, bare med feil variabelnavn. Konklusjonen er at

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{i\omega t} dt = e^{-\omega^2/2}.$$

Hvis du ikke liker at jeg bruker inversomvendingen så fritt, kan du prøve å kopiere resonnementet vi brukte for å regne ut fourieromvendingen til standardnormalfordelingen; det er bare en minus her og der som blir forskjellig.

2 - 12 - SCHRÖDINGERLIKNINGEN - LF

- 2] V er et energipotensiale, og både

$$i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \quad \text{og} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x)$$

har benevnning joule, så separasjonskonstanten er energi, derav E . Kvantefysikkfolk er stort sett opptatt av å finne E i forskjellige situasjoner.

- 3] Siden den ene siden av likningen kun avhenger av t og den andre kun av x , må E være konstant. Likningen

$$i\hbar \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = E$$

gir

$$i\hbar \dot{f}(t) = E f(t)$$

som løses av

$$f(t) = e^{-Eit/\hbar}.$$

Resten av likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E$$

gir den tidsuavhengige schrödingerlikningen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi = E\psi.$$

- 4] Greit, så vi må løse likningen

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + E\psi = 0.$$

At $E > 0$ følger av randkravene og kravet om at $|\Psi|^2$ skal være en sannsynlighetstetthet. Dersom $E = 0$ får vi

$$\psi(x) = ax + b$$

og dersom denne rette linjen skal tilfredsstillе $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, må $a = b = 0$, men da blir arealet under $|\Psi|^2$ null, og det kan vi ikke ha noe av. Dersom $E < 0$, får vi

$$\psi(x) = ae^{\sqrt{-2Em}x/\hbar} + be^{-\sqrt{-2Em}x/\hbar}.$$

Skal dette tilfredsstillе $\psi(0) = 0$, må $a = -b$, og skal vi ha $\psi(\pi) = 0$, får vi

$$0 = a \left(e^{\sqrt{-2Em}\pi/\hbar} - e^{-\sqrt{-2Em}\pi/\hbar} \right) = 2a \sinh \left(\sqrt{-2Em}\pi/\hbar \right)$$

Sinushyperbolicusfunksjonen er som kjent ikke null for positive argumenter, så da må $a = 0$, og slik får vi også nå ingen sannsynlighetstetthet. Altså må $E > 0$, og vi får

$$\psi(x) = a \sin \left(\sqrt{2Em}x/\hbar \right) + b \cos \left(\sqrt{2Em}x/\hbar \right)$$

Hvis vi nå bruker $\psi(0) = 0$, får vi $b = 0$, mens $\psi(\pi) = 0$ gir

$$0 = a \sin(\sqrt{2Em}\pi/\hbar).$$

Dette klarer vi fint på andre måter enn $a = 0$; vi kan nemlig sette $\sqrt{2Em}\pi/\hbar$ til å være en heltallsmultiplum av π , som gir

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m}$$

der n er ovennevnte heltall. Dette er de berømte kvantiserte energinivåene, og alt i alt har vi nå en uendelig familie av løsninger på formen

$$\Psi_n(x, t) = a_n e^{-E_n i t / \hbar} \sin nx = a_n e^{-i \frac{\hbar}{2m} n^2 t} \sin nx.$$

Det som gjenstår er nå å sette a_n slik at $|\Psi|^2$ blir en sannsynlighetstetthet. Vi beregner

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\pi |\Psi(x, t)|^2 dx \\ &= \int_0^\pi |a_n e^{-E_n i t / \hbar} \sin nx|^2 dx \\ &= |a_n|^2 \int_0^\pi \sin^2 nx dx \\ &= |a_n|^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2} |a_n|^2 \end{aligned}$$

som gir

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\theta}$$

der θ er en ukjent kompleks faseforskyvning. Denne ser det ut til at kvantefysikkfolk ikke bryr seg så mye om, så vi setter $\theta = 0$, og får

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

som gir

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-E_n i t / \hbar} \sin nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i \frac{\hbar}{2m} n^2 t} \sin nx$$

Nå er det på sin plass å observere at dette er det samme vi får ved å løse varmelikningen

$$\dot{u} = \alpha u''$$

med $\alpha = \frac{i\hbar}{2m}$ og så normalisere istedet for å bruke initialkrav.

5 Vi beregner

$$\begin{aligned} \langle \Psi_k | \Psi_n \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{E_k i t / \hbar} \sin kx e^{-E_n i t / \hbar} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} e^{(E_k - E_n) i t / \hbar} \int_0^\pi \sin kx \sin nx dx = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

7 Energi kan måles i lab, altså må det være egenverdien til en hermittisk lineæroperator. Hermittiske lineæroperatorer har reelle egenverdier, og følgelig må alt som har benevnning energi (i vårt tilfelle V og E) være reelle tall.

10-12 Du skal få slippe å kunne den kvanteharmoniske oscillatoren til eksamen i år. Om du allikevel er interessert, har Astrid gjort oppgavene her:

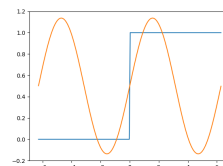
<https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=1cbef379-e0f2-4ba0-8661-b0f200efba55>
<https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=86202190-1c63-42ba-b86d-b0f200efe9f1>

2 - 13 - SKJELETTENE I SKAPET - LF

1 Det er 1.

2 Også 1!

4 Den oransje funksjonen er kontinuerlig, men ikke den blå. Fy skam python, her burde du ikke tegnet den vertikale linjen. Funksjonen skal hoppe opp! Argh.



