

1 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER I

I middelalderen trodde de at lus var bra for helsen siden syke folk har få lus. Dette er et klassisk eksempel på sammenblanding av korrelasjon og kausalitet; den korrekte mekanismen går motsatt vei. Syke folk får ofte feber før de får andre symptomer, og lusen liker ikke høy kroppstemperatur, så de forlater verten før andre symptomer oppstår. Hvis du ikke kan måle feber¹, vil det derfor se ut som om lusen forlater verten *før* verten blir syk,² men dette er altså feil. I moderne kvantitativ vitenskap er man fullstendig opphengt i dette med å finne den korrekte **mekanismen**.³

Et av standardverktøyene for å kvantifisere den korrekte mekanismen når man først har funnet den, kalles **differensiallikninger**. Differensiallikninger er uunværlige for å modellere alle slags tidsavhengige prosesser i fysikk, kjemi, og biologi. I tidsavhengige prosesser bruker vi gjerne x (eller en annen passende bokstav) for størrelsen som modelleres, t for tiden, og en spesiell notasjon for den tidsderivate, oppfunnet av Isaac Newton:

$$\dot{x}(t) = x'(t)$$

Differensiallikninger er subtile greier, og det er lurt å studere de enkleste av dem ganske nøye.

Her er den aller enkleste. Prokaryoter og mange typer sopp (for eksempel ølgjær) deler seg ved såkalt avsnøring; dette betyr at de kloner seg selv fra tid til annen.⁴ *E. Coli* deler seg for eksempel omtrent hvert tjuende minutt ved vår kroppstemperatur 310 K. La $x(t)$ være antall bakterier ved tiden t . Dersom bakteriene alltid deler seg i to etter det samme tidsintervallet, er *den endringen* $\dot{x}(t)$ *proporsjonal med antall bakterier* $x(t)$:

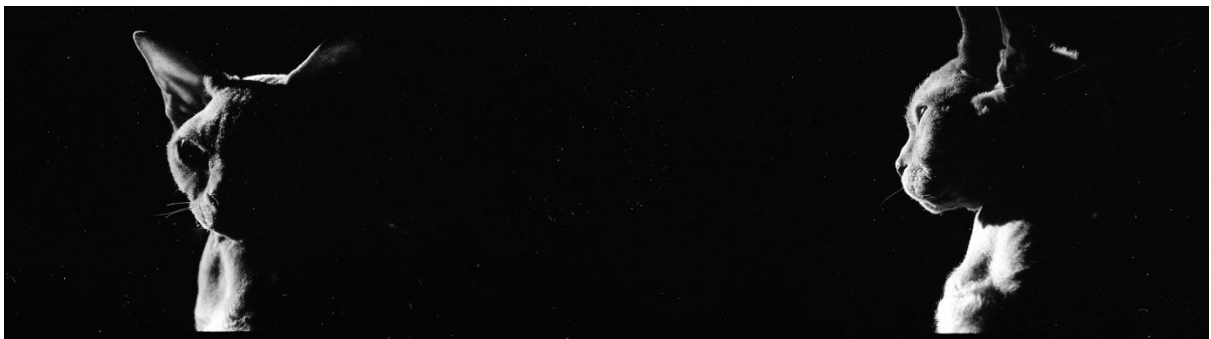
$$\dot{x}(t) = \lambda x(t)$$

Det er en spesiell grunn for å kalle proporsjonalitetskonstanten λ ; dette vil bli klart litt lenger ut i semesteret. I biologi kalles λ **vekstraten**.

1 Dersom $\lambda = 1$, er likningen så enkel at selv barn i barnehagen kan løse den:

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

Finn en løsning.



¹Pålitelige termometere ble ikke oppfunnet før på 1700-tallet: <https://en.wikipedia.org/wiki/Thermometer>

²<https://www.ecdc.europa.eu/en/all-topics-z/disease-vectors/facts/factsheet-lice-phthiraptera>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Scientific_method

⁴<https://snl.no/celledeling>

Hvis du slår opp i en tabell over derivasjonsregler, finner du nok regelen

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t$$

og hvis du ser nøye etter, ser du vel at dette i bunn og grunn er det samme som $\dot{x} = x$. Med andre ord passer $x(t) = e^t$ i likningen. Men det gjør også

$$x(t) = ce^t$$

der c er en vilkårlig konstant.

2 Dobbeltsjekk dette.

Vi har altså en hel familie av løsninger. Dette kan vi utnytte som følger. Dersom man har en petriskål full av bakterier og ønsker å spå hvor stor kulturen er etter så og så lang tid, må man starte med en kultur på en gitt størrelse. I matematikk kalles dette en **initialbetingelse** eller et **initialkrav**:

$$x(0) = x_0.$$

Kombinasjonen av en differensiallikning og en initialbetingelse kalles et **initialverdiproblem**.

3 Finn løsningen til initialverdi problemet $\dot{x} = x$, $x(0) = 2$.

Som sagt deler *E. Coli* seg omtrent hvert 20. minutt ved vanlig kroppstemperatur, og

$$\dot{x} = \lambda x \quad x(0) = x_0$$

er en enkel modell for veksten. En bestemt verdi $x(t)$ kan du tenke på som totalt antall bakterier i et bestemt volum eller totalt antall bakterier per liter eller arealet bakteriene dekker i en petriskål eller noe annet i den dur. Alt er lov så lenge det er korrekt, og du er konsistent.

4 Finn løsningen til $\dot{x} = \lambda x$, $x(0) = x_0$.

Verdien til vekstraten λ avhenger av hva vi måler t i. Finn λ for *E. Coli* dersom t måles i

5 timer **6** minutter **7** sekunder **8** 20-minutters inkremitter (denne blir pen)

Hvis du synes alt dette er litt corny, kan du ta i betraktning denne videoen av bakterievekst:
<https://www.youtube.com/watch?v=gEwzDydcIWc>

5678 Stopp videoen om lag en gang i sekundet og tell antall bakterier på skjermen.



Fra gymnasen sitter du antagelig igjen med følgende leveregel:

$$\text{INTEGRASJON} = \text{ANTIDERIVASJON}$$

Det er feil, men en naturlig konklusjon å trekke etter gymnasen. At man sitter igjen med et slikt inntrykk, skyldes **analysens fundamentalteorem**:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Denne, sammen med **kjerneregelen** eller **integrasjon ved substitusjon**:

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(g(t))) dt = \int_a^b f'(g(t)) g'(t) dt$$

og **produktregelen** eller **delvis integrasjon**:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(t)g(t)) dt = \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

er det man fokuserer mest på på gymnasen, for det er så enkelt å lage eksamensoppgaver om det.

Det finnes empirisk evidens for at Homo Sapiens' store styrke er å følge oppskrift.⁵ Nå skal du få en oppskrift for å løse differensiallikninger:

- 1: Herj litt med likningen. Gang eller del med noen greier.
- 2: Integrer med en av reglene over. Gjør du steg 1 riktig, får du det til, men det trengs gjerne litt erfaring for å finne korrekt steg 1.

Oppskriften funker stort sett på alle difflikninger dersom de faktisk kan løses med penn og papir. Jeg skal nå illustrere med et eksempel, la oss løse

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \quad x(0) = x_0.$$

Steg 1 er å skrive alt på én side

$$\dot{x}(t) - \lambda x(t) = 0$$

gange likningen med $e^{-\lambda t}$, og så observere at

$$0 = e^{-\lambda t}(\dot{x}(t) - \lambda x(t)) = \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)).$$

Hvis vi nå bruker analysens fundamentalteorem med $f(t) = e^{-\lambda t}x(t)$, $a = 0$ og $b = t$, får vi

$$e^{-\lambda t}x(t) - x(0) = 0,$$

og bruker vi $x(0) = x_0$ og løser for $x(t)$, sitter vi til slutt igjen med

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}.$$

Nå har jeg brukt bestemt integral, og da blir det ikke noen integrasjonskonstant. Resonnementet funker fint med ubestemt integral óg; dette er mest smak og behag.

⁵https://www.eva.mpg.de/documents/Springer/Call_Copying_AnimCog_2005_1555317.pdf
https://www.eva.mpg.de/documents/Wiley-Blackwell/Tennie_Push_Ethology_2006_1555112.pdf

Styrken til differensiallikninger er at en og samme differensiallikning kan modellere vidt forskjellige fysiske prosesser. Dette hjelper oss til å klassifisere fysiske fenomener etter *oppførsel istedet for innpakning*. Nå tar vi en helt annen modell som leder til nøyaktig samme differensiallikning.

Første Mosebok påstår at jorden er omtrent seks tusen år gammel. Hvis dette er sant, er det noe galt med vår forståelse av grunnstoffet karbon. Karbon forekommer i de tre isotopene C-12, C-13 og C-14. C-14 er en ustabil isotop, og halveringstiden er på omtrent 5700 år, men C-14-konsentrasjonen i atmosfæren ligger allikevel noenlunde stabilt på grunn av kosmisk stråling og et par atombombep prøvesprengninger. Når du puster utveksler du karbon med atmosfæren, og derfor er C-14-konsentrasjonen i kroppen din og i atmosfæren omtrent den samme. Når du dør blir du avskåret fra denne utvekslingen, og etter 5700 år vil C-14-andelen i kroppen din være omtrent halvert. Siden det finnes fossiler som har vesentlig lavere C-14-andel enn femti prosent, er jorden pent nødt til å være mye eldre enn 6000 år. Med andre ord: om du tror at jorden er 6000 år gammel, kan du ikke samtidig tro på kjernefysikk. Du er pent nødt til å velge en av dem.^{6 7}

Radiokarbondatering modelleres av akkurat den samme likningen som *E. Coli*.⁸ Dersom t måles i år og $x(t)$ er C-14-konsentrasjonen, tilfredsstiller x likningen

$$\dot{x}(t) = -\frac{\ln 2}{5700}x(t)$$

der $\lambda = \ln(2)/5700$ kalles **desintegrasjonskonstanten** eller **nedbrytningskonstanten**.

[9] En død *Felis silvestris lybica*⁹ inneholder omtrent en tiendedel av min C-14-konsentrasjon. (Jeg lever ennå.) Finn ut omtrent når dyret avgikk med døden.

[10] Tritium¹⁰ har halveringstid på 12 år og 3 måneder. Finn desintegrasjonskonstanten.



⁶ Jorden er faktisk ganske gammel: https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium-lead_dating

⁷ <https://www.nature.com/articles/s41586-021-03972-8>

⁸ https://en.wikipedia.org/wiki/Radiocarbon_dating

⁹ *Felis silvestris lybica* er den ancestrale huskatten: https://en.wikipedia.org/wiki/African_wildcat

¹⁰ https://en.wikipedia.org/wiki/Isotopes_of_hydrogen

I kjemi er det vanlig å skrive

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

der $[A]$ er konsentrasjonen av stoffet som halveres, så egentlig burde den ukjente i forrige eksempel hete $[^{14}_6\text{C}]$ og ikke x . Men hvis du så din første differensiallikning i dag og så måtte dechiffere likningen

$$\frac{d}{dt} [^{14}_6\text{C}] = -\frac{\ln 2}{5700} [^{14}_6\text{C}]$$

kan det tenkes du ikke ville skjønne noe som helst bare fordi den ukjente hadde et rart navn du ikke var vant til.¹¹ Nå skal vi se på enda en helt annen situasjon som gir opphav til den samme differensiallikningen, og da støter vi på et uunngåelig notasjonsproblem.

La oss finne ut hvordan trykket varierer med høyden i en høy og tynn sylinder dersom den er fylt av en ideell gass.¹² Nå er du blitt vant til at den ukjente størrelsen i en differensiallikning heter $x(t)$, men nå skal jeg sette opp en differensiallikning for trykket som funksjon av høyden, og du er antagelig vant til at trykket heter p og at høyden h , så da får det nesten bli $p(h)$ og ikke $x(t)$. Jeg skal bruke den ideelle gasslov¹³

$$pV = NkT$$

og dersom jeg hadde skrevet den

$$xV = NkT$$

samt brukt t istedet for h for høyden, hadde noen garantert blitt forvirret av dette også.

Så da får det bli $p(h)$. Hvis vi antar at trykkforskjellen mellom h og $h+dh$ kun skyldes vekten av gassen mellom disse to høydene, kan vi skrive (trykket er naturligvis høyere ved h enn ved $h+dh$)

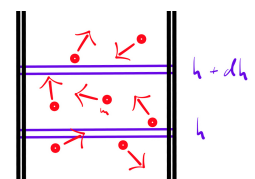
$$p(h) - p(h+dh) = \frac{mgN}{V}dh$$

der N er antall gassmolekyler mellom h og $h+dh$, m er massen til hvert molekyl, og g er tyngdeakselerasjonen. Jeg har også brukt at arealet av tverrsnittet kan skrives V/dh , der V er volumet mellom h og $h+dh$. La oss nå bruke den ideelle gasslov, og dele på dh :

$$\frac{p(h+dh) - p(h)}{dh} = -\frac{mg}{Tk}$$

Dersom vi lar $dh \rightarrow 0$ og antar at T er konstant, får vi differensiallikningen

$$p'(h) = -\frac{mg}{Tk}p(h).$$



- 11** Anta at dette er en modell for trykket i atmosfæren, finn trykket som funksjon av høyden over havet, og sammenlikne med faktiske kurven. (Søk på nett.)



¹¹Det går rykter om at det en gang var en instituttstyrer som satt ut et helt totimersmøte og trodde at diskusjonen handlet om auditoriet R2 i realfagsbygget, mens det i realiteten handlet om faget R2 i videregående skole.

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law

¹³Jeg skriver NkT istedet for NkT . Det er lettere å huske siden det rimer på "NTH"

Dersom vi nå bare kompliserer ecoliradiokarbondateringatmosfæretrykksdifferensiallikningen litt og slenger på en konstant β :

$$\dot{x} = \lambda x + \beta$$

får vi en modell for et par helt andre ting.

12 Vis at løsningen er

$$x(t) = ce^{\lambda t} - \beta/\lambda$$

der c er en vilkårlig konstant.

(Du kan kopiere resonnementet på side 2.)

Den første modellen vi får er Newtons avkjølingslov:

https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling

La oss si at vi har en kokt elgtunge med temperatur $T(t)$ som ved tiden $t = 0$ har temperaturen T_0 , og så setter vi den inn i et kjøleskap med temperatur T_K . Newtons avkjølingslov sier at temperaturendringen $\dot{T}(t)$ er proporsjonal med temperaturforskjellen mellom kjøleskapet og elgtungen:

$$\dot{T}(t) = \alpha (T_K - T(t)) \quad T(0) = T_0$$

Proporsjonalitetskonstanten $\alpha > 0$ inneholder all informasjon om hvor fort varmekraften går mellom elgtungen og omgivelsene, og varmekapasiteten til elgtungen og så videre. Det er lurt å holde tungen beint i munnen, sortere alt slik vi pleier, og se at dette er en likning på formen over.

13 Hva er λ og β , og hva er løsningen?

(Hint: Har du λ og β , har du også løsningen, jf. forrige oppgave.)

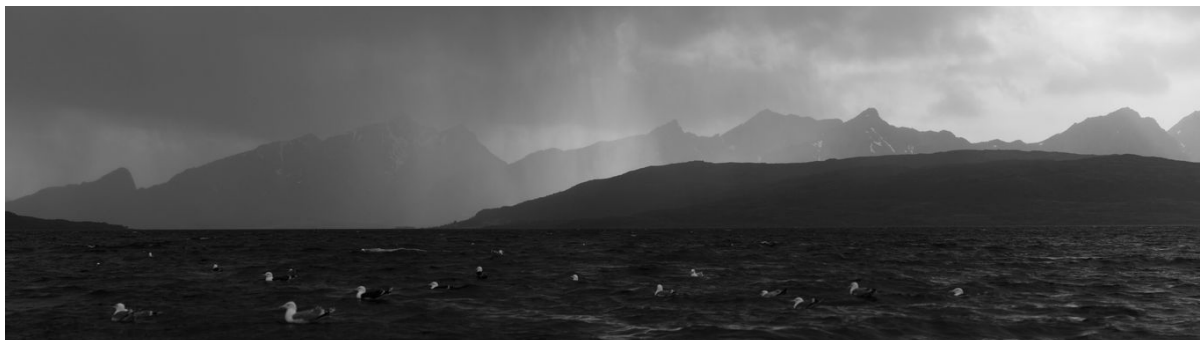
Jeg har brukt Newtons avkjølingslov med hell et par ganger når jeg skulle brygge øl og ikke hadde spiralkjøler. Vørteren må kjøles fra 373 til 298 K (da skal gjæren oppi), og dette tar noen timer. Dersom du måler temperaturen på minst to forskjellige tidspunkt, kan du estimere α og så gjøre et anslag på når temperaturen er riktig. Dette er gunstig, for da kan man gjøre noe annet i mellomtiden. Hvis du også vil lære å gjøre dette, kan du løse følgende gamle eksamensoppgaver i TMA4100.

14 En elgtunge med temperatur 6°C settes på kjøkkenbenken. Etter to timer er temperaturen steget til 13°C , og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C . Finn α og lag et plot av temperaturen.

15 Da temperaturen var 15°C , ble elgtungen satt inn igjen i kjøleskapet. En time senere var temperaturen i tungen sunket til 12°C . Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

Klassiker! Oppgave 7 herfra:

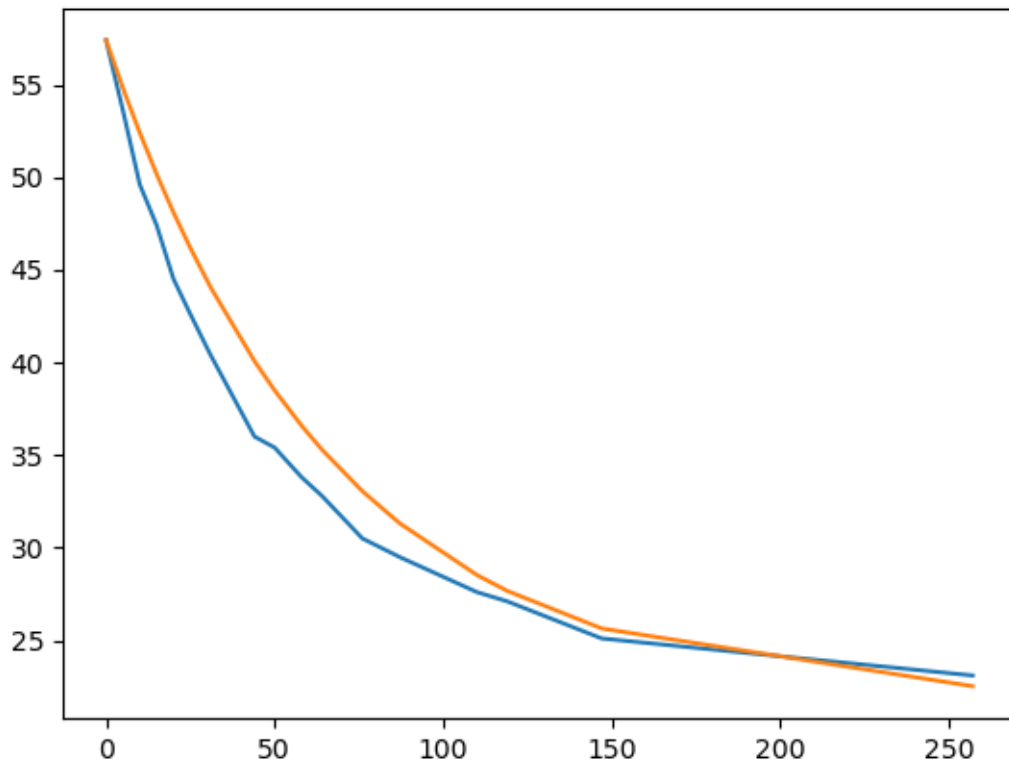
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/tma4100_2013h.pdf



Hvis du ikke tror på at Newtons avkjølingslov har noe for seg, kan du studere dette plottet av målte temperaturer (blå) i en liten rektangulær boks med vann som jeg lot avkjøle på kjøkkenbenken en tidlig morgen her i Vallegata 8 i Norges hippeste strøk St. Hanshaugen. Den første temperaturmålingen var 57.4 grader, og temperaturen i rommet var stort sett 21.8. De små uregelmessighetene i kurven skyldes det dårlige termometeret mitt og unøyaktige tidspunkt for målingene. I tillegg ser det ut til at formen på Newtons avkjølingslov bommer litt på stigningen på begynnelsen. Antagelig har det med fordampning å gjøre; Newtons avkjølingslov tar ikke høyde for det, og vann fordamper raskest ved høy temperatur.

Mer realistisk 15 Finn ut omtrent hva α er i dette tilfellet.

(Dette kan gjøres på flere måter; til våren skal vi lære å gjøre det ordentlig.)



James Clerk Maxwell publiserte på 1860-tallet den første komplette modellen av elektromagnetisme. Han formulerte dette som noen og tyve ymse empiriske regler, og Oliver Heaviside kondenserte alt ned til fire likninger, som kan skrives enten

$$\begin{array}{ll}
 \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \\
 \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{eller} \\
 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \iint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} \\
 \iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\
 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
 c^2 \int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}
 \end{array}$$

Likningene kalles henholdsvis Gauss' lov, Gauss' lov for magnetisme, Faradays induksjonslov og Amperes lov. Dette er et koblet sett med partielle differensiallikninger, der

- $\mathbf{E}$ er det elektriske feltet
- $\mathbf{B}$ er det magnetiske feltet
- c er lyshastigheten i vakuum
- ρ er en gitt ladningstetthet
- $\mathbf{J}$ er en gitt strømteethet
- ϵ_0 er permittiviteten i vakuum

Kraften mellom to punktladninger q_1 og q_2 i tomt rom er gitt ved **Coulombs lov**¹⁴

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

der r er avstanden mellom ladningene. Loven kan utledes fra Maxwells første likning, og det skal vi gjøre neste år. Denne loven ble oppdaget eksperimentelt av forskjellige personer på 1700-tallet, men Charles-Augustin de Coulomb skrev den ned korrekt som førstemann i 1785. Et elektron har ladning på omtrent $1.60217663 \cdot 10^{-19}$ C, så kraften mellom to elektroner på én meters avstand er på om lag $2 \cdot 10^{-28}$ N. Til sammenlikning er gravitasjonskraften mellom de samme elektronene på om lag $5 \cdot 10^{-71}$ N. Når du setter deg på en stol er det de sterke elektriske kreftene mellom molekylene som hindrer den i å knekke sammen under vekten din. Maxwells lover beskriver disse kreftene kvantitativt.



- 16 For å illustrere hvor vanskelig det er å huske noe man ikke forstår, kan du nå nipugge Maxwells lover i to minutter nå og så sjekke om du greier å skrive dem opp imorgen.

¹⁴<https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb's Law>

TMA4101/4106/4111/4121



Vi må en tur innom en av Maxwells lovers viktigste forenklinger, nemlig **kretsteori**. Siden det finnes kraft mellom ladde partikler, finnes det også potensiell energi mellom ladde partikler. Det foretrukne målet er joule per coulomb eller **volt** som vi gjerne sier, og størrelsen kalles **spenning**. Dette tallet forteller hvor mange J potensiell energi en ladning på 1 C (tenk på en klump med 10^{19} elektroner) har i forhold til et annet punkt i rommet. Et 9 volts batteri har spenning på om lag 9 volt mellom terminalene, men dette endrer seg litt etterhvert som batteriet blir utladet.

En **krets** er noen **kretselementer** koblet sammen med ledning. Et kretselement er en dings der det finnes en relasjon mellom strømmen $i(t)$ gjennom dingsen og spenningen $v(t)$ over den. Relasjonene kalles **elementlover**, og her er de tre viktigste.

MOTSTAND

$$v(t) = Ri(t)$$



Dette kan du tenke på som en gammeldags lyspære som lyser og avgir varme.¹⁵ **Motstandsverdien** R forteller noe om spenningsfallet som en funksjon av strømmen gjennom motstanden.

SPOLE

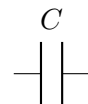
$$v(t) = Li'(t)$$



Dette er en strømledning som er lagt i spiral; trafoen oppe i gaten din er full av disse.¹⁶ **Induktansen** L avhenger av spolens lengde og geometri og om det ligger spikre inni spiralen og så videre.

KONDENSATOR

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$



En kondensator er en ting som kan lagre elektrisk energi og slippe den ut igjen, ikke helt ulikt et batteri, men bygget på litt andre prinsipper og med litt annen oppførsel.¹⁷ **Kapasitansen** C måles i coulomb per volt, og avhenger av størrelsen på kondensatorplatene, hva de er laget av, hvor langt de står fra hverandre, hva slags materiale som ligger mellom dem og så videre. Den enkleste formen for kondensator er to plater som er fysisk adskilte, men laget av et metall som kan fylles opp med eller tappes for elektroner. Myelinlaget utenpå nervetrådene dine har litt kapasitans, og sørger for at innsiden og utsiden av nervecellen fungerer som en kondensator - ved multiplabel sklerose degenereres myelinlaget og så blir kapasitansen for høy og så går ikke nervesignalene som de skal.¹⁸



¹⁵<https://en.wikipedia.org/wiki/Resistor>

¹⁶<https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor>

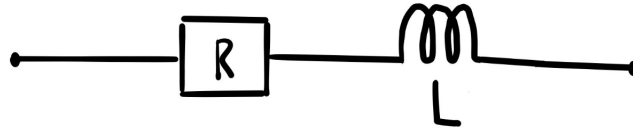
¹⁷<https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor>

Kondensatorer kan faktisk være et godt alternativ til batteri i noen anvendelser:

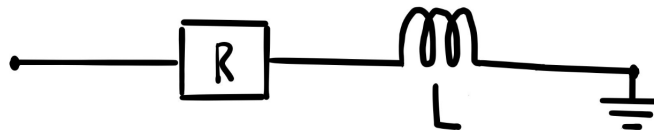
<https://en.wikipedia.org/wiki/Supercapacitor>

¹⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Hodgkin-Huxley_model

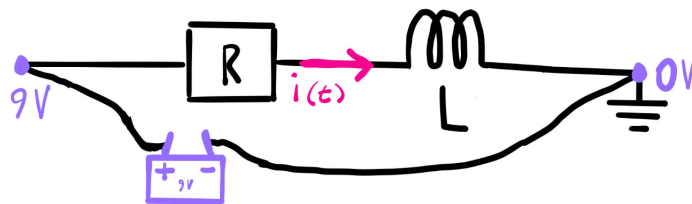
Kretsteori er anvendelig i andre fagfelt enn kretsteknikk - i elektrokjemi er det uunværlig, og det finnes en egen forskningsretning som studerer forholdet mellom kretsteori og kjemiske reaksjoner.¹⁹ La oss nå sette en motstand og en spole i serie slik:



Så må vi bestemme oss for nullnivået for spenning. Dette kalles *jord*, og indikeres slik:



Hvis vi nå kobler et batteri vil det begynne å gå strøm:



Dette kalles en *RL-krets*, og vi kan finne strømmen $i(t)$ ved å sette opp en differensiallikning. Spenningen mellom de to lilla punktene er 9 volt, og det spiller ingen rolle om vi går via batteriet eller de to seriekoblede kretselementene. Dette kalles **Kirchhoffs spenningslov**, og gir at

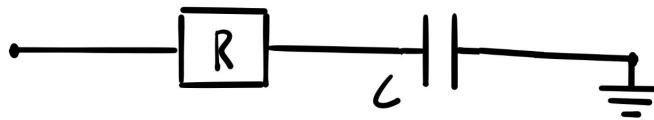
$$Li'(t) + Ri(t) = 9$$

- 17 Finn strømmen i . (Du kan anta at $i(0) = 0$.)

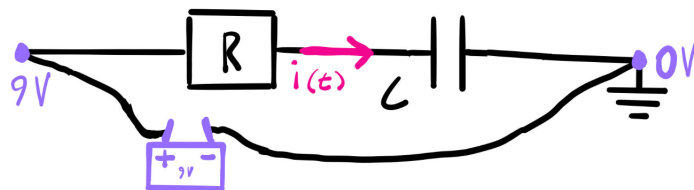


¹⁹<https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.13.021041>

Vi kan gjøre det samme med en kondensator:



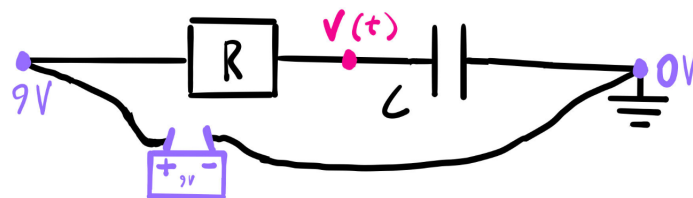
Setter vi på et 9 volts batteri, vil det også nå gå strøm i kretsen:



Dette kalles en RC-krets, og på samme måte som for RL-kretsen, kan vi sette opp en likning ved å kreve at spenningen mellom de to lilla punktene er den samme over batteriet som over seriekoblingen av elementene:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = 9.$$

Huff og huff, integrallikninger har vi ikke lært å løse. Det er nok best å gjøre litt om her og sette kondensatorspenningen opp som ukjent istedet:



Dersom vi antar $v(0) = 0$, er den ukjente gitt ved

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

og følgelig er

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

slik at differensiallikningen blir

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9.$$

18 Finn $v(t)$. (Husk at $v(0) = 0$.)

19 Modellerer uten prediktiv kraft er verdt null og niks. Finn en person med elsyskoffert og få vedkommende til å koble opp denne kretsen. Regn og mål og dobbeltsjekk at det er sånn omtrent riktig. Den svarte pinnen på multimeteret skal på jord, og den røde på $v(t)$.

RC- og RL-kretsen modelleres av nøyaktig samme differensiallikning som Newtons avkjølingslov og E. Coli og radioaktiv nedbrytning. På de foregående ti sidene har du grunnen til å lære matematikk i et nøtteskall - ett og samme initialverdiproblem

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \beta \quad x(0) = x_0$$

med løsning

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}$$

er en modell for så mange forskjellige ting at det er galskap å bli ingeniør uten å lære seg det.

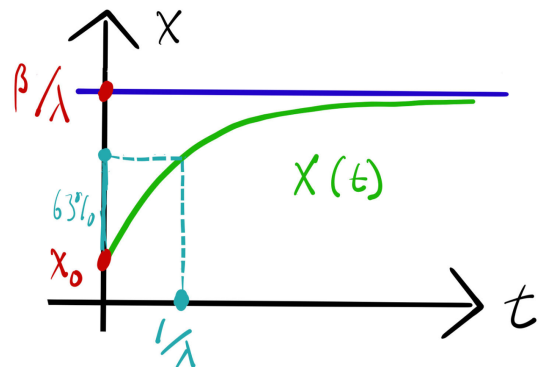
Matematikere foretrekker av ymse grunner å bytte fortegn på λ og sortere likningen slik at alt som involverer den ukjente x står på den ene siden av likningen:

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = \beta$$

Løsningen blir da

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\beta}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + \frac{\beta}{\lambda}$$

istedet. Til høyre er et generisk plot.



Vi kaller $1/\lambda$ **tidskonstanten** til differensiallikningen.²⁰ Siden $1/e \approx 0.36787944117$, ser vi at ved $t = 1/\lambda$, har x nådd om lag 63 prosent av veien fra x_0 til β/λ . Dette initialverdi problemet er forresten et eksempel på et **lineært tidsinvariant system**²¹ og hvis du sier til en gammel ingeniør at du har et LTI-system med tidskonstant sånn og sånn, vil figuren over umiddelbart dukke opp på vedkommendes hjernebark. Til og med leger bruker dette; naboen min er nukleærmedisiner.²²

20 Finn tidskonstantene til alle problemene du har løst så langt.



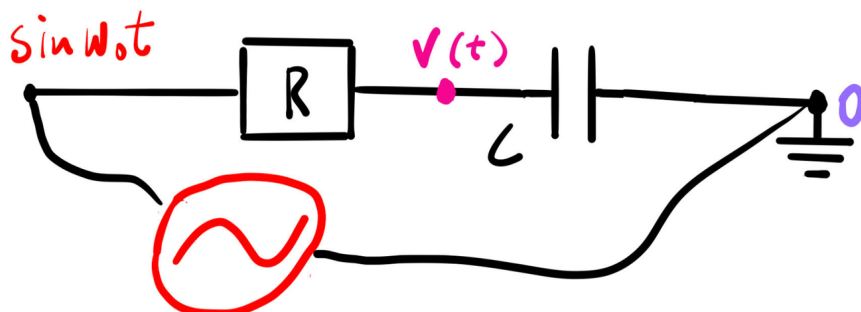
²⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Time_constant

²¹https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_time-invariant_system

²²<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-4012-3>

Stikkontakten i veggen har ikke likespenning, slik som et batteri. Spenningen er mere sinusoidal, for den er generert av en roterende turbin i et vannkraftverk.²³ Dersom du bytter ut batteriet i RC-kretsen med en sinusoidal spenning med vinkelfrekvens ω_0 , gir Kirchhoffs spenningslov

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = \sin(\omega_0 t).$$



Det går faktisk an å utlede en formel for løsningen til

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \quad x(0) = x_0$$

der x er den ukjente og f er en gitt funksjon, kalt **påtrykket**. Påtrykket er noe som leverer en påvirkning av systemet som er *uavhengig av oppførselen til x* . Vi har behandlet spesialtilfellet $f(t) = \beta$, men nå kan altså f få være hva som helst. Trikket er å gjette på en løsning på formen

$$x(t) = c(t)e^{-\lambda t}.$$

Det er lettere å forstå hvor denne ideen kommer fra når man studerer systemer av differensiallikninger, så det skal vi komme tilbake til et annet semester, men la oss nå teste ut hva som skjer. Dersom vi setter $c(t)e^{-\lambda t}$ inn i likningen, får vi en pen kansellering, og så står vi igjen med

$$\dot{c}(t)e^{-\lambda t} = f(t).$$

Vi kan nå gange opp med $e^{\lambda t}$ og integrere:

$$c(t) = \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds$$

Vi har nå en funksjon

$$x(t) = c(t)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds$$

som løser initialverdi problemet

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \quad x(0) = 0.$$

Å finne en løsning som tilfredsstiller $x(0) = x_0$ er nå lett - vi bare legger til $x_0 e^{-\lambda t}$ (dette går bra siden den kansellerer på venstresiden av differensiallikningen), og får

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t f(s)e^{\lambda s} ds \\ &= x_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned}$$

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_current

der x_h står for **homogen løsning** og x_p for **partikulær løsning**. Uttrykket

$$\int_0^t f(s)e^{-\lambda(t-s)} ds$$

kalles en **folding** eller **konvolusjon**. Hvis du har lest en mer avansert bok om differensiallikninger vet du at dette er den eneste løsningen du noensinne kommer til å finne.

21 Denne utledningen kan du bli spurt om på eksamen.

22 Løs $RC\dot{v}(t) + v(t) = \sin(\omega_0 t)$ $v(0) = v_0$.



UKENS NØTTER

Da jeg var student, syntes jeg alt dette var litt irriterende, for jeg skjønnte ikke hvordan man kunne være sikker på at det ikke fantes noen andre løsninger. Løsningen til

$$\dot{x} + ax = 0 \quad x(0) = x_0$$

er

$$x(t) = x_0 e^{-at}.$$

og dette er faktisk den eneste løsningen.

2 Vis dette.

3 Initialverdiproblemet

$$\dot{x} - \sqrt{x} = 0 \quad x(0) = 0$$

har flere løsninger. Finn to av dem.

Det er andre differensiallikninger enn de vi har studert i denne økten som lar seg løse analytisk. Trikket er det samme - gang eller del med et eller annet og integrer.

4 Fallskjermlikningen

$$\dot{v} = 1 - v^2$$

er en separabel likning som modellerer farten til en fallskjermhopper. Løs likningen med forskjellige initialkrav, plott løsningene oppå hverandre, og forklar hva som skjer.

Differensiallikninger har i noen tilfeller enorm prediktiv kraft. Hvis du skal sende en rakett til månen, må du løse en haug med differensiallikninger bygget på Newtons gravitasjonslov. Men realistisk modellering er fryktelig komplisert - noen av de enkle modellene vi studerer her passer greit til måldata (for eksempel RC-kretsen), mens noen er håpløst inadekvate (for eksempel atmosfæretrykkmodellen). Vi må allikevel gjennom dem, for det er umulig å forstå kompliserte modeller uten å først forstå enklere modeller. Ecolimodellen

$$\dot{x} = ax \quad x(0) = x_0 \quad a > 0$$

spår eksponensiell vekst for all fremtid. Men som David Attenborough i 2013 uttalte under et foredrag i The Royal Geographical Society:

"Anyone who thinks that you can have infinite growth in a finite environment is either a madman or an economist."²⁴

Dyr som formerer seg kan sjelden fortsette med det uten å før eller siden oppleve noen som helst form for begrensning i veksten. De må jo ha mat. Maurkolonier og sjimpanseflokker dreper hverandre.

²⁵ Den enkleste utvidelsen for å inkorporere dette i modellen vi startet med, er å erstatte a med en positiv funksjon som har et nullpunkt i den bestanden x som maksimalt kan opprettholdes på området. Hvis vi gjør det enkelt og sier at denne funksjonen skal være en rett linje, får vi det **logistiske problemet**²⁶

$$\dot{x} = a(1 - x/k)x \quad x(0) = x_0 \quad a > 0, k > 0$$

²⁴Sitatets opprinnelse er noe usikker. Det var nok ikke han som fant det på.

²⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Gombe_Chimpanzee_War

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function

der k er en konstant som kalles **bærekapasiteten**. Hvis du ser nøye på likningen, vil du nok se at når x stiger mot k , vil vekstraten synke mot null, slik at dyrene formerer seg saktere og saktere. Denne likningen kan løses, men det er ikke trivielt.

$$x(t) = \frac{kx_0 e^{at}}{k - x_0 + x_0 e^{at}}.$$

- 5 Løs og plott i python for forskjellige a , k og x_0 .
(Søk opp "separable equation".)

- 6 Likningen

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

løses på samme måte som Balchens foldingstriks; det er bare litt mer hårete. Prøv.

Kjemiske reaksjoner kan gå fort og langsomt, og det finnes differensiallikninger som modellerer reaksjonshastighet. Reaksjonshastighet er viktig, for noen reaksjoner bør helst gå fort (for eksempel forbrenning) mens andre bør gå sakte (for eksempel korrosjon). Atmosfæren består av 78 prosent nitrogen og 21 prosent oksygen. Ved vanlig trykk og temperatur reagerer ikke disse, men ved for eksempel lynnedslag eller forbrenning i dieselmotorer eller skogbrann blir det mer fart i dem, og så kombinerer de til nitrogenoksider (NO_x). Det er disse som gir Los Angeles sin berømte smog:
<https://www.latimes.com/local/la-me-air-pollution-0428-pictures-photogallery.html>

I atmosfæren er det mange forskjellige reaksjoner mellom nitrogenoksider og oksygen. En av dem er at nitrogendioksid splitter i nitrogenmonoksid og oksygen:



I noen tilfeller av denne går visst reaksjonsratene som kvadratet av konsentrasjonene

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

der **reaksjonshastigheten** k er en empirisk konstant som avhenger av trykk og temperatur og de støkiometriske koeffisientene og så videre.

- 7 Det ryktes på internett at $k = 0.54$ liter per mol per sek for reaksjonen over ved 300 grader celsius. Løs likningen

$$\frac{d[\text{NO}_2]}{dt} = -k[\text{NO}_2]^2.$$

- 8 Bildet til høyre viser en ammonitt.
Finn bredden på kamrene som funksjon av vinkelen.



1 - 2 - TALL

På skolen lærte du Newtons andre lov $F = ma$. Dette er en differensiallikning, men på skolen ble du nok stort sett plaget med konstante krefter og konstant akselerasjon. Den generelle varianten sier at kraft er lik tidsendring av bevegelsesmengde:

$$F = \frac{d}{dt}(m\dot{x})$$

Du tenker kanskje at det er rart å tidsderivere massen m , men dersom du reiser rundt i en ting der drivstoffet er en betydelig del av totalvekten, kan massen endre seg betraktelig med tiden. Vi skal ikke plages med variabel masse, så derfor kan vi skrive Newtons andre lov slik:

$$F = m\ddot{x}$$

Her er et klassisk eksempel. En kloss med masse m sklir friksjonsfritt på underlaget, og er festet til veggen med en fjær med fjærstivhet $k > 0$. Hookes fjærlov¹ sier at kraften $F(x)$ fra fjæren på klossen er proporsjonal med avstanden x fjæren er strukket:

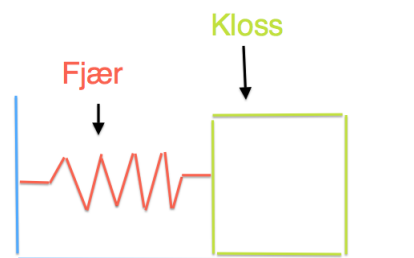
$$F(x) = -kx$$

Dersom $x(t)$ er klossens posisjon, er klossens akselerasjon gitt ved $\ddot{x}(t)$, og Newtons andre lov gir

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t).$$

Vi rydder litt og setter $k/m = 1$, og får

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$



Dette er også et LTI-system, og er det noe du bør ha i ryggmargen, er det at man bør sjekke ut løsninger på formen

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

0 Hva må λ være for at denne skal passe i likningen?



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law

Setter du $x(t) = e^{\lambda t}$ inn i $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ og deler ut $e^{\lambda t}$, får du

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Hvis du nå har gått på norsk gymnas og lært at denne likningen ikke har løsning, vil du kanskje konkludere med at $x(t) = e^{\lambda t}$ ikke er en løsning av $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$, men dette er feil, og dette motiverer de **komplekse tallene** $\mathbb{C}$. La oss gå noen knepp bakover i historien. På Gløshaugen og andre steder opererer vi stort sett med seks **tallmengder**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Den innerste tallmengden, $\mathbb{N}$, kalles **de naturlige tallene**, og det er disse du bruker når du teller:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

De første sikre arkeologiske tegn på menneskelig bruk av tall er et fem tusen år gammelt bokføringssystem fra Mesopotamia,¹ og noen dyr har rudimentær tallforståelse.² Mennesket har funnet opp noen tall som ikke dyrene har bruk for; det er for eksempel ikke nødvendig for en bavian å vite noe om negative tall. Den neste tallmengden, $\mathbb{Z}$, kalles **de hele tallene**. Disse består av de naturlige tallene samt de negative heltallene og null:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

De negative tallene ble oppfunnet av en kineser omtrent 200 AD, selv om vi i vesten liker å si at de ble oppfunnet av Rene Descartes på 1600-tallet. Null er en litt eldre oppfinnelse, her snakker vi Egypt nesten to tusen år før Kristus. Den egyptiske hieroglyfen for null, nfr, betyr noe sånt som "vakker". Mayaindianerne oppdaget også null, men det var mye senere, omtrent år null.

En bavian trenger heller ikke vite hvordan man trekker tre fiken fra fem eller deler tre fiken på fem individer, for bavianen lever i voldelige mannsdominerte hierarkier, og den som er høyest i hierarkiet spiser alltid opp alle fikenene om han er sulten. De **rasjonale tallene** $\mathbb{Q}$, er alle brøker:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \text{der} \quad a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

De første sikre skriftlige kilder om rasjonale tall er fra noen hundre år før Kristus, Euklids Elementer er kanskje den mest kjente. De rasjonale tallene har noen problemer - det er mange nyttige tall som ikke kan skrives som en brøk. Dette har vært kjent i India siden omtrent 700 år før Kristus, og på lunsjrommet vårt fortelles stadig røverhistorien om Hippasos som ble kastet på havet av Pytagoras da han oppdaget dette. Oppdagelsen var pinlig for Pytagoras, som hele livet hadde påstått at alle tall kunne skrives som brøk.

1 Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_ancient_numeral_systems

²<https://link.springer.com/article/10.1007/s10071-006-0034-7>

Det er noe litt uforløst over å ha et tallsystem der det ikke finnes noe tall for diagonalen i et kvadrat med sidekant 1, så derfor har vi funnet opp tallet

$$\sqrt{2} \approx 1.4142 \dots,$$

og en svær haug med liknende problemer har ledet oss til å finne opp de **reelle tallene** $\mathbb{R}$. De reelle tallene kan defineres på mange måter; det er en ganske teknisk jobb å gjøre dette ordentlig. Richard Dedekind påsto selv at han skrev ned den første presise definisjonen i 1858, men Georg Cantor var først ute med å publisere en ekvivalent definisjon i 1871. Dedekind gjorde det omtrent slik:

$$\mathbb{R} = \{\text{alle regler for å klippe de rasjonale tallene i to deler}\}$$

For eksempel identifiserer vi $\sqrt[3]{2}$ med mengden av alle rasjonale tall p slik at $p^3 < 2$.

Et grundig studium av de reelle tall er nok mest interessant for matematikere, og Isaac Newton fant ut av differensialregning lenge før noen skjønnte hva de reelle tallene var. Hvis du skjønner at ikke alt kan skrives som en brøk, har du kommet lenger enn Pytagoras.³ Det som er viktig for å forstå rotasjon, elektro og kvantemekanikk er **de komplekse tallene** $\mathbb{C}$. Moderne teknologi er utenkelig uten disse. Den første som begynte å fikle med komplekse tall var Girolamo Cardano i 1545, i forbindelse med løsninger av polynomlikninger. Man kan tenke som følger. Likningen

$$\lambda + 2 = 0$$

har ingen positiv løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{Z}$. Likningen

$$3\lambda - 2 = 0$$

har ingen heltallig løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{Q}$. Likningen

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonal løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{R}$. Likeledes har likningen

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ingen reell løsning, så vi kan like gjerne finne opp et tall til. Det kalles den **imaginære enheten**, skrives i , og tilfredsstiller

$$i^2 = -1.$$

2 Hva må du gange med seg selv for å få -4?



³Antagelig er røverhistorien over ikke sann. Historikerne vet lite om Pytagoras.

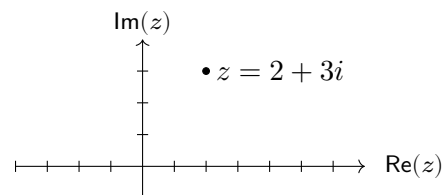
Den imaginære enheten er fysisk sett akkurat like uunværlig som kvadratroten av to, du må bare kunne litt mer avansert fysikk før dette blir klart.⁴ Hvis man skal skrive opp definisjonen av de komplekse tallene, kan det være lurt å ta følgende oppgave først.

- 3 Finn alle løsninger av likningen $x^2 + 2x + 2 = 0$, bruk i til å skrive opp svaret på en fornuftig måte, og faktoreris polynomet $p(x) = x^2 + 2x + 2$.

Oppgavene over inspirerer oss til å definere komplekse tall på kartesisk form:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \quad \text{der } a, b \in \mathbb{R}\}$$

De reelle tallene a og b kalles **realdelen** og **imaginærdelen** til z . Alternativ notasjon er $a = \operatorname{Re}(z)$ og $b = \operatorname{Im}(z)$. Et komplekst tall likner på mange måter en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at a og b er komponenter i en slik vektor, og avmerke z i **det komplekse planet**. Det komplekse planet er faktisk oppfunnet av broren til Johan Herman Wessel.



Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$. La $z = a + bi$ og $w = c + di$. Vi har

$$\begin{aligned} z + w &= a + c + (b + d)i \\ z - w &= a - c + (b - d)i \\ z \cdot w &= ac - bd + (bc + ad)i \\ \frac{z}{w} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned} \quad i^k = \begin{cases} 1 & k = 0, 4, 8 \dots \\ i & k = 1, 5, 9 \dots \\ -1 & k = 2, 6, 10 \dots \\ -i & k = 3, 7, 11 \dots \end{cases}$$

Komplekse tall legges sammen komponentvis akkurat som vektorene du lærte om på gymnaset. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i gymnasvektorregningen.

- 4 La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$. Regn ut $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$, z/w , z^2 og z^3 .

- 5 Utled regnereglene.



⁴<https://www.scientificamerican.com/article/quantum-physics-falls-apart-without-imaginary-numbers/>

Regneregelen for z/w er kanskje ikke helt triviell. Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z **konjugert**:

$$\bar{z} = a - bi$$

Dette er fordi $z\bar{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall.

6 Vis at:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

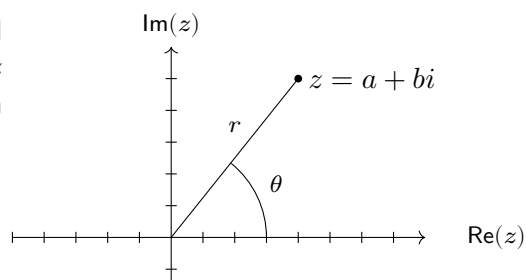
$$\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$$

$$z - \bar{z} = 2bi$$

Avstanden r fra det komplekse tallet $z = a + bi$ til origo, og vinkelen θ med den reelle akse, kalles z sine **polare koordinater**, og alle barn i barnehagen ser lett at

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$



og vi skriver

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

for avstanden fra z til origo. Dette tallet kalles **absoluttverdi** eller **modulus** til z . Vinkelen $\theta = \arg z$ kalles **vinkelen** eller **argumentet**. Geometrien til de komplekse tallene er litt annerledes enn du kanskje er vant til.

7 Vis at $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

8 Velg et komplekst tall z og tegn z , iz , i^2z og i^3z . Hva ser du?

9 La $z = 1 + \sqrt{3}i$. Regn ut $z/|z|$ og tegn $(z/|z|)^k$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

10 La $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ og $w = 1 + i$. Tegn $z^k w$ for alle $k \in \mathbb{Z}$.

11 Vis at $|z|^2 = |z^2|$. Er $|z|^3 = |z^3|$?



Hvis vi setter $\lambda = i$ og løser differensiallikningen

$$\dot{x} = ix$$

og antar at vi har lov til å herje som vanlig, får vi

$$x(t) = ce^{it}$$

der c er en vilkårlig konstant.

12 Men sjekk at også

$$y(t) = \cos t + i \sin t$$

passer i likningen. Hvis jeg sier at det ikke finnes andre løsninger enn de på formen

$$x(t) = ce^{it},$$

hva slags konsekvenser har dette?

Oppgaven over utleder **Eulers formel**

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Denne er fryktelig viktig, og Richard Feynman kalte den bare "vår juvel".

13 Du kan også utlede den ved å derivere funksjonen

$$f(\theta) = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{e^{i\theta}}$$

og så se hva som skjer når $\theta = 0$.

(Derivasjonsreglene du kjenner fra gymnasen også fungerer når det står en i her og der.)

Hvis du ikke liker utledninger basert på komplisert teori du ikke har lært ennå, kan du ta Eulers formel som definisjon på $e^{i\theta}$ og så sjekke de vanlige regnereglene for eksponensialfunksjonen.

14 Den som er viktig å sjekke, er

$$e^{i(\alpha+\theta)} = e^{i\alpha}e^{i\theta}$$

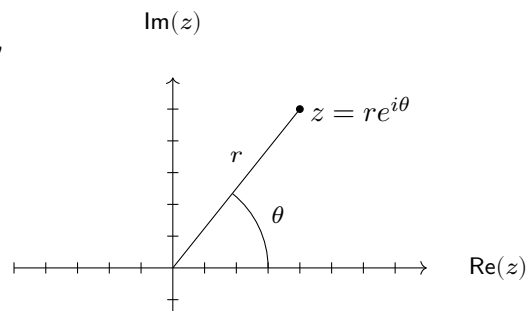


“Vår juvel” regnes for øvrig for å være særdeles vakker, og den berømte formelen

$$e^{i\pi} = -1$$

er et spesialtilfelle. Med Eulers formel kan vi skrive:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$



Følgende oppgave passer egentlig best i første klasse på gymnaset, men vi tar den med allikevel.

- 15 Skriv $z = 1 + i$ og $w = 1 + \sqrt{3}i$ på polar form.

Nå er det ikke innlysende at vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen gjelder når det står en i i eksponenten, men de gjør det. La

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{og} \quad w = 1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}.$$

- 16 Anta vanlige regneregler for eksponensialfunksjonen, og beregn

$$z \cdot w \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}$$

- 17 Finn $e^{\pi i/2}$, $e^{\pi i}$, $e^{3\pi i/2}$ og $e^{2\pi i}$.

Det er først med den imaginære enheten at sammenhengen mellom eksponensialfunksjonen og de trigonometriske funksjonene kommer til syne. Vis at

18 $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

19 $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

20 $\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

- 21 Med disse formlene blir integralet i den siste oppgaven i forrige økt mye enklere.

- 22 La $z = re^{i\theta}$. Hva blir $\bar{z}$?

Husk ellers cosinus og sinus hyperbolicus diabolicus

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \text{og} \quad \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

- 23 Vis at

$$\cosh(i\theta) = \cos \theta \quad \text{og} \quad \sinh(i\theta) = i \sin \theta$$

og bruk det til å vise at

$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b$$

$$\sin(a + bi) = \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b$$



Fordelen med komplekse tall er at polynomlikninger alltid har løsning. Dette kalles **algebraens fundamentalteorem**, og vi sier at de komplekse tallene er en algebraisk lukket tallmengde.

24 Likningen

$$z^n = w$$

der w er et gitt komplekst tall har alltid n forskjellige løsninger. Finn alle løsninger til

$$z^5 = -1.$$

(Hint: Bruk Eulers formel. Du har lov til å bruke vanlige regneregler for potenser. Se også oppgave 9 og 10 over for inspirasjon.)

Dersom p er et polynom og $p(z) = 0$, sier vi at z er et av polynomets **røtter**.

25 Vis at dersom et polynom har reelle koeffisienter, kommer røttene i komplekskonjugerte par.

26 Faktoriser polynomet $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

27 Enn $p(x) = x^3 + x^2 - 2$?



Til slutt: Vi definerer $\mathbb{R}^n$ som alle vektorer

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

der $x_k \in \mathbb{R}$, og $\mathbb{C}^n$ som alle vektorer

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

der $z_k \in \mathbb{C}$. Hvorfor vi skriver disse vektorene på høykant og ikke liggende som du er vant til, kommer vi tilbake til. Vi skal etterhvert skrive vektorer både på høykant og lavkant. Vi ganger vektorer med skalarer slik:

$$a\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

og legger vektorer sammen slik:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

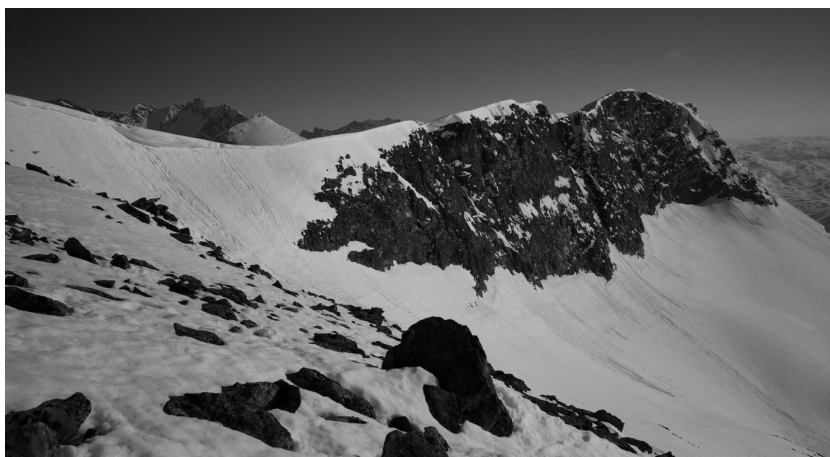
Kombinerer vi disse operasjonene, får vi noe som kalles en **lineærkombinasjon** av $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$:

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by_1 \\ by_2 \\ \vdots \\ by_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ \vdots \\ ax_n + by_n \end{pmatrix}$$

Skalarene a og b kalles **vektene**.

28 Beregn $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ når

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3-i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 3i \end{pmatrix}.$$



UKENS NØTTER

For dere som går MTTK og skal styre satellitter og slikt, er antagelig **kvaternionene** $\mathbb{H}$ vel så viktige; man bruker dem til å holde styr på et legemes orientering i rommet. De ble oppdaget av W. R. Hamilton i 1843, og er en utvidelse av de komplekse tallene. Utvidelsen består i at man legger til to nye imaginære enheter j og k , definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inskripsjonen er dessverre vekk. Et kvaternion ser slik ut:

$$z = z_0 + z_1i + z_2j + z_3k$$

Her er z_0, z_1, z_2 og z_3 reelle tall. Realdelen z_0 kalles **skalardelen**, mens imaginærdelen $z_1i + z_2j + z_3k$ kalles **vektordelen**. Den viktigste forskjellen fra det meste du har lært så langt i livet, er at multiplikasjon ikke er **kommutativt**.

- 1 Vær nøye med om du ganger inn i, j og k fra venstre eller høyre, og utled regnereglene

$$ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

Likner dette på noe du har lært på gymnaset?

(Hint: Kryssproduktet og høyrehåndsregelen.)

Dette med ikkekommutativitet er litt rart i begynnelsen.⁵ Det er viktig å venne seg til at enkelte ting ikke er kommutativt, for kommutering ligger i bønn for Heisenbergs usikkerhetsprinsipp.⁶

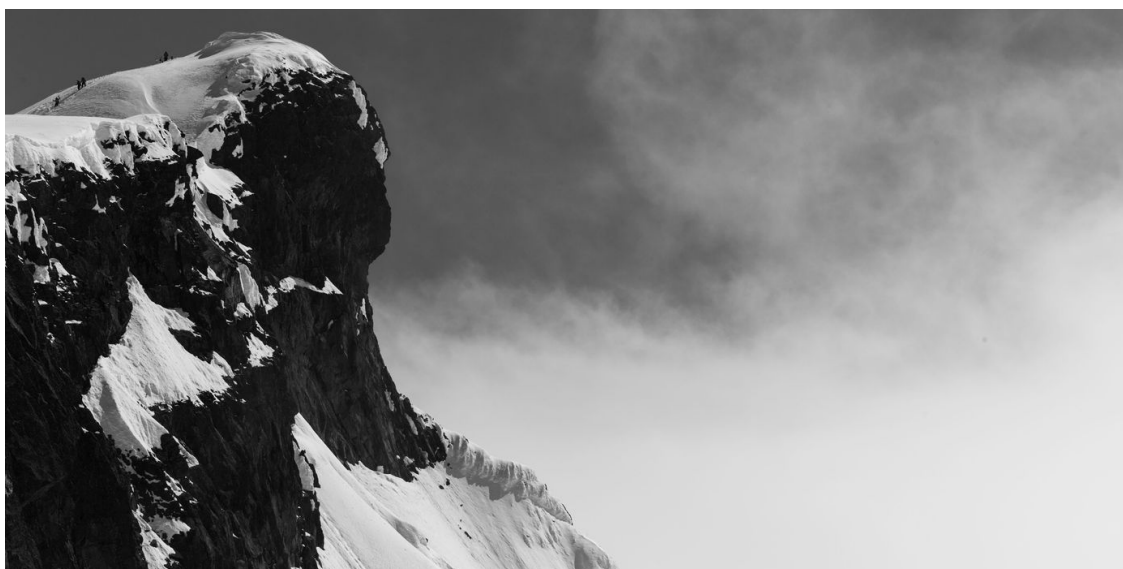
- 2 Regn ut

$$zw = (z_0 + z_1i + z_2j + z_3k)(w_0 + w_1i + w_2j + w_3k)$$

og

$$wz = (w_0 + w_1i + w_2j + w_3k)(z_0 + z_1i + z_2j + z_3k)$$

samt **kommutatoren** $zw - wz$. Kan du lage en formel for kommutatoren?



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Commutative_property

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_principle

Vi konjugerer kvaternioner akkurat som vi konjugerer komplekse tall:

$$\bar{z} = z^* = z_0 - z_1i - z_2j - z_3k$$

3 Akkurat z og $\bar{z}$ kommuterer faktisk med hensyn på multiplikasjon. Regn ut $z\bar{z}$ og $\bar{z}z$.

Dette kan brukes til å definere absoluttverdi $\sqrt{z\bar{z}}$, samt finne invers.

4 La

$$z = z_0 + z_1i + z_2j + z_3k \quad \text{og} \quad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(z_0 - z_1i - z_2j - z_3k)$$

Vis at $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Jeg foretrekker vanligvis å begynne indeksering fra en og ikke null, men akkurat for kvaternioner er det en fordel å begynne på null.⁷ Grunnen er at man i anvendelser ofte er interessert i å tenke på imaginærdelen som et punkt i $\mathbb{R}^3$. Regnereglene for de imaginære enhetene i , j og k illustrerer nemlig hvorfor vi i gamle dager skrev

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for standardbasen i $\mathbb{R}^3$, og

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$$

for vektorer i $\mathbb{R}^3$. Denne notasjonen er nå gått av moten, og det er i bunn og grunn synd, for hvis man skriver alt slik, kan man bruke høyrehåndsregelen til å huske formelen for kryssprodukt.

5 La

$$z = z_1i + z_2j + z_3k$$

og

$$w = w_1i + w_2j + w_3k$$

og regn ut $\bar{z}w$ og se om det ser kjent ut.



⁷Det er et mysterium hvorfor alle programmeringsspråk insisterer på å indeksere fra 0 istedet for 1. Hvis du har en vektor med tre elementer, er det mer naturlig å kalle dem $x[1]$, $x[2]$ og $x[3]$ enn $x[0]$, $x[1]$ og $x[2]$, og skriver du for i `in range(n)` i python må du huske på at denne går fra 0 til $n-1$, ikke fra 1 til n :
https://en.wikipedia.org/wiki/Off-by-one_error

1 - 3 - DIFFERENSIALLIKNINGER II

I forrige økt ba jeg deg om å lete etter løsninger til kloss-og-fjærlikningen

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

men jeg sa aldri hva de var - vi må nemlig ha komplekse tall for å håndtere løsningene på en fornuftig måte. Før vi lærer den generelle løsningsteknikken, skal vi introdusere en kraft til. **Friksjonskraft** er som regel avhengig av farten $\dot{x}$, og hele tiden rettet mot fartsretningen. Friksjon er komplisert,¹ men det er ikke uvanlig å anta at friksjonskraften er proporsjonal med $\dot{x}$:

$$F(\dot{x}) = -\mu\dot{x}$$

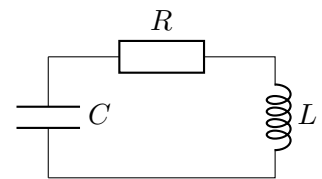
Dette er i mange systemer en rimelig antagelse dersom hastigheten er lav, og uansett det eneste som er banalt nok til at vi kan håndtere det her og nå. Newtons andre lov $F = m\ddot{x}$ blir

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - \mu\dot{x}(t),$$

dersom klossen opplever en slik friksjon i tillegg til fjærkraften. Vi rydder og skriver

$$\ddot{x}(t) + \frac{\mu}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

- 1** Hvis du nå tror at du kun studerer kloss og fjær ved å løse denne likningen, kan du prøve å bruke Kirchhoffs spenningslov på denne kretsen.



¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Friction>

Det bør altså være klart at én og samme differensiallikning kan ha mange mange bruksområder.² Vidt forskjellige fysiske fenomener kan oppføre seg dønn likt matematisk sett. Nå skal vi se på hvordan vi finner løsningene på de foregående likningene. Det er litt mer kjelkete med andre ordens likninger, så la oss sette $m = L = 1$, $\mu = R = 3$ og $k = 1/C = 2$, slik at vi får likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Det første vi gjør er å observere at siden

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

kan vi “faktorisere” likningen slik:

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) \left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = 0$$

La oss nå innføre en hjelpevariabel

$$y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 2\right) x(t) = \dot{x}(t) + 2x(t).$$

Denne tilfredsstiller

$$0 = \left(\frac{d}{dt} + 1\right) y(t) = \dot{y}(t) + y(t),$$

som impliserer at

$$y(t) = c_1 e^{-t}.$$

Men i så fall må

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = c_1 e^{-t}$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{2(s-t)} e^{-s} ds \\ &= c_2 e^{-2t} + c_1 \int^t e^{s-2t} ds = c_2 e^{-2t} + c_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

Vi kan bytte om på leddene for å skrive løsningen litt penere:

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}.$$

Hvis du nå studerer dette litt nøye, vil du se at det er ingenting spesielt med likningen

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

Hadde vi prøvd å løse

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = 0$$

kunne vi gått frem på samme måte, og funnet at

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

²https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_21.html

der λ_1 og λ_2 er røttene til likningens **karakteristiske polynom**

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = a_2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Denne strategien produserer korrekte løsninger så lenge $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dersom $\lambda_1 = \lambda_2$ blir det litt annerledes, men dette tilfellet er en matematisk abstraksjon som sjelden inntreffer i virkelige anvendelser. Det er av mange grunner mest praktisk å dele ut a_2 eller sette $a_2 = 1$, for hvis a_2 skulle slumpe til å bli null, blir det rot i systemet siden likningen ikke lenger er av andre orden. Derfor skriver vi

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

som er en **homogen andre ordens lineær differensiallikning med konstante koeffisienter**. La

$$\delta = -\frac{a_1}{2} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \left| \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \right|.$$

Løsningen klassifiseres i tre forskjellige tilfeller alt etter fortegnet på $a_1^2 - 4a_0$:

1: Dersom $a_1^2 - 4a_0 > 0$ blir det enkelt, da finnes det to reelle røtter

$$\lambda = \delta \pm \omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(\delta+\omega_0)t} + c_2 e^{(\delta-\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t} (c_1 e^{\omega_0 t} + c_2 e^{-\omega_0 t}). \end{aligned}$$

2: Dersom $a_1^2 - 4a_0 = 0$, finnes det en dobbel rot $\lambda = \delta$, og løsningen blir

$$x(t) = c_1 e^{\delta t} + c_2 t e^{\delta t}.$$

3: Dersom $a_1^2 - 4a_0 < 0$, er løsningen til den karakteristiske likningen

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2} = \delta \pm i\omega_0$$

slik at

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(\delta+i\omega_0)t} + c_2 e^{(\delta-i\omega_0)t} \\ &= e^{\delta t} (c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}) \\ &= e^{\delta t} (d_1 \cos(\omega_0 t) + d_2 \sin(\omega_0 t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= c_1 + c_2 \\ d_2 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

Skriv opp løsningen når

$$\boxed{2} \quad a_1 = a_0 = 1. \quad \boxed{3} \quad a_1 = 2, a_0 = 1 \quad \boxed{4} \quad a_1 = 0, a_0 = 1 \quad \boxed{5} \quad a_1 = 3, a_0 = 1$$

Løsningen til

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0,$$

er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Dette systemet kalles en harmonisk oscillator, og løsningen er en bevegelse som aldri stopper opp. Hvis vi skal beregne en faktisk løsningsstrajektorie, må vi vite noe om både startposisjon og startfart. Finn x dersom

$$\boxed{6} \quad x(0) = 1 \text{ og } \dot{x}(0) = 0.$$

$$\boxed{7} \quad x(0) = 0 \text{ og } \dot{x}(0) = 1.$$

$$\boxed{8} \quad x(0) = x_0 \text{ og } \dot{x}(0) = v_0.$$

Kirchhoffs spenningslov sier at spenningsfallet over en lukket sløyfe i en elektrisk krets alltid må være null. I likhet med Newtons andre lov, er dette også en differensiallikning dersom du har spoler eller kondensatorer i kretsen. Det har man alltid, for alle kretser har bittelitt tilsiktet eller utilsiktet kapasitans og induktans. Kirchhoffs spenningslov på kretsen til høyre gir

$$L\dot{i}(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds = 0$$

og deriverer vi hele greia, får vi

$$L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0,$$



som har løsning

$$i(t) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Dette systemet er også en harmonisk oscillator, og matematisk identisk med fjæren og klossen. Om du bare fikk løsningsstrajektorien i et plot og ingen informasjon om hva det var for noe, er det ikke mulig å gjette om løsningen kommer fra en spole og kondensator eller en fjær og en kloss.

Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn på den:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

Med andre ord kan vi lade den opp med et batteri først og så koble av batteriet og så koble kondensatoren i sløyfe med noe annet mens det er spenning på den. Da vil strømmen begynne å gå i kretsen, og denne vil oppføre seg etter differensiallikningen over. Finn $i(t)$ dersom

$$\boxed{9} \quad i(0) = 1 \text{ og } \dot{i}(0) = 0.$$

$$\boxed{10} \quad i(0) = 0 \text{ og } \dot{i}(0) = 1.$$

$$\boxed{11} \quad i(0) = i_0 \text{ og } \dot{i}(0) = v_0.$$



Det går an å lage en formel for løsningen til likning med påtrykt kraft f :

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

men denne er temmelig hårete. Til våren skal vi lære noen pene triks for å løse denne likningen for de viktigste klassene av påtrykte krefter. I dette semesteret skal vi begrense oss til

$$f(t) = e^{i\omega t}$$

for man kommer langt med bare denne. Husk at løsningen til

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = f(t) \quad x(0) = x_0$$

er

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t f(s) e^{-\lambda(t-s)} ds \\ &= x_h(t) + x_p(t) \end{aligned}$$

der x_h står for **homogen løsning**, og x_p for **partikulær løsning**. Løsningen til den andre ordens likningen følger det samme systemet. Den homogene løsningen x_h er den vi fant på de foregående sidene, altså løsningen til

$$\ddot{x}_h(t) + a_1 \dot{x}_h(t) + a_0 x_h(t) = 0.$$

Dersom $f(t) = e^{i\omega t}$, er

$$x_p(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$$

der H er en funksjon som kalles **frekvensresponsen** til differensiallikningen.

- 12 Denne kan du finne ved å sette $x_p(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$ inn i likningen og sammenlikne høyre og venstre side. Løs initialverdiproblemene

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = e^{i\omega t} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

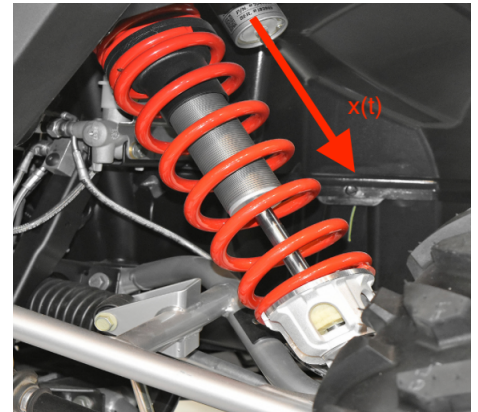
og

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \cos(\omega t) \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$



Dersom $\omega = 0$, blir $f(t) = 1$ og $x_p(t) = H(0)$, som er konstant. Dette er et viktig spesialtilfelle. Et fysisk eksempel som er lett å huske, er Newtons andre lov anvendt på støtdemperen på en bil. En masse m med vertikal posisjon x hviler på en fjær med fjærstivhet k . Massen blir trukket nedover av tyngdekraften mg , og inni fjæren sitter en støtdemper som for enkelhets skyld bidrar med en friksjonskraft som er proporsjonal med $\dot{x}$. Newtons andre lov sier at masse ganger akselerasjon skal være lik summen av disse tre kreftene, og setter vi positiv x -retning nedover, får vi

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + mg.$$



Kilde: howstuffworks.com

Hvis vi nå sorterer alt etter konvensjonen, med alle ledd som involverer den ukjente på den ene siden og alt annet på den andre siden, får vi

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = mg.$$

Nå deler vi på m , og får

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

slik at $a_1 = \mu/m$, $a_0 = k/m$ og $f(t) = g$. Den partikulære løsningen kalles i dette tilfellet **likevektsløsningen**, for det er den konstante x -verdien der systemet "helst vil være". Hvis du har en stor masse på en svak fjær, vil likevektsposisjonen ligge lavt, og omvendt.³

- 13 Finn den partikulære løsningen x_p .

I en moderne bil er fjærstivheten k tilpasset vekten m på akslingen, men dempingen μ endres etterhvert som demperen slites. La oss for enkelhets skyld si at $k = m = 1$, slik at

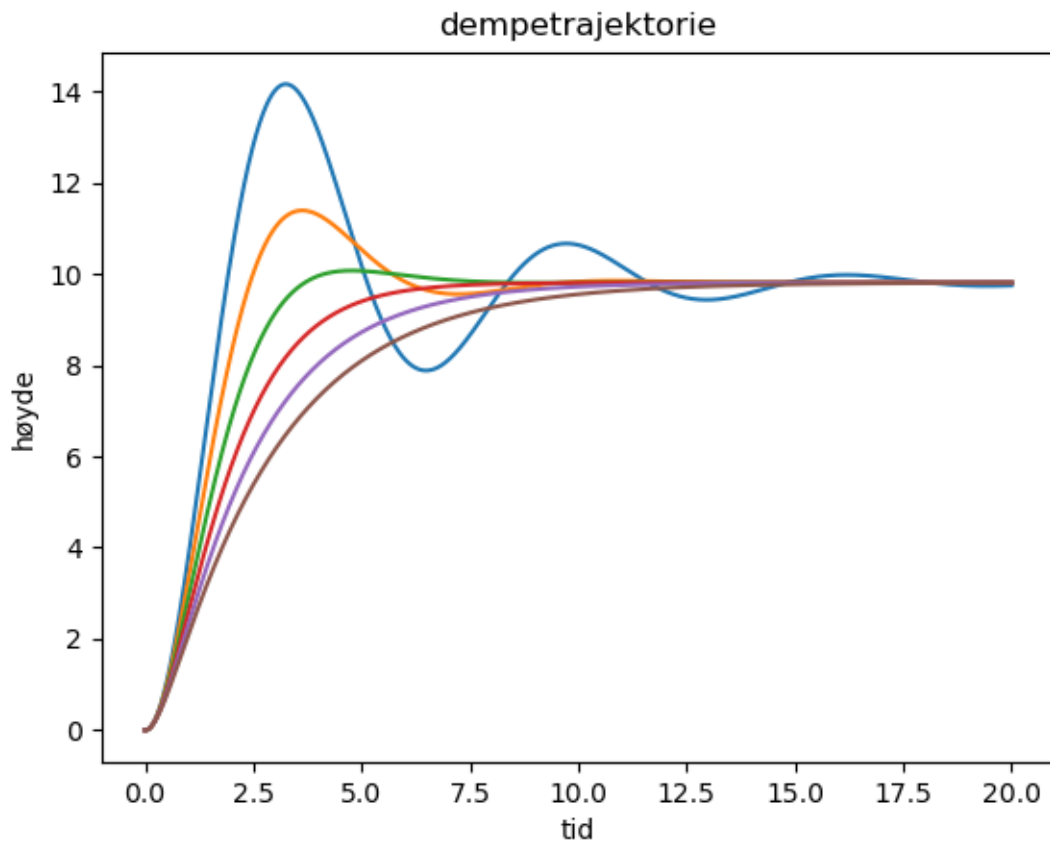
$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = g.$$

- 14 Regn ut løsningen og plott den for $\mu = 3$, $\mu = 2$ og $\mu = 1$. Bruk initialkrav $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Etterpå kan du slå opp i kapittel 2.4 i Kreyszig.



³Det er viktig at fjæren er tilpasset massen som skal hvile på den, men det er litt slingrinsmonn; lastebiler har luftfjæring, slik at man kan kompensere for den store vektforskjellen mellom med og uten last, og en moderne SUV har gjerne luftfjæring for å kunne regulere bakkeklaringen.

Initialkravene $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ betyr at vi setter i gang systemet fra den posisjonen der fjæren hverken er komprimert eller strukket. Du kan tenke at vi jekker opp bilen til det punktet det ikke er noen vekt på fjæren, og så sjekker vi hvordan systemet reagerer ved å slippe den raskt ned igjen, for eksempel ved å ta jekken brått vekk. Her er plot av løsninger for $\mu = 1/2$ (blå), $\mu = 1$ (oransje), $\mu = 3/2$ (grønn), $\mu = 2$ (rød), $\mu = 5/2$ (lilla) og $\mu = 3$ (brun):

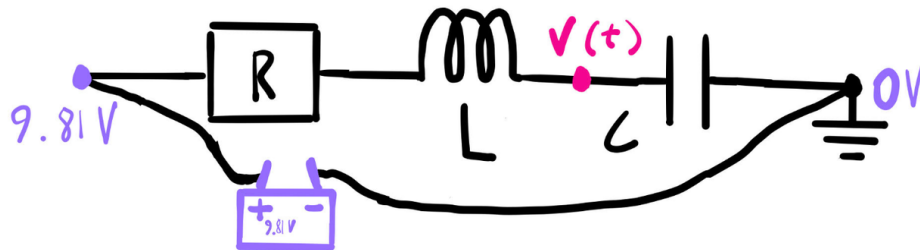


Det er vanlig å kalle de tre tilfellene $\mu < 2$, $\mu = 2$ og $\mu > 2$ for **underkritisk dempet**, **kritisk dempet** og **overkritisk dempet**, henholdsvis. Dette korresponderer til de tre løsningsvariantene.

15 Omtrent hvilken verdi for μ tror du EU-kontrolløren vil ha for å godkjenne demperen?



Fordelen med å kjenne til et slikt fysisk eksempel som demperen over, er at historien kan gjenbrukes. Har du skjønnt spole, kondensator og motstand og Kirchhoffs spenningslov, skjønner du at dersom du plukker ut en hver fra skuffen din og kobler dem i serie med et batteri slik:

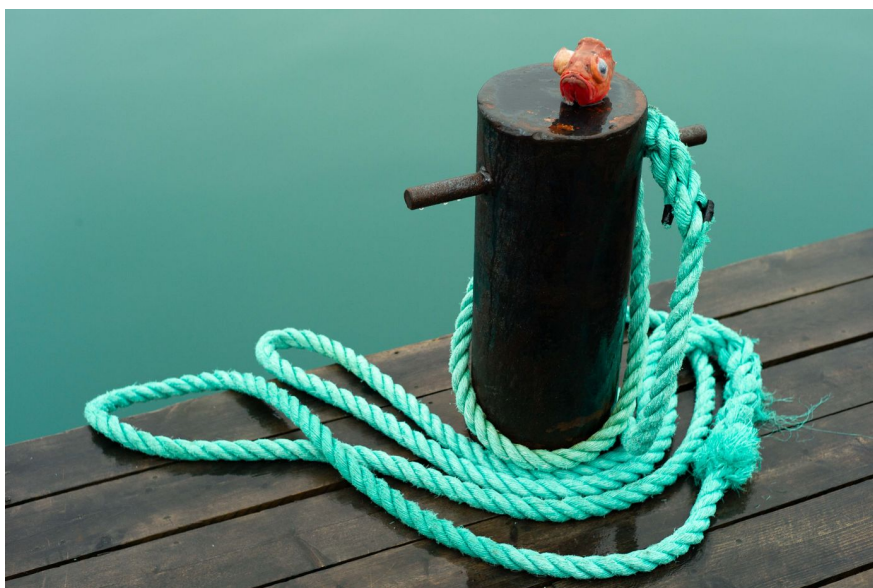


så er dette det samme som å løse initialverdi problemet

$$L\ddot{v}(t) + R\dot{v}(t) + \frac{1}{C}v(t) = 9.81.$$

Hele analysen kan altså gjenbrukes uten modifikasjon, man må bare skjønne at induktansen L korresponderer til massen m , den omvendte kapasitansen $1/C$ til fjærstivheten, og motstandsverdien R til dempingen. Alt dette forklarer forresten ideen bak en *analog datamaskin*.⁴ Isteden for å bygge mange dyre fjærer og dempere og sette dem sammen for å teste, kan du sette sammen en ekvivalent RCL-krets og gjøre empirisk testing på den. Hvis du vil teste noen endringer i et eller annet, finner du bare ut hvordan RCL-kretsen må endres og så tester du den istedet. I gamle dager var dette et viktig ledd i arbeid med prototyper, spesielt innen luftfart, der alle komponenter er dyre å produsere.

- 16 Sett sammen RCL-kretsen over, og se om du greier å reproducere plottet på forrige side med et oscilloskop. Spoler er ikke så lett å få tak i, men let på OV. Jeg har et par på kontoret. Har også en analog datamaskin tilgjengelig.



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Analog_computer

UKENS NØTTER

Vanligvis i reguleringsteknikk er man interessert i å styre et system mot en bestemt verdi. En av de grunnleggende måtene å gjøre dette på, kalles PID-regulator, se kap. 6 i Gravdahls kompendium. En PID-regulator fungerer slik at man måler avviket $r - y$ mellom en måling y av den ukjente x og en ønsket referanseverdi r , og så legger man på tre forskjellige pådrag basert på dette. Nå skal vi studere dette litt med penn og papir, så da setter vi $y = x$ for enkelhets skyld.

De tre heter P-regulator (P for “proporsjonal”):

$$u_P(t) = K_P(r - x)$$

I-regulator (I for “integral”):

$$u_I(t) = K_I \int_0^t r - x$$

og D-regulator (D for “derivert”):

$$u_D(t) = K_D(\dot{r} - \dot{x})$$

Alle regulatorene har hver sin unike respons på avviket, og systemets totale pådrag er summen av regulatorene:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t)$$

Denne skal inn på høyresiden i differensiallikningen:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u$$

Man styrer systemet ved å sette K_P , K_I og K_D slik at x styres mot r raskest mulig, men uten å sette regulatoren under for høyt press:

https://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller

Når likningen er lineær og r er konstant, går det helt fint med penn og papir å regne ut hva x blir om man bestemmer seg for r . Skriv opp løsningen til

1 $\dot{x} + bx = u_P$

2 $\dot{x} + bx = u_P + u_D$

3 $\dot{x} + bx = u_P + u_D + u_I$

4 $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$

5 $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_D$

6 $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P + u_I + u_D$ (denne klarer du nok ikke, men du kan jo alltid prøve)

Ziegler-Nichols' metode er en sjalabaismetode for å tune PID-regulatorer.⁵ Den består i å først sette $K_I = K_D = 0$ og så sette K_P slik at man får stabile oscillasjoner. Så skrur man opp K_I og K_D til det ser bra ut.

7 Sett $K_I = K_D = 0$ og finn K_P slik at $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u_P$ har stabile oscillasjoner.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Ziegler-Nichols_method

1 - 4 - FUNKSJONER

En **mengde** er en samling med ting, kalt **elementer**. I grunnleggende matematikk er elementene gjerne tall, mens i sannsynlighetsregning er elementene utfall. I studier av symmetri, kan elementene være forskjellige måter å orientere et legeme på i rommet. Vi kan også ha en punktmengde i planet eller i rommet, en sirkelskive eller et kuleskall, eller noe helt annet. For eksempel er

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en mengde med fem elementer, og

$$B = \{1, 3, 5, \pi\}$$

en mengde med fire elementer. Primtallene er en mengde med uendelig mange elementer. Dersom π er et element i B , skriver vi

$$\pi \in B$$

To vanlige operasjoner på mengder, er union og snitt:

$$\cup \qquad \cap$$

Unionen av A og B inneholder alle elementer som er med i enten A eller i B eller i begge:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$$

mens snittet $A \cap B$ er en mengde som inneholder de elementene som er i både A og i B :

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Dersom alle elementer i en mengde A er inneholdt i en større mengde B , skriver vi

$$A \subset B,$$

som er det samme som at

$$A \cap B = A.$$

Dersom det hersker litt usikkerhet om hvorvidt $A \subset B$ eller $A = B$ skriver vi

$$A \subseteq B.$$

Vi skriver

$$A - B$$

for mengden av alle elementer som er i A , men ikke i B , og

$$\overline{A}$$

(leses "ikke A ") for alle elementer som ikke er i A . En mengde uten elementer kalles "den tomme mengden", og ser slik ut:

$$\emptyset$$

Denne er praktisk å ha, for nå kan vi skrive $A \cap B = \emptyset$ for å uttrykke at A og B ikke har noen felles elementer, og $A \neq \emptyset$ for å uttrykke at det finnes noen elementer i A .

En funksjon

$$f : \Omega \rightarrow B$$

er en regel som tilordner ett og bare ett element i B til hvert element i Ω . Mengdene Ω og B kalles henholdsvis **domenet** og **kodomenet** til f . Et synonym for funksjon er **avbildning**.

- 1 La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Skisser f . Hva er domenet og kodomenet til f ?

I dette kurset kommer kodomenet stort sett til å være $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$. De verdiene som kommer ut når man stapper Ω inn i f kalles **bildet** til f og skrives $f(\Omega)$. Det er ikke alltid så lett å vite nøyaktig hva bildet til en funksjon er, men det er praktisk å kunne fortelle omtrent hva som kommer ut av en funksjon uten å først ta jobben med å regne ut bildet; derfor har vi kodomene.¹

- 2 Hva er bildet til f i oppgave 1?

Det som går inn i en funksjon kalles **den uavhengige variabelen**, mens det du får ut kalles **den avhengige variabelen**. Disse kan i prinsippet hete hva som helst, men det vanligste er å bruke bokstaver fra slutten av alfabetet; dette var det Rene Descartes som fant på.² I uttrykket $f(x) = x^2$ er det tre forskjellige ting vi må skille nøye fra hverandre:

- den uavhengige variabelen x , et reelt tall
- den avhengige variabelen $f(x)$, også et reelt tall
- funksjonen f , altså regelen som gir oss $f(x)$ gitt x

Så når vi sier $f(x)$ mener vi tallet $f(x)$, og når vi sier f mener vi operasjonen “kvadrér x ”. Mengden av punkter (x, y) som passer i likningen $y = f(x)$ kalles **graf** til f . Det er hensiktsmessig å huske de vanligste grafene siden de dukker opp overalt i anvendelser. Det er et fritt land og man kan ofte velge domene selv, men man må holde seg unna punkter der regelen f ikke gir mening.

- 3 Skissér funksjonene gitt ved e^x , x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, $x^{1/3}$, $1/x$, $\sqrt{1-x^2}$ og $|x|$, og gi forslag til fornuftige domener. Plot i python for fasit.

I avsnittet over oppgave 3 var jeg streng på at når vi sier $f(x)$ mener vi tallet $f(x)$, og når vi sier f mener vi operasjonen som produserer $f(x)$ gitt x . Forhåpentligvis la du merke til at jeg allerede i oppgave 3 begynte å slurve med dette. Det er slik med konvensjoner at de er der for at det skal bli lettere å kommunisere, men av og til går kommunikasjonen lettere om man bryter dem. Skulle jeg fulgt konvensjonen til punkt og prikke, skulle oppgave 3 vært formulert slik:

- 4 Skissér funksjonene f , g , h , i , j , k , l og m gitt ved henholdsvis $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $i(x) = \sqrt{x}$, $j(x) = x^{1/3}$, $k(x) = 1/x$, $l(x) = \sqrt{1-x^2}$ og $m(x) = |x|$, og gi forslag til fornuftige domener. Plot i python for fasit.

¹Arne skriver definisjonsmengde og verdimengde istedet for domene og bilde, og ikkeno for kodomene. Jeg foretrekker domene, kodomene og bilde, for det heter “domain”, “codomain” og “image” på engelsk. Avbildning er “map”.

²Han fant også opp koordinatsystemet: https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

Så da er det kanskje bedre at vi av og til sier $f(x)$ når vi mener f - tabellen under blir for eksempel mye lettere å skrive ned med dette konvensjonsbruddet. La a , b , c og d være konstanter. Det er noen grunnleggende knep som er verdt å huske:

- Grafen til $f(x - a)$ er grafen til $f(x)$ flyttet a knepp horisontalt.
- Grafen til $f(x) + b$ er flyttet b knepp vertikalt.
- Grafen til $f(cx)$ er strukket horisontalt.
- Grafen til $df(x)$ er strukket vertikalt.
- Dersom $c = -1$ blir grafen speilet om y -aksen, mens $d = -1$ speiler om x -aksen.

- 5 Skisser funksjonene e^{x-1} , $(x+2)^2$, $x^3 - 1$, $1 + \sqrt{4x-1}$, $1 - x^{1/3}$, $2 - 1/x$, $1 - \sqrt{1-x^2}$ og $1 + |x+1|$, ved å bruke disse knepene samt forrige oppgave.

Det er ellers viktig at du venner deg til at variablene kan hete alt mellom himmel og jord, for mange kvantitative modeller uttrykkes ved funksjoner mellom størrelser, og i fysikk er det altfor mye å holde styr på til at vi klarer oss med bare noen få bokstaver. For eksempel er pH definert ved

$$pH([H_3O^+]) = -\log [H_3O^+].$$

- 6 Et "naturlig" domene følger gjerne av fysikken.³ Hva er domenet og bildet til pH -funksjonen?

I lengden blir det jo litt klønete å si "la $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \log x$ " hver eneste gang vi skal prate om logaritmefunksjonen, så derfor sier vi bare $\log x$ istedet, og så er det underforstått at definisjonsmengden er $(0, \infty)$. Dette er litt slurvete, men det går bra. Det er en annen type slurv som skaper mer problemer. I fysikk og kjemi skriver man

$$pH = -\log [H_3O^+]$$

som er analogt til å skrive $y = x^2$ istedet for $f(x) = x^2$. Dette er forsåvidt greit, men man tilordner ikke noen bokstav til selve funksjonsregelen (altså "kvadrér x "), og det innebærer en tradeoff. Man får færre bokstaver å forholde seg til, og det blir dessuten tungvint å alltid måtte si $pH([H_3O^+])$ istedet for pH . Men noen deler av fysikken der det er mange koordinattransformasjoner, for eksempel elektromagnetisme eller termodynamikk, blir veldig knotete å forstå.

- 7 Konsentrasjon kan gis på mange måter.⁴ Finn en funksjon som gir pH dersom konsentrasjonen x av H_3O^+ er gitt i mol per milliliter istedet for mol per liter.
(Her er det viktig å forstå at selv om konsentrasjon er konsentrasjon og pH er pH, er den nye funksjonen for å beregne pH forskjellig fra den forrige.)



³<https://en.wikipedia.org/wiki/pH>

⁴https://snl.no/konsentrasjon_-_kjemi

pH er et eksempel på noe som kalles **logaritmisk skala**. Dette er viktig å forstå siden det brukes mye i anvendelser. Funksjoner med eksponensiell vekst (for eksempel alle modellene vi lærte om i uke 34) blir rettlinjede om du tar log til den avhengige variabelen. Andre klassiske eksempler er

- Richters skala:
https://en.wikipedia.org/wiki/Richter_scale
- tangentene på et piano, knappene på et trekkspill og båndene på en gitar:
[https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music))
- desibelskalaen:
<https://en.wikipedia.org/wiki/Decibel>
- entropi:
[https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_\(information_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Entropy_(information_theory))
- stjerners lysstyrke:
https://en.wikipedia.org/wiki/Apparent_magnitude
- f-tallet på et kamera:
<https://en.wikipedia.org/wiki/F-number>

8] Apropos. Hva er forskjellen på $\ln$ og $\log$?

Grunnen til at vi bruker $\ln$ istedet for $\log$ i mange sammenhenger, er at funksjonen e^x er mer praktisk enn 10^x . Alt i uke 34 er for eksempel basert på førstnevnte. Fordelen med logskala, er at λ kan leses av som stigningstallet til kurven.

9] Her er en liten tabell jeg lagde på måfå:

t	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$e^{\lambda t}$	1.00	1.105	1.22	1.35	1.49	1.65

Finn λ ved å ta log til rad nummer to og plotte.

Hvis du ser nøye på den andre raden i tabellen over, vil du kanskje se at den er en geometrisk rekke; hvert ledd er det forrige ganget med den samme multiplikasjonsfaktoren.

10] Hva er multiplikasjonsfaktoren?

Frekvensene på båndene på gitaren din danner en ellers geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor sånn omtrent $\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$ dersom gitaren er korrekt stemt. Hvis du spiller gitar og synes det er vanskelig å stemme uten stemmemaskin, er det antagelig fordi du lytter etter renstemte intervaller, og da blir ikke tonene på gitaren en geometrisk rekke med korrekt multiplikasjonsfaktor.

11] En ren ters (intervallet fra g-strengen til h-strengen) er gitt ved multiplikasjonsfaktoren $5/4$ og en ren kvart (intervallet mellom de andre strengene) ved $4/3$. En oktav er å doble frekvensen. Det er disse pene multiplikasjonsfaktorene som gir velklingende interferensmønstre når du spiller på to strenger samtidig, og det er derfor disse multiplikasjonsfaktorene som er lettest å lytte seg frem til når du stemmer to strenger mot hverandre.
Men om du gjør det slik, kommer gitaren til å klinge helt forferdelig. Hvorfor?
(Om du ikke spiller et musikkinstrument kan du hoppe over denne oppgaven.)

Eksponentialfunksjonen og logaritmefunksjonen står ellers i et spesielt forhold til hverandre.

- 12 Skisser funksjonene $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(z) = e^z$$

og $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$g(y) = \ln y$$

for hånd. Hva er bildene til f og g ?

Om du bytter plass på x og y og får likningen $x = f(y)$, speiles grafen til f om linjen $x = y$.

- 13 Skisser kurven gitt av likningen $x = y \sin y$ for hånd og dobbeltsjekk i python.

Dette leder til noe som kalles **den inverse funksjonen**.

- 14 Les kapittel 2.11 i Arnes bok for å finne ut hva dette er.

I grove trekk finner man det inverse funksjonsuttrykket ved å løse likningen $y = f(x)$ for x .

- 15 Finn f^{-1} dersom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = e^x$.

Men vi kan støte på noen problemer.

- 16 Finnes den inverse funksjonen til $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2?$$

Hva skjer når du prøver å finne den? Tegn opp.

Problemet med oppgaven over er at $x^2 + 2x + 2$ ikke er injektiv. En funksjon f er **injektiv** dersom

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Grafen til en injektiv funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ krysser en vannrett linje i planet maksimalt én gang.

- 17 Funksjonen $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.

(Hint: sett $x^2 + 2x + 2 = y$ og løs for x med *abc*-formelen.)

- 18 Hvilke av funksjonene i oppgave 4 er injektive dersom definisjonsmengden er $\mathbb{R}$?

- 19 Skisser pH mot $[\text{H}_3\text{O}^+]$ og $[\text{H}_3\text{O}^+]$ mot pH .

- 20 Om $f^{-1} = f$, kalles det "selv-invers". Kan du finne noen slike? Hvordan ser det ut geometrisk?

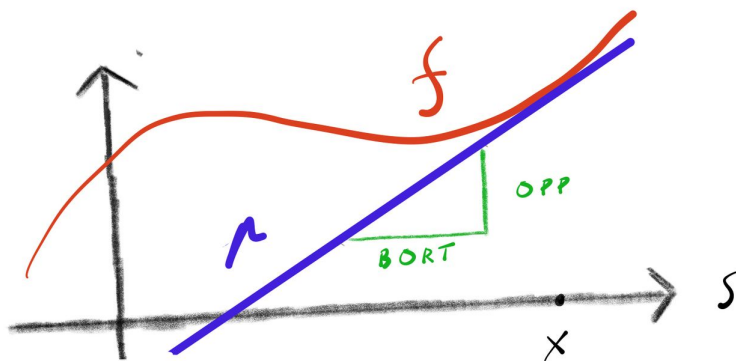
For funksjoner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ defineres **stigningstallet** som

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer; i så fall er f **deriverbar** i x . Å definere grenseverdi ordentlig er ganske teknisk, så det venter vi med. **Tangentlinjen** til f i x er $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$p(s) = f(x) + f'(x)(s - x)$$

og tallet $f'(x)$ er *opp delt på bort*:



- [21] Bruk definisjonen over til å vise at x^2 har derivert $2x$.
- [22] Bruk definisjonen over til å vise at x^n har derivert nx^{n-1} dersom n er et naturlig tall.
- [23] Det finnes en snedig formel for den deriverte til f^{-1} . Utled at

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

dersom f^{-1} eksisterer, f er deriverbar og $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Vis at

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



UKENS NØTTER

Shockleys diodelov⁵ gir strømmen i gjennom en diode som funksjon av spenningen v over den.

DIODE

$$i(v) = i_0 (e^{v/v_0} - 1)$$



Parameteren i_0 kalles **reversstrømmen**. Dette er strømmen som går i sperreretningen når spenningen er stor og negativ. **Den termiske spenningen** er parameteren

$$v_0 = \frac{kT}{nq}$$

der

k er Boltzmanns konstant:

https://en.wikipedia.org/wiki/Boltzmann_constant

T er temperaturen i Kelvin:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin>

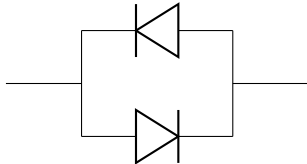
q er elektronladningen:

https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_charge

n er en diodespesifikk idealitetsfaktor:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Diode>

1 Vis at dersom du kobler to identiske dioder i parallell slik:



blir forholdet mellom strøm og spenning gitt ved

$$i(v) = i_0 (e^{\frac{v}{v_0}} - e^{-\frac{v}{v_0}}) = 2i_0 \sinh\left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Denne parallellkoblingen av dioder kan dukke opp på anoden i noen elektrokjemiske celler.⁶



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Shockley_diode_equation

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Butler-Volmer_equation

Laurentius Lie er blitt pensjonist, og han får tiden til å gå ved å sette sammen esker med røde juledioder der noen er defekte og noen ikke er defekte. Vi lar n være antall dioder i boksen, og k være antall defekte dioder. Hvorvidt en diode er defekt eller ikke, kalles en **mikrotilstand**. Vi kaller k den **makroskopiske tilstanden**, og en bestemt boks en **konfigurasjon**. Laurentius Lie har et skarpt blikk for dioder; han klarer å holde styr på forskjellige konfigurasjoner. Han ser med letthet forskjell på to bokser der diode nummer fem og tretten er defekte og en annen boks der diode nummer to og syv er defekte. Det gjør ikke vi. Det eneste vi ser er antall defekte dioder i boksen.

- 2] Hvor mange konfigurasjoner gir k defekte dioder dersom det er n dioder i boksen?

Vi lar $W(k)$ være svaret på forrige oppgave. Dette tallet kalles den **statistiske vekten** til k .

- 3] Han har nettopp laget to bokser etter hverandre, den ene med k_1 defekte dioder og den andre med k_2 defekte dioder. Hvor mange konfigurasjoner gir denne makroskopiske tilstanden? (Hint: Han er nøye på å sette sammen boksene tilfeldig helt uavhengig av hverandre.)

Laurentius Lie driver med dette fordi det eneste han føler ugjort i karrieren sin, er å forklare entropi. Entropifunksjonen $S = f(W)$ er en funksjon som tilfredsstiller postulatet at du kan legge sammen entropiene for isolerte systemer:

$$f(W) = f(W_1) + f(W_2)$$

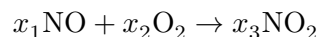
Her er W_1 og W_2 de statistiske vektene til boksene hver for seg og W den statistiske vekten til de to boksene som helhet.

- 4] Hva slags funksjon er f ? (Hint: Bruk forrige oppgave.)

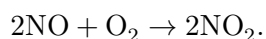


1 - 5 - LINEÆRALGEBRA I

Å balansere en reaksjonslikning er enkelt når den er liten. For eksempel ser vi raskt at



tilfredsstilles av $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 2$, slik at



Men vi kan late som om vi ikke visste det. I så fall nitrogenet gir likningen

$$x_1 = x_3$$

mens oksygenet gir likningen

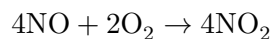
$$x_1 + 2x_2 = 2x_3.$$

En matematiker ville stilt dette opp slik:

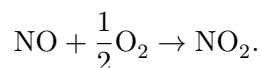
$$x_1 + 0x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

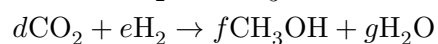
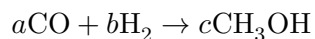
Dette problemet har uendelig mange løsninger; vi kunne like gjerne skrevet



eller

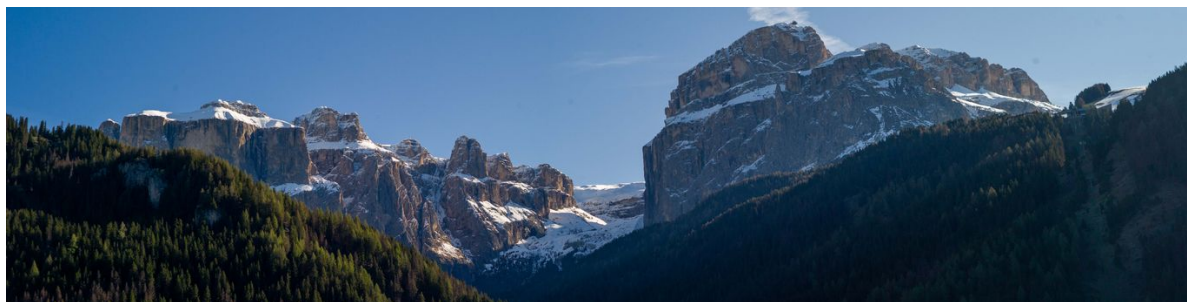


N Men det kan fort bli komplisert. Her en prosess for å lage metanol.¹



Klarer du å balansere denne?

Nå skal vi se på systematiske teknikker for å håndtere slikt skrømt. Dette kalles **lineæralgebra**.



¹<https://en.wikipedia.org/wiki/Methanol>

Disse oppstår naturlig når man prøver å løse likninger. En likning kan fint ha mange løsninger. En likning kan faktisk ha uendelig mange løsninger. For eksempel er det uendelig mange punkter i $\mathbb{R}^2$ som passer i likningen

$$2x_1 + 3x_2 = 0,$$

og de ligger alle sammen på en linje med normalvektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det er lett å se at denne linjen går gjennom origo, siden

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

passer i likningen. (Sjekk slutten av økt 1-2 om du ikke husker vektorer på høykant.)

0 Løs likningssystemet

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$4x_1 + 5x_2 = 1$$

(Et bra stalltips er å gange den første likningen med 2 og så trekke likningene fra hverandre.)



Dersom du skjønnte hvordan oppgave 0 skulle løses, ganget du den første likningen med 2 og fikk

$$4x_1 + 6x_2 = 0$$

og så trakk du likningene fra hverandre og fikk

$$x_2 = -1$$

og så er det bare å sette inn denne i en av likningene, og så ser vi at

$$x_1 = 3/2.$$

Det er altså bare en kombinasjon av x_1 og x_2 som passer i likningssystemet, og jeg kan avsløre at uansett hva du hadde satt inn på høyresiden, så ville det samme skjedd. Likningssystemet

$$2x_1 + 3x_2 = b_1$$

$$4x_1 + 5x_2 = b_2$$

løses med de samme stegene; vi ganger den første likningen med 2 og trekker dem fra hverandre:

$$x_2 = 2b_1 - b_2$$

Så setter vi uttrykket for x_2 inn i en av likningene (velg og vrak), og får

$$x_1 = (b_1 - 3(2b_1 - b_2)) / 2 = (3b_2 - 5b_1) / 2.$$

Det spiller ingen rolle hva b_1 og b_2 er, x_1 og x_2 blir entydig bestemt uansett. Dette eksemplet var kanskje ikke så interessant, men det å vite hvordan man håndterer **lineære likningssystemer**:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

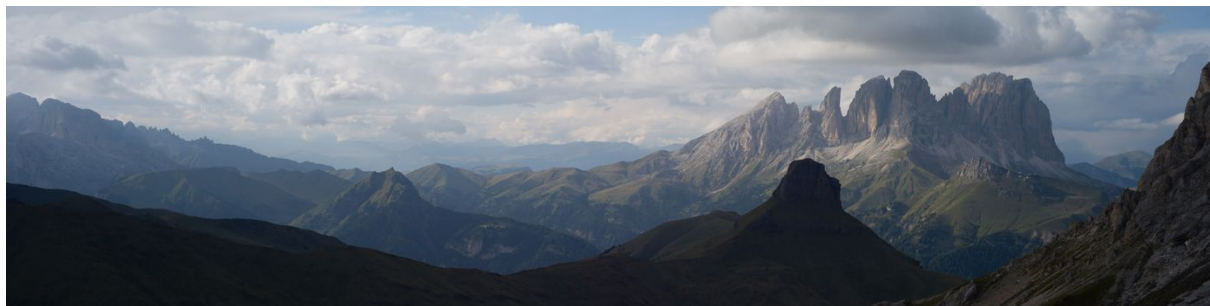
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

er ekstremt viktig. Lineære likningssystemer dukker opp i alle fagfelt uten unntak.

1 Her er et eksempel. Et annengradspolynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.



Dersom du skjønnte hvordan oppgave 1 skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp likningssystemet

$$\begin{aligned}a + b + c &= 2 \\4a + 2b + c &= 3 \\9a + 3b + c &= 1\end{aligned}$$

Realistiske modeller av fysiske problemer kan hoste opp likningssystemer med så mange likninger og ukjente at det ikke er trivielt å regne ut løsningen på rimelig tid, selv med datamaskin. Det er for eksempel ikke noe problem å lage et likningssystem med 10000 likninger som laptopen min trenger flere sekunder på å løse, og likningssystemer i anvendelser kan bli mye større enn som så. Men:

If you can reduce a mathematical problem to a problem in linear algebra, you can most likely solve it, provided that you know enough linear algebra.

- Peter D. Lax

Hvis du lærte det samme som jeg (født i 1983) på ungdomsskolen, lærte du å løse lineære likningssystemer med tre likninger og tre ukjente ved innsettingsmetoden. Det finnes tusenvis av forskjellige teknikker for å løse lineære likningssystemer, men metoden alle universitetskurs begynner med, kalles **gausseliminasjon**.² Dette er en kjedelig teknikk for å herje med likningssystemer.

- ² Les wikipediaartikkelen i fotnoten eller kapittel 1 og 2 i Skartsæterhagens kompendium eller kap. 7.1 og 7.2 i Arnes bok og regn ut a , b og c i systemet over ved gausseliminasjon.



²https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination

Gausseliminasjon ble oppfunnet av noen kinesere for omtrent to tusen år siden, til tross for at det er oppkalt etter den hvite middelaldrende mannen Carl Friedrich Gauss. Selv om du antagelig ikke skal gausseliminere så mye etter du er ferdig å studere, må du dessverre gausseliminere litt nå, for det er ikke mulig å forstå lineær algebra uten å løse noen lineære likningssystemer.

3 Løs likningssystemene:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y + 4z = 4 & 3x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 5 & -x_1 + 3x_2 & - x_4 = 0 \\ 4x + 5y + 7z = 3 & -x_1 & + 3x_3 - x_4 = 0 \\ & -x_2 - x_3 + 3x_4 & = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2z + iw + (5 - 3i)u = 10 \\ 4z + 2iw + (10 + 2i)u = 20 + 16i \\ 2iz - w + (4 + 6i)u = 2 + 12i \end{array}$$

En av de første tingene man gjør når man skal studere lineære likningssystemer, er å gå lei av å skrive $+$ og $-$ og $=$ og x_1 og x_2 . Derfor lager vi oss notasjon som er litt mer minimalistisk. Systemet

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 4x + 5y + 7z = 3 \end{array}$$

skriver vi kort og godt

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

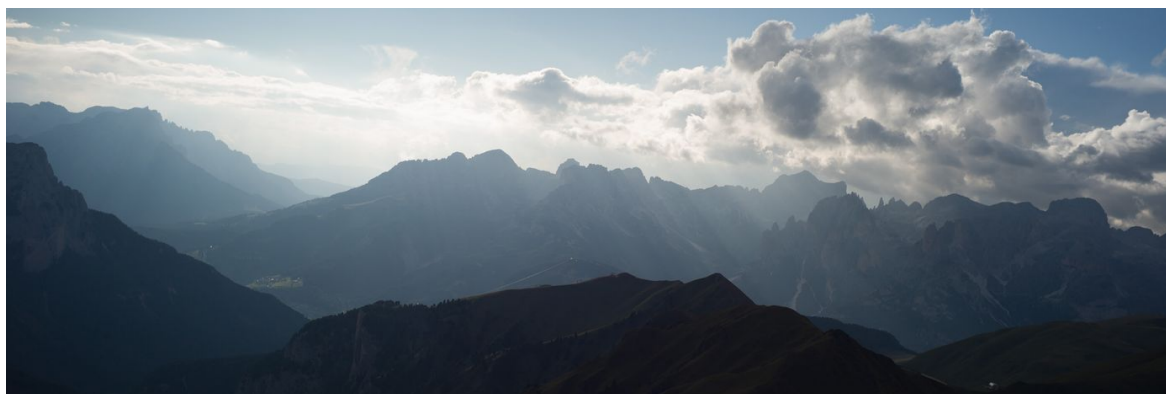
4 Løs likningssystemene på nytt og nyt hvor mye mindre skrijving det blir:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5 - 3i & 10 \\ 4 & 2i & 10 + 2i & 20 + 16i \\ 2i & -1 & 4 + 6i & 2 + 12i \end{array}$$

Hvis du nå har skjønt foran og bak på gausseliminasjon, kan vi begynne på det som er gøy.

5 Prøv å løse systemene

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}$$



For å skjønne hva som skjer i alle disse systemene, må man studere teorien som ligger i bunn for lineære likningssystemer. Les Skartsæterhagens kompendium kap. 3-6.

- 6 Alle punkter (x, y, z) som passer i likningen $ax + by + cz = d$ ligger på ett og samme plan i rommet. Forklar hva som skjedde i oppgave 5.

Antagelig har du nå oppdaget at et lineært system kan ha entydig løsning eller ingen løsning eller uendelig mange løsninger. Med tre likninger og tre ukjente er dette geometrisk innlysende - tre plan kan skjære hverandre i ett enkelt punkt eller i uendelig mange eller ikke i det hele tatt. Men geometriske ideer om plan i $\mathbb{R}^3$ hjelper oss ikke dersom vi skal forstå hvorfor

$$\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{array}$$

har entydig løsning, mens

$$\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ -1 & i & i \end{array}$$

ikke har løsning i det hele tatt. La oss gå tilbake til likningssystemet fra reaksjonsbalanseringen:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Om vi bare tar et lite typografisk grep og skriver

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at systemet er en vektorlikning

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \mathbf{v}_3 x_3 = \mathbf{b}$$

der lineærkombinasjonen av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

kreves å være lik

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En viktig definisjon: Vi sier at vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er **lineært uavhengige** dersom

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \dots + \mathbf{v}_n x_n = \mathbf{0} \quad \implies \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Har vi lineær uavhengighet, har vi høyst én løsning.

- 7 Vis dette.

(Det er kanskje ikke så lett å komme på, men ikke så vanskelig å skjønne om man får det forklart. Vi hadde det på eksamen i 2022 og det gikk helt fint.)

Fordelen med lineær uavhengighet er at man kan analysere likningssett med flere dimensjoner enn tre eller forskjellig antall likninger og ukjente.

- 8 Hvilke av systemene så langt har lineært uavhengige vektorer på venstresiden?

Lineærkombinasjonen

$$\mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \mathbf{v}_3 x_3$$

likner mistenkelig på et skalarprodukt mellom “vektoren” $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ og den ukjente $\mathbf{x}$. Denne nye vektoren kalles en **matrise**:

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En matrise er et tableau med tall. Faktisk er også $\mathbf{x}$ en matrise:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og vi tenker på det store dyret på venstresiden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 + 0x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 \\ &= \mathbf{v}_1 x_1 + \mathbf{v}_2 x_2 + \mathbf{v}_3 x_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

som et produkt mellom den kjente matrisen A og den ukjente matrisen $\mathbf{x}$. Dette produktet er en generalisering av skalarproduktet og kalles et **matriseprodukt**. Dette er det viktigste produktet du kommer til å lære noen gang, så la oss ta unna definisjonen. En matrise

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

har **dimensjon** $m \times n$. Matrisens **kolonner** er

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

og matrisens **rader** er

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

og her er definisjonen på matriseprodukt:

Dersom A og B er matriser med dimensjoner $m \times n$ og $n \times p$, er elementet c_{ij} i produktet $C = AB$ gitt ved skalarproduktet mellom rad nummer i i A og kolonne nummer j i B .

9 Les kapittel 4 i Skartsæterhagens lineæralgebrakompendium og gang sammen matrisene

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Siden et matriseprodukt består av $m \times p$ skalarprodukter, bør det være klart at man ikke kan gange sammen matriser med vilkårlig dimensjon. La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 10 Regn ut AB , BA , A^2 , B^2 og $A + B$ eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening.

La nå

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 11 Regn ut AI , IA , AB og BA . Hva tror du dette kan brukes til? Gang

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

inn på høyre side av B og ta en ny titt på det første systemet i oppgave 3.

Matrisen I kalles **identitetsmatrisen**. Matrisen B kalles A sin **inverse matrise**, og vi skriver $B = A^{-1}$. Kvadratiske matriser (matriser med like mange rader som kolonner) har invers hvis og bare hvis kolonnene er lineært uavhengige, og inversen kan beregnes på mange forskjellige måter:

https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

- 12 I praksis beregner man aldri den inverse matrisen, for det koster for mange regneoperasjoner. Men én invers må man beregne i sitt liv. Regn ut A^{-1} (A som over) på en eller annen måte og løs oppgave 4 og 5 på nytt med invers. Hvilke matriser i oppgave 5 har invers?

Matrisemultiplikasjon tilfredsstiller ellers mange regneregler du er vant til, men ikke kommutativitet, unntatt i noen spesialtilfeller. Kommutativitet er at faktorenes orden er likegyldig. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

- 14 Regn ut AB og BA . Er det noen matriser i denne økten som kommuterer?

En liten ting til slutt: Vi skriver $\mathbb{R}^{m \times n}$ for mengden av alle $m \times n$ -matriser med reelle komponenter. Det er praktisk, for nå kan vi si $\mathbb{R}^{m \times 1}$ og $\mathbb{R}^{1 \times n}$ dersom vi trenger å skille mellom rad- og kolonnevektorer. Det må vi etterhvert.

Trenger du flere oppgaver, er disse relevante:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving02.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving03.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving04.pdf

Løsningsforslag finner du her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving02-lf.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving03-lf.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving04-lf.pdf

Dersom kolonnene i en matrise A er lineært avhengige, betyr dette at likningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

har ikke-trivielle løsninger, altså andre løsninger enn $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Disse løsningene kalles **nullrommet** til A . Nullrommet til A dukker opp naturlig når man vil balansere reaksjonslikninger. Reaksjonslikningen på den første siden er

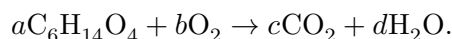
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

på matriseform, og matrisen

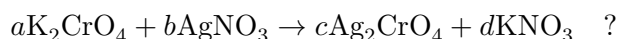
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

kalles **atommatrisen**.

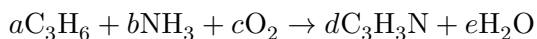
- 15 Balanser reaksjonen



- 16 Hva med

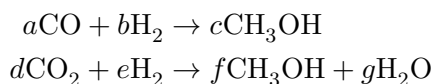


- 17 Man produserer acrylonitril fra propylen, ammoniakk og oksygen slik:



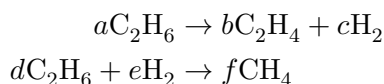
Se eksempel 3.2 i Sigurd Skogestads klassiker om prosesseteknikk.

- 18 Vi kan kjøre på systemer av reaksjonslikninger og. Her en prosess for å lage metanol.

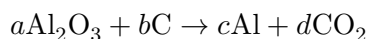


<https://en.wikipedia.org/wiki/Methanol#Production>

- 19 Eller hva med litt dehydrogenering av etan?



- 20 Eller kanskje litt aluminiumproduksjon fra aluminiumoksid:



Takk til Svein Sunde og Sigurd Skogestad for eksempler.

Av og til er det slik at ting er lineæralgebra selv om det ser ut som noe helt annet.

21 La

$$\begin{aligned}p(x) &= 8x^3 - 8x^2 - 4x - 6 \\q(x) &= -7x^3 - 7x^2 + 5x + 6 \\r(x) &= 3x^2 - 8x - 4\end{aligned}$$

Finnes det konstanter a , b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^3 - 7x^2 - 3x?$$

22 La

$$\begin{aligned}p(x) &= -6x^3 - 4x^2 - 8x + 8 \\q(x) &= 6x^3 + 5x^2 - 7x - 7 \\r(x) &= -4x^3 - 8x^2 + 3x\end{aligned}$$

Finnes det konstanter a , b og c slik at

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot r(x) = -3x^2 - 7x - 3?$$

23 La

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Mengden av alle matriser på denne formen oppfører seg nøyaktig som noe du allerede har sett. Hva?

24 La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Er kolonnene i AB lineært uavhengige?

25 Kan en lineært uavhengig vektormengde inneholde nullvektoren?

26 Vis at to vektorer er lineært avhengige hvis og bare hvis de er parallelle.



1 - 6 - LINEÆRALGEBRA II

Stoffet i forrige uke er ikke så vanskelig, men det var kanskje mye på en gang. Her er en kort oppsummering. Lineæralgebra handler om løsning av likningssystemer på formen

$$Ax = b$$

der $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ og $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Systemet har enten én, ingen eller uendelig mange løsninger, og finnes det løsning, er den entydig hvis og bare hvis kolonnene i A er lineært uavhengige.

1 Løs

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Avgjør om kolonnene i matrisen er lineært avhengige. Hva med radene?

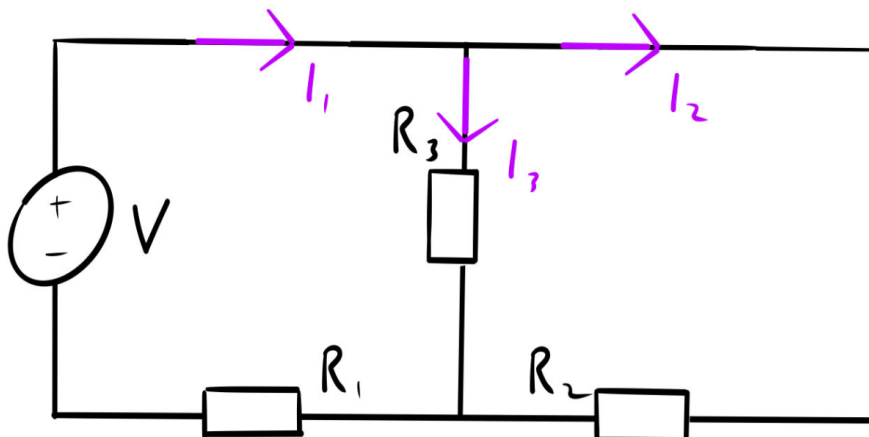
I denne økten skal vi studere kvadratiske matriser, altså matriser der $m = n$. For slike matriser er det noen spesielle ting som gjelder - disse er sammenfattet i noe som kalles **the invertible matrix theorem**¹ Alt du noensinne kommer til å trenge å vite om kvadratiske matriser, finner du her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

2 Finn ut hvordan man regner ut determinanten til en matrise, regn ut determinanten til matrisen i oppgave 1, og dobbeltsjekk svaret ditt med np.linalg.det. Er matrisen inverterbar?

I noen tilfeller er det lurt å vite foran og bak på ikke-kvadratiske matriser, men majoriteten av alle anvendelser produserer kvadratiske matriser. Kretsen under modellerer en høyttaler.

3 Kirchhoffs strømlov sier at strømmene inn i et forgreiningspunkt må summere til null - ladde partikler forsvinner ikke i løse luften. Sett opp et lineært likningssystem for i_1 , i_2 og i_3 . (Bruk Kirchhoffs spenningslov på sløyfene og Kirchhoffs strømlov på den øverste forgreiningen.)

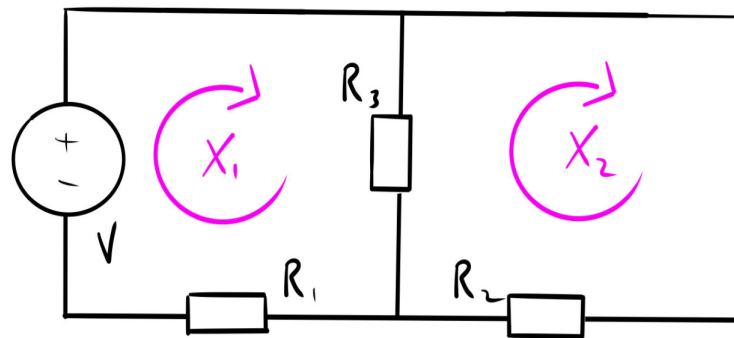


¹<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2023h/notater/15-inverterbarhet.pdf>

Det finnes systematiske teknikker for å sette opp lineære likningssystemer for resistive kretser, altså kretser med kun motstander og spennings- eller strømkilder. Hvis du ser på forgreiningspunktet i kretsen over og har skjönt Kirchhoffs strømlov, vil du nok innse at

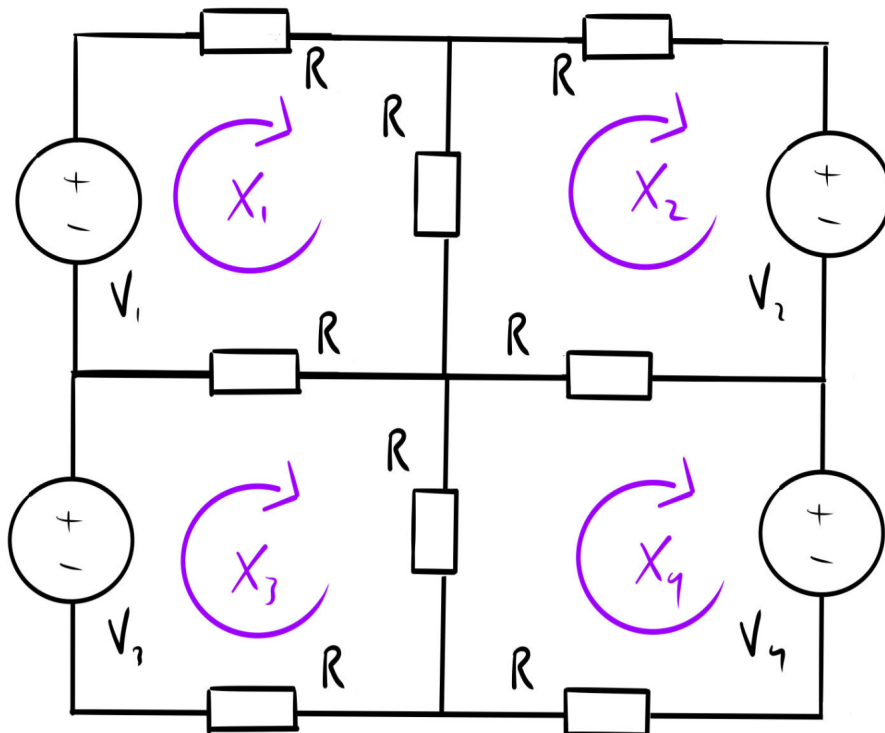
$$i_3 = i_1 - i_2.$$

Dette er utgangspunktet for noe som kalles **maskestrømsmetoden**. Den består i å tenke at de ukjente er sirkulære strømmen som går i bane i hver sløyfe slik:



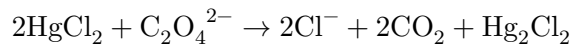
Strømmen gjennom R_3 er $x_1 - x_2$, mens strømmen gjennom R_1 og R_2 er henholdsvis x_1 og x_2 . Maskestrømsmetoden fungerer bare på planare kretser,² men den er ryddig, for det blir like mange ukjente strømmen som sløyfer, og man får korrekt antall likninger ved å summere spenningsfallet rundt hver sløyfe. Prøv dette på kretsen under og løs når (alle motstander er like):

$$\boxed{4} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{5} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{6} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{7} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad \boxed{8} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$



²Noen synes for øvrig maskestrømsmetoden er litt shady, for du kan potensielt ha ukjente som ikke kan måles med et multimeter. Noen mennesker liker å måle alt, og tror ikke på noe før de har vært bortpå med multimeteret.

Python er praktisk når man skal løse kvadratiske systemer med entydig løsning. Her er et eksempel fra TMT4115. Kvikksølvklorid HgCl_2 og oksalat $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ reagerer til noe andre greier:



Hvis vi starter med bare kvikksølvklorid og oksalat, er endring i konsentrasjoner gitt ved differensiallikningene

$$\frac{d[\text{HgCl}_2]}{dt} = -2k[\text{HgCl}_2]^m [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]^n$$

og

$$\frac{d[\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]}{dt} = -k[\text{HgCl}_2]^m [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]^n$$

der reaksjonshastigheten k og **reaksjonsordnene** m og n må bestemmes empirisk. Eksemplet er hentet fra læreboken i TMT4115, og der står det en tabell med (fiktive?) konsentrasjonsmålinger:³

$[\text{HgCl}_2]$	$[\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]$	$k[\text{HgCl}_2]^m [\text{C}_2\text{O}_4^{2-}]^n$
0.105	0.15	$1.8 \cdot 10^{-5}$
0.105	0.30	$7.1 \cdot 10^{-5}$
0.052	0.30	$3.5 \cdot 10^{-5}$

Setter vi disse inn i difflikningene over, får vi likningssystemet

$$k \cdot 0.105^m \cdot 0.15^n = 1.8 \cdot 10^{-5}$$

$$k \cdot 0.105^m \cdot 0.30^n = 7.1 \cdot 10^{-5}$$

$$k \cdot 0.052^m \cdot 0.30^n = 3.5 \cdot 10^{-5}$$

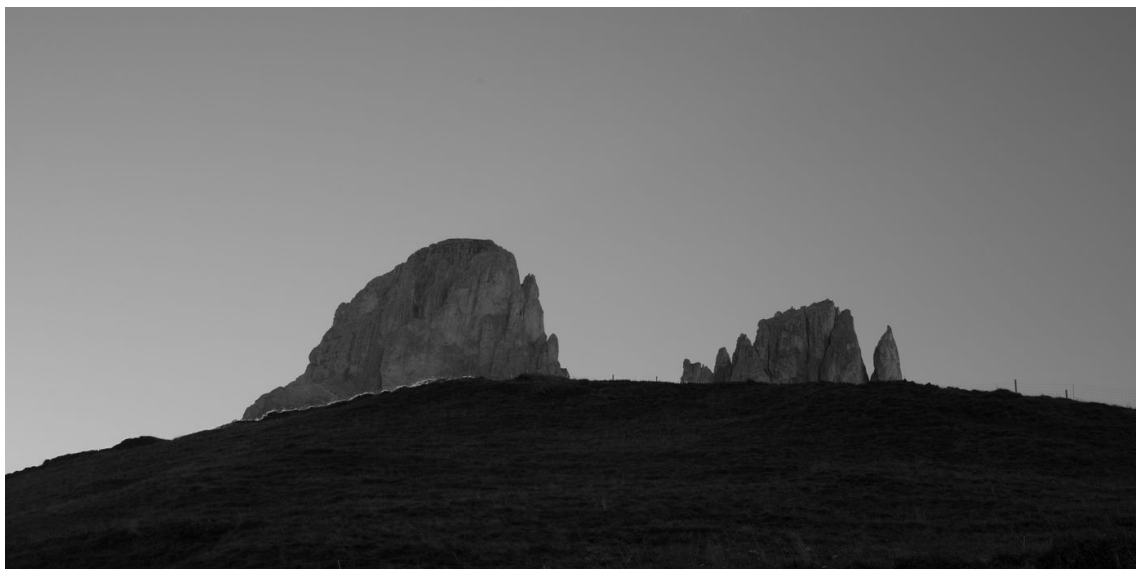
9 Ta log til alt og utled følgende lineære likningssystem for m , n og $\log k$:

$$\log k + m \log 0.105 + n \log 0.15 = \log (1.8 \cdot 10^{-5})$$

$$\log k + m \log 0.105 + n \log 0.30 = \log (7.1 \cdot 10^{-5})$$

$$\log k + m \log 0.052 + n \log 0.30 = \log (3.5 \cdot 10^{-5})$$

Det er ikke så gøy å gausse så stygge tall for hånd, så nå kan du finne ut av `np.linalg.solve`.



³I det virkelige liv ville man tatt mange flere målinger og brukt regresjon (dette skal vi lære til våren):
https://en.wikipedia.org/wiki/Regression_analysis

Matriser introduseres som regel i forbindelse med lineære likningssystemer. Men produktet Ax er en viktig funksjon med mange anvendelser; datagrafikk er kanskje den mest kjente. Finn ut hva matrisene under gjør geometrisk med vektorer som ganges inn fra høyre:

$$\boxed{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{13} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{14} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{15} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{17} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \boxed{18} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{19} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{20} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{23} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{24} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \boxed{25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Hva som skjer med vektorer når de ganges inn i én og samme matrise er også interessant. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og gang inn følgende vektorer:

$$\boxed{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{27} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{28} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{29} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{30} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{31} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Som du ser har noen vektorer den egenskap at når man ganger dem inn i matrisen, kommer det ut en *skalarmultiippel av den samme vektoren*. Dette kalles **egenvektorer**,⁴ og den korresponderende skalarmultiipelen λ kalles **egenverdien**. For å finne λ , gjør du som følger. Det første er å flytte alt på én side og bruke identitetsmatrisen og skrive egenvektorlikningen slik:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)x = 0$$

Nå vet du at dersom kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært uavhengige, har dette problemet entydig løsning, nemlig nullvektoren. Nullvektoren vil vi ikke skal klassifisere som egenvektor, for hvis den gjorde det, ville alle tall klassifisert som egenverdier, siden likningen

$$A0 = \lambda 0$$

er sann uansett hva λ er. Med andre ord må vi kreve at kolonnene i $A - \lambda I$ er lineært avhengige.

$$\boxed{32} \quad \text{Det er de hvis og bare hvis } \det(A - \lambda I) = 0. \text{ Finn egenverdiene til } A.$$



⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors

Slik gjøres det: Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda) ((6 - \lambda)^2 - 4) \\ &\quad - 2(2(6 - \lambda) - 4) \\ &\quad + 2(4 - 2(6 - \lambda)) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)\end{aligned}$$

slik at $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ og $\lambda_3 = 9$ er de tre egenverdiene. Polynomet $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$ kalles matrisens **karakteristiske polynom**. Algebraens fundamentalteorem sier at et polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

alltid kan faktoriseres

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

der $\lambda_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

På folkemunne sier vi gjerne at en $n \times n$ -matrise alltid har n egenverdier, for det karakteristiske polynomet har alltid orden n om matrisen er $n \times n$.⁵ Når vi har funnet en egenverdi λ , kan vi finne de korresponderende egenvektorene ved å regne ut nullrommet til matrisen

$$A - \lambda I.$$

Kommende uke vil det bli klart hvorfor jeg plaget deg med dette.

33 Finn egenvektorene til A .

34 Finn egenverdier og egenvektorer til matrisene i oppgave 10-25.



⁵Du må telle antall lineære faktorer i det karakteristiske polynomet og ikke antall forskjellige egenverdier.

UKENS NØTTER

En **algebraisk struktur** er en mengde med elementer og en eller flere regneregler for å kombinere dem, for eksempel addisjon og multiplikasjon. Vi sier at en mengde er **lukket** under en regneregler dersom alle kombinasjoner av elementer også er med i mengden. For eksempel er mengden

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ikke lukket under addisjon, siden

$$3 + 4 = 7 \notin A.$$

Alle rasjonale tall er lukket under addisjon, siden summen av to rasjonale tall er et rasjonalt tall.

Hvis vanlig regning var alt en ingeniør trengte, hadde livet vært greit. Men grunnen til at det er lurt å vite hva en algebraisk struktur er, er at de brukes til å lage teoretiske modeller for hvordan ting oppfører seg.

For alle algebraiske strukturer setter vi alltid opp **aksiomer**. Et aksiom er et element i en smørbrødsliste i en definisjon. Du kan tenke på det som en slags liten definisjon inni en annen definisjon. Når en matematiker sier at han eller hun forstår et eller annet, betyr det noe sånt som at vedkommende skjønner omtrent hvordan dette er utledet fra et sett med aksiomer.

En **kropp** er noe som modellerer helt vanlig regning. Dette er en algebraisk struktur med to operasjoner, addisjon (+) og multiplikasjon ($\cdot$). Det er vanlig å sløyfe gangetegnet, og skrive $x \cdot y = xy$. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for addisjon:

- 1 Addisjonen er assosiativ: $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 2 Addisjonen er kommutativ: $x + y = y + x$
- 3 Additiv identitet: Det finnes et element 0 slik at $x + 0 = x$
- 4 Additiv invers: For hver x finnes y slik at $x + y = 0$

Det additive inverselement til x skrives $-x$, og 0 er sin egen additive invers. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for multiplikasjon:

- 5 Multiplikasjonen er assosiativ: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- 6 Multiplikasjonen er kommutativ: $x \cdot y = y \cdot x$.
- 7 Multiplikativ identitet: Det finnes et element 1 slik at $1 \cdot x = x$.
- 8 Multiplikativ invers: For hver $x \neq 0$ finnes y slik at $x \cdot y = 1$.

Det multiplikative inverselement til x skrives $1/x$ eller $\frac{1}{x}$. Til slutt er det et aksiom for rekkefølgen på regneoperasjonene:

- 9 Multiplikasjon er distributiv over addisjon: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Noen av regnereglene du lærte på skolen, slik som at $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$, er listet i aksiomene. Andre kan utledes fra aksiomene.

1 Vis at $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Vi sier at en kropp er **ordnet** dersom den er en **ordnet mengde** og ordningen passer med regneoperasjonene. Dette betyr at det finnes en relasjon $<$ slik at

- 1 kun en av $x < y$, $x = y$, $y < x$ er sann for et gitt par x, y
- 2 dersom $x < y$ og $y < z$ er $x < z$ for alle x, y, z
- 3 dersom $x < y$ er $x + z < y + z$ for alle z
- 4 dersom $0 < x$ og $0 < y$ er $0 < x \cdot y$

Egenskap 2 kalles **transitivitet**, og selv bavianer har litt peling på dette.⁶

- 2 Tallmengdene $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er alle kroppar. Hvilke av dem er ordnede?
- 3 Er $\mathbb{R}^{n \times n}$ en kropp under matriseaddisjon og matrisemultiplikasjon?
- 4 Hva med mengden av alle matriser på formen $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$?

⁶<https://academic.oup.com/beheco/article/24/2/511/250731>

TMA4101/4106/4111/4121



1 - 7 - DIFFERENSIALLIKNINGER III

Laurinda Lie tror på homeopati, og hun har lest at mot migrene er det lurt å drikke vann som har vært varmet opp og nedkjølt av en klump med *spesiell homeopatisk masse*. Laurentius Lie tror på mye rart, men ikke på homeopati. Han er imidlertid en grei fyr, og går med på å regne ut når det homeopatiske vannet har en passende drikketemperatur.

Den varme homeopatiske klumpen varmes opp og senkes så i et vannbad ute på verandaen, der det er null grader. I den homeopatiske tradisjon ristes alltid vannet på en nøye spesifisert måte, og dette sørger for perfekt blanding. Hvis vi antar Newtons avkjølingslov, får vi differensiallikningene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)\end{aligned}$$

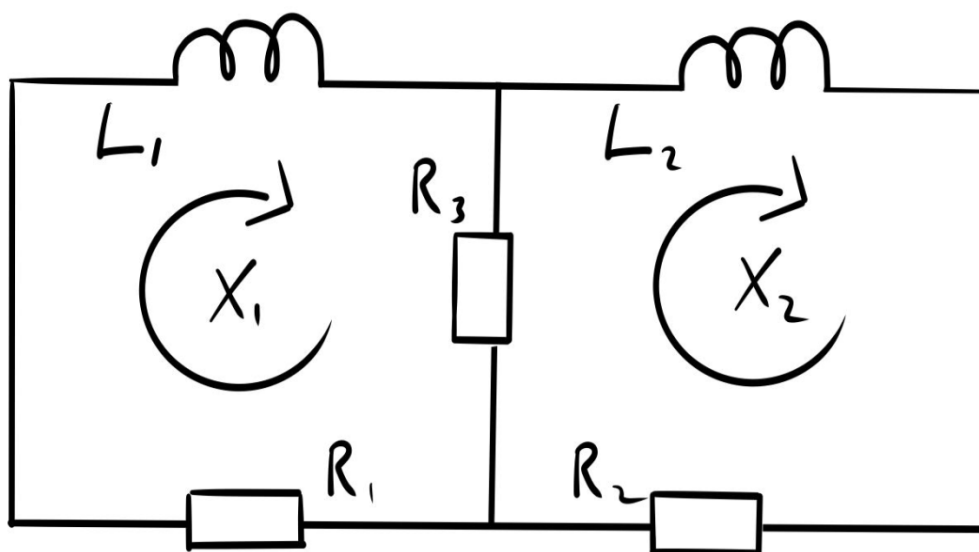
der x_1 er temperaturen i klumpen, x_2 er temperaturen i vannet, α_1 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og den homeopatiske klumpen og α_2 er varmeoverføringskoeffisienten mellom vannet og luften på verandaen.

- 1 Høyresiden i dette likningssystemet er et matriseprodukt på formen Ax . Finn A .

Dersom du bruker Kirchhoffs spenningslov på sløyfene i kretsen under, får du

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \left(-(R_1 + R_3)x_1 + R_3x_2 \right) / L_1 \\ \dot{x}_2 &= \left(R_2x_1 - (R_2 + R_3)x_2 \right) / L_2\end{aligned}$$

- 2 Høyresiden i dette likningssystemet er også et matriseprodukt på formen Ax . Finn A .



Nå skal vi blande sammen lineæralgebra og differensiallikninger. Systemene på forrige side ser grise ut, men det finnes en systematisk løsningsteknikk. La oss sette $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ eller $L_1 = L_2 = 1$, $R_2 = R_3 = 1$ og $R_1 = 0$, slik at vi får et litt håndterlig system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

Dette kalles et **lineært og autonomt differensiallikningssystem med konstante koeffisienter**. Det første vi må gjøre, er å sortere den ukjente i en søylevektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

slik at likningssystemet blir

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{der} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle differensiallikninger vi har løst til nå, har vi løst med eksponensialfunksjonen, så la oss prøve gjetningene $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$ og $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, altså

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{c} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og se hva som skjer. Setter vi $\mathbf{x}$ inn i systemet, får vi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den ene siden og

$$A\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

på den andre. Setter vi disse lik hverandre og deler ut $e^{\lambda t}$ som vi pleier, får vi

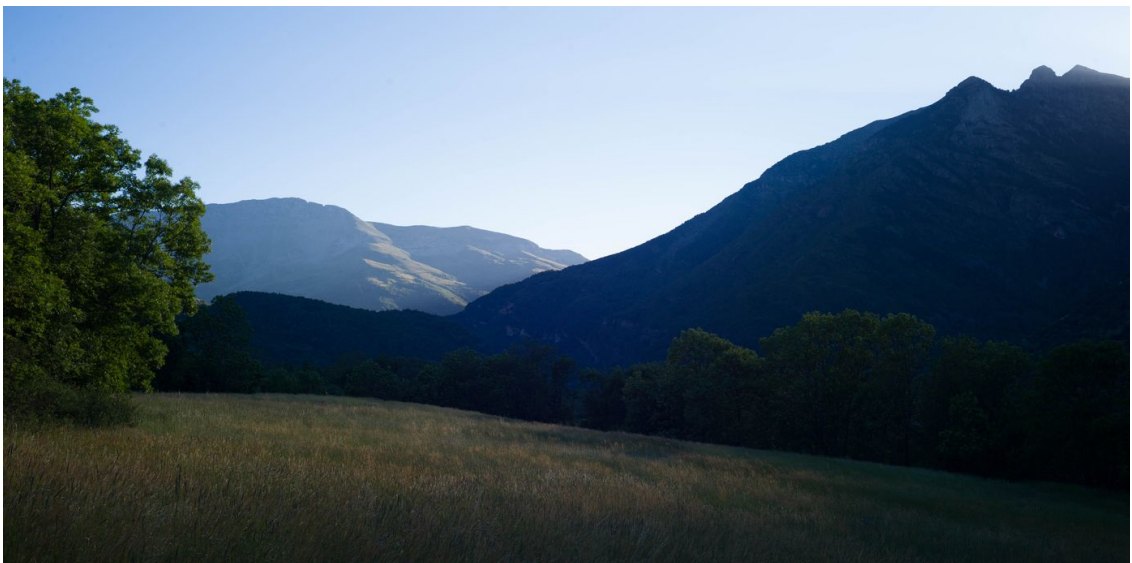
$$\lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

eller

$$\lambda \mathbf{c} = A\mathbf{c}$$

om du vil. Med andre ord må $\mathbf{c}$ være en av A sine egenvektorer og λ den korresponderende egenverdien om $\mathbf{x}$ som foreslått skal være en løsning.

3 Finn alle løsningene til systemet. Hvor mange forventer du?



Regna du riktig på oppgave 3, fikk du løsningene

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} + a_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nå går det an å vise at dette er alle løsninger du noensinne kommer til å finne, men det er nok litt i tidligste laget for oss. Det var kanskje litt uheldig for din kognitive last at det første differensiallikningssystemet du løste hadde så griseete tall, så la oss prøve noen litt penere.

4 Finn alle løsninger til systemene

$$\begin{array}{ll} \dot{z}_1 = 2z_1 + z_2 & \text{og} \\ \dot{z}_2 = z_1 + 2z_2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_2 = 2z_1 + 6z_2 + 2z_3 \\ \dot{z}_3 = 2z_1 + 2z_2 + 6z_3 \end{array}$$

Det siste systemet over er valgt med omhu - den ene egenverdien er null, og da er det trivielt å beregne egenverdiene til matrisen. Generelt er det ikke trivielt å faktorisere et tredjegradspolynom. Eller jo, det er "trivielt" i den forstand at det finnes en formel,¹ men det er ikke trivielt å huske formelen. Lars Onsager² greide visst å utlede den på egenhånd da han var tolv år gammel.

5 Du kan prøve deg på

$$\begin{array}{l} \dot{z}_1 = 2z_1 + z_2 + z_3 \\ \dot{z}_2 = z_1 + 2z_2 + z_3 \\ \dot{z}_3 = z_1 + z_2 + 2z_3 \end{array}$$

Bruk `np.linalg.eig` om du ikke greier å faktorisere det karakteristiske polynomet.

6 Litt mengdetrening er sikkert bra. Løs $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ der A er matrisene i 10-25 i forrige økt.

Vi kan også minnes Jens Balchen.³ Borte på ITK holder de balchenmesse hver fredag (de ofrer en hummer på et spesielt alter inne på lunsjrommet), og noen av de ansatte har relikvier etter ham på kontorene sine. Han høres grei ut i Aftenposten, men høsten 1982 gikk visst studentene i fakkeltog rundt huset hans i protest mot en legendarisk vanskelig regtekeksamen.

« Ingen mennesker er tjent med å gjøre
slavearbeid. Det er ikke interessant, det er
slitsomt og betalingen er lav [...] Det arbeide
som vi kan si ikke er menneskeverdig, det
bør automatiseres vekk. »

Jens Balchen i et intervju i *Aftenposten*, 8. januar
1966

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation#General_cubic_formula

² https://en.wikipedia.org/wiki/Lars_Onsager

³ <https://www.ntnu.no/itk/om/historie/balchen/minneord>

På den siste siden skal vi ta med oss litt ymse. I alle løsningene du fant over (hvis du gjorde det riktig), satt det noen ubestemte konstanter. Disse kan bestemmes ved å spesifisere initialkrav

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

der $\mathbf{x}_0$ er en konstant vektor.

- 7 Prøv noen forskjellige initialkrav på oppgave 4 og 5. Du kan løse 2×2 -systemet med $\mathbf{x}(0)$ lik

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og 3×3 -systemene med $\mathbf{x}(0)$ lik

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Av og til kan man støte på ymse problemer. Her er ett av dem:

- 8 Prøv å løse

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

med initialkrav $x_1(0) = 0$ og $x_2(0) = 1$.

Og her er et annet:

- 9 Den homeopatiske klumpen skal varmes opp til 88 grader celsius,⁴ og så senkes i vann fra springen, som holder 4 grader. Når får vannet en passelig drikketemperatur på 13 grader?

Dersom en $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ har n lineært uavhengige egenvektorer sier vi at A er **diagonaliserbar**. Dette er fordi det i så fall er mulig å skrive

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

der V har egenvektorene som kolonner og Λ er diagonal.

- 10 Vis dette.

Det går ellers an å takle likningen $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ som et system. Vi lager noen nye variable:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x(t) \\ z_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned}$$

Hvis du nå aksepterer at vi kan skrive

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{pmatrix}$$

går det an å skrive $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ på formen

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}.$$

- 11 Hva blir A ? Hva er A sitt karakteristiske polynom? Er A diagonaliserbar? Skriv om oppgave 2-5 i økt 1-3 til systemer og løs.

⁴Homeopatiens grunnlegger Samuel Hahnemann ble nemlig 88 år gammel:
https://en.wikipedia.org/wiki/Samuel_Hahnemann

UKENS NØTTER

Boolsk algebra er en algebraisk struktur som brukes til å modellere oppførselen til datamaskinen din. En boolsk algebra har minst to elementer, og to operasjoner, $+$ og $\cdot$, og følgende aksiomer:

- 1 $x + y = y + x$.
- 2 Det finnes et element 0 slik at $0 + x = x$.
- 3 For hver x finnes y slik at $x + y = 1$.
- 4 $x \cdot y = y \cdot x$.
- 5 Det finnes et element 1 slik at $1 \cdot x = x$.
- 6 For hver x finnes y slik at $x \cdot y = 0$.
- 7 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
- 8 $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Ved første øyekast kan aksiomene likne på aksiomene for kropp, men det er noen ting som oppfører seg helt annerledes. Vi har **komplement** (aksiom 3 og 6) istedet for invers, og assosiativitet er ikke med fordi det kan utledes av de andre aksiomene. Distributivitet kommer i to varianter, ikke bare i én som vi er vant til fra kropp. Regnereglene blir nå helt annerledes. Utled

$$\boxed{1} \quad x + x = x \quad \boxed{2} \quad xx = x. \quad \boxed{3} \quad x + 1 = 1. \quad \boxed{4} \quad x \cdot 0 = 0. \quad \boxed{5} \quad \text{assosiativitet.}$$

Alt dette blir selvfølgelig mindfuck i begynnelsen, men dette er en nyttig modell av digitallogikk, og alt blir lettere å forstå om man sier "og" for $\cdot$ og "eller" for $+$. Du kan tenke på x som et utsagn som er enten sant eller usant. Uttrykket

$$x + x = x$$

betyr at " x eller x har den samme sannhetsverdien som x ".

- $\boxed{6}$ Oversett regnereglene i aksiomene og i oppgave 1-5 til dette språket.



REPETISJONSOPPGAVER

Det har gått fort i svingene de siste tre ukene. Her er flere oppgaver.

1 Løs

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

2 La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Vis at kolonnene i A er lineært uavhengige, finn A^{-1} , og løs likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3 La

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}.$$

Finn P slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal matrise. Løs initialverdiproblemet

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 Finn den inverse matrisen til

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

og bruk den til å løse systemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

5 Beregn volumet til parallellepipedet utspent av kolonnene i matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

og bruk resultatet til å avgjøre om likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning, der

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

6 Finn en løsning til

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_3$$

som tilfredsstiller

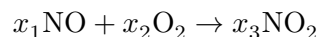
$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = 0$$

1 - 8 - LINEÆRALGEBRA III

Velkommen til den tørreste uken i semesteret. Når vi balanserte reaksjonslikningen



endte vi opp med det lineære systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Løsningene kalles nullrommet til matrisen, og består av alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

der s er en vilkårlig konstant. Når vi analyserte C-14-metoden, løste vi differensiallikningen

$$\dot{x}(t) + \lambda x(t) = 0.$$

Løsningene til denne er nullrommet til differensialoperatoren

$$D(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) x = \dot{x} + \lambda x$$

og gitt ved alle funksjoner

$$x(t) = ce^{-\lambda t}$$

der c en vilkårlig konstant. Løsningene til

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

er nullrommet til differensialoperatoren

$$D(\mathbf{x}) = \left(\frac{d}{dt} - A \right) \mathbf{x}$$

og gitt ved alle funksjoner på formen

$$\mathbf{x}(t) = a_1 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} + a_2 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Disse tre problemene er forskjellige, men har to viktige fellestrekk. Det ene likhetstrekket er at alle tre problemene er **lineære**,¹ og det andre er at mengden av alle løsninger danner et **vektorrom**.²

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_map

²https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space

Det finnes aksiomer for vektorrom. Disse er ikke så viktige for en ingeniør, men du finner dem i ukens nøtter om du er interessert. De fleste av dem handler om å formalisere reglene for vektorregning. Hvis du er en litt folkelig type, kan du tenke på et vektorrom som

Alle lineærkombinasjoner av en vektormengde.

Dersom vektorene i vektormengden er lineært uavhengige, kalles de en **basis**, og dersom basisen inneholder n vektorer sier vi at vektorrommet er n -**dimensjonalt**. For eksempel er det todimensjonale vektorrommet $\mathbb{R}^2$ mengden av alle lineærkombinasjoner på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektormengden

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

kalles **standardbasisen**, mens vektormengden

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^2$ som ikke har noe spesielt navn. Det finnes alltid mange basiser, og det går an å vise at to basiser for ett og samme vektorrom må ha like mange elementer.

1 Hvordan ser vi at vektormengdene over er basiser for $\mathbb{R}^2$? Er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

en basis for $\mathbb{R}^2$?

Det femdimensjonale $\mathbb{R}^5$ er mengden av alle lineærkombinasjoner på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Finn en annen basis for $\mathbb{R}^5$.

Det er naturlig å lure på om en valgt vektormengde er en basis for et vektorrom.

3 Er kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en basis for noe? Hva med radene?

Kolonnene i matrisen i oppgave 3 er lineært avhengige, og følgelig ikke en basis for noe som helst, men alle lineærkombinasjoner av dem er fremdeles et vektorrom. Vi sier at kolonnene **spenner ut et underrom** av $\mathbb{R}^4$. Et underrom av et vektorrom er en delmengde som i seg selv er et vektorrom, se ukens nøtter.

4 Kolonnene i matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

spenner også ut et underrom av $\mathbb{R}^4$. Hvor mange dimensjoner har dette underrommet?

Det er for øvrig slik at antallet lineært uavhengige rader og kolonner i en matrise alltid er det samme. Dette tallet kalles matrisens **rang**.³

5 Dobbeltsjekk at antall lineært uavhengige rader og kolonner er det samme for

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hva er rangen? Finn rangen til alle matriser i økt 1-5 og 1-6.

Dersom en matrise A har dimensjon $m \times n$ og rang r , er **kolonnerommet** det r -dimensjonale underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnene til A , altså alle vektorer på formen

$$A\mathbf{x}$$

der $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. **Nullrommet** er alle løsninger av

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og dette er et $n - r$ -dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^n$.

6 Finn basiser for kolonnerommet og nullrommet til matrisene i oppgave 4 og 5.

Alle egenvektorer til en egenverdi λ er ikke et vektorrom, for et vektorrom må alltid inneholde nullvektoren, og denne klassifiserer ikke som egenvektor. Men mengden av alle egenvektorene til λ og nullvektoren er et vektorrom som kalles **egenrommet** til λ .

7 Finn egenrommene til egenverdiene til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8 Matrisen i oppgave 4 har en egenverdi som er null. Finn en basis for egenrommet til denne.

³[https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_\(linear_algebra\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Rank_(linear_algebra))

En av grunnene til at vi må kunne lineær uavhengighet og ikke bare determinanter, er at det finnes andre eksempler på vektorrom enn $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$.

- 9] Hvor mange dimensjoner har løsningsrommet til differensiallikningen

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0?$$

Skriv opp to forskjellige basiser.

- 10] Hva med rommet av alle polynomer på formen

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 ?$$

- 11] Hva med $\mathbb{C}$, er det et vektorrom?

- 12] Hvor mange dimensjoner har vektorrommet av alle lineærkombinasjoner på formen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \quad ?$$

Hva med alt på formen $c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3$?

Dersom du har en basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ for et vektorrom og

$$\mathbf{w} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

kalles $c_1, c_2, \dots, c_n$ **koordinatene** til $\mathbf{w}$. Koordinatskift er å bytte til en annen basis for det samme rommet. Du er vant til standardbasen for $\mathbb{R}^n$, og i denne er vektene i lineærkomboen de tallene som står i søylevektoren.

- 13] Finn punktet $(3, 1)$ sine koordinater i basisen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hva er standardbasiskoordinatene til punktet $(1, 1)$ i denne basisen?

- 14] To basiser for løsningene til

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

er

$$\{e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t\} \quad \text{og} \quad \{e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}\}.$$

Finn koordinatene til

$$x(t) = e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

i hver av dem.

Og så det andre vesentlige fellestrekket: *En lineæropoperator T er en funksjon som tilfredsstiller*

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

for alle vektorer x og y og alle skalarer a og b .

De enkleste modelleringsproblemene i anvendelser er som regel **lineære**. Å gange en vektor inn i en matrise er en lineæropoperator. Her er et par oppgaver som illustrerer poenget. La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og beregn:

$$\boxed{15} \quad Ax \quad \boxed{16} \quad Ay \quad \boxed{17} \quad A(x + y) \quad \boxed{18} \quad Ax + Ay \quad \boxed{19} \quad A(2x + 3y) \quad \boxed{20} \quad 2Ax + 3Ay$$

Kjært barn har mange navn, og lineæropoperator har et par synonymer, **lineærtransform**, **lineærtransformasjon** og **lineæravbildning**. Jeg har vendt meg til å si lineæropoperator fordi det er det de fleste ikkematematikere sier. Du har brukt lineæropoperatorer i mange år - derivasjonsoperatoren er for eksempel lineær. La

$$D(x) = \dot{x} \quad \text{og} \quad y(t) = t^2 \quad \text{og} \quad z(t) = t$$

og beregn

$$\boxed{15} \quad \dot{y} \quad \boxed{16} \quad \dot{z} \quad \boxed{17} \quad \frac{d}{dt}(y + z) \quad \boxed{18} \quad \dot{y} + \dot{z} \quad \boxed{19} \quad \frac{d}{dt}(2y + 3z) \quad \boxed{20} \quad 2\dot{y} + 3\dot{z}$$

$$\boxed{21} \quad \text{Fikk du déjà vu nå? I så fall er du inne på noe.}$$

Det bestemte integralet er også en lineæropoperator. La $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(t) = \sin t$$

og $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$g(t) = \cos(t/2)$$

og finn de bestemte integralene

$$\boxed{15} \quad \int f \quad \boxed{16} \quad \int g \quad \boxed{17} \quad \int g + f \quad \boxed{18} \quad \int g + \int f \quad \boxed{19} \quad \int 2g + 3f \quad \boxed{20} \quad 2 \int g + 3 \int f$$

$$\boxed{21} \quad \text{Fikk du déjà vu nå? I så fall er du inne på noe.}$$

Lineæropoperatorer er **superposisjonsprinsippets**⁴ mest vesentlige ingrediens. Lineæropoperatorer er for superposisjonsprinsippet omtrent som kanel i en kanelbolle, humle i øl eller hele pepperkorn i fårikål. Kanelbolle er meningsløst uten kanel, men man merker kannelsmaken først når den uteblir.⁵ Superposisjonsprinsippet kan formuleres omtrent som følger:

$$\text{Dersom } L \text{ er en lineæropoperator og } Lx = f \text{ og } Ly = g, \text{ er } L(x + y) = f + g.$$

$$\boxed{22} \quad \text{Dette prinsippet har vi allerede brukt ganske mye dette semesteret. Finn ut hvor.}$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle

⁵Kanel smaker faktisk ingenting. Prøv å spise en kanelbolle eller en porsjon risengrynsgrøt mens du holder deg for nesen.

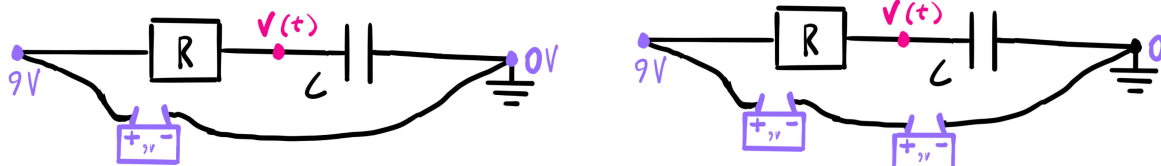
Vi sier at en differensiallikning er lineær dersom operatoren der du "putter inn løsningen" i likningen er lineær. For eksempel er $\dot{x} + \lambda x = 0$ en lineær likning siden

$$D(x) = \