6 Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

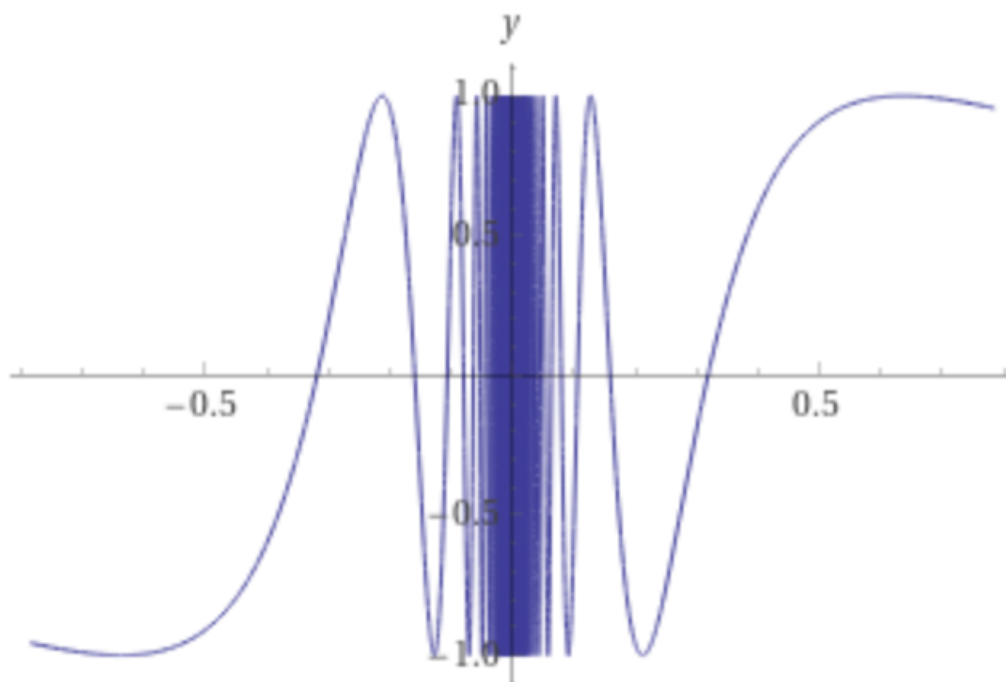
eksisterer ikke. Siden $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

og $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, ser vi at dersom du står i $x = a$ og lar $x \rightarrow 0$ vil $\sin\frac{1}{x}$ ha uendelig mange oscillasjoner mellom a og 0 , uansett hvor liten a er. Så konklusjonen er at dersom du har en kandidat for grenseverdi L , og velger $0 < \epsilon < 1$ og $\delta > 0$ som du tror gjør jobben, vil $|\sin\frac{1}{x} - L| \geq 1$ for en eller annen $|x| < \delta$, og L er altså ikke en grenseverdi allikevel.



7 Min påstand er at

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Velg $\epsilon > 0$. Siden sinusfunksjonen alltid er mindre enn én i absoluttverdi, kan vi sette opp ulikheten

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Hvis vi velger $\delta = \epsilon$ og krever at $|x| < \delta$, vil

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| \leq |x| < \delta = \epsilon$$

og derfor er grenseverdien 0. Med andre ord har vi at

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

og følgelig er f kontinuert i $x = 0$.

8 Nei, grenseverdiene eksisterer ikke i $t = \pm 1$.

11 Dersom brøken

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

skal ha en grenseverdi når $h \rightarrow 0$, må

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

som er det samme som å si at f må være kontinuert i x .

12 Vi beregner

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$$

Denne eksisterer ikke, så f er ikke deriverbar i $x = 0$.

13 Samme her,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

14 Vi beregner

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0$$

så f er deriverbar i $x = 0$. Men om vi deriverer f , får vi

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

som ikke er kontinuert i $x = 0$, siden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

ikke eksisterer.

15 La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen er $\mathcal{C}^1$, for den deriverte

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er en kontinuert funksjon. Det er også greit å sjekke at den dobbellderiverte eksisterer i $x = 0$, så f er to ganger deriverbar. Men om du deriverer f' , får du en funksjon som ikke har grenseverdi inn mot $x = 0$, så $f \notin \mathcal{C}^2$.

16 Dette skal vi komme tilbake til litt senere når vi har sett på konvergensradius.

17 Vi beregner på samme vis som i det reelle tilfellet:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2z + h = 2z$$

For å derivere sinusfunksjonen må vi først finne ut litt mer om sinusfunksjonen. Ifølge Leonhard Euler er

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{og} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Dette gir

$$\cos i\theta = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh \theta \quad \text{og} \quad \sin i\theta = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = i \sinh \theta$$

slik at

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + yi) \\ &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + yi) \\ &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

La $u(x, y) = \sin x \cosh y$ og $v(x, y) = \cos x \sinh y$. Nå kan vi bruke neste oppgave og beregne

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \cos z.$$

- 18 La h reise mot $z = x + yi$ langs $h(t) = t$ (der $t \in \mathbb{R}$), altså en rett linje parallell med realaksen. Vi beregner

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Vi gjentar så eksperimentet med den rette linjen $h(t) = it$, slik at vi reiser inn i z parallelt med imaginæraksen.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) + iv(x, y+t) - u(x, y) - iv(x, y)}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{iv(x, y+t) - iv(x, y)}{it} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

De to uttrykkene for f' må være identiske hvis $f'(z)$ skal eksistere, og da må real- og imaginærdelene være like. Dette kalles Cauchy-Riemann-likningene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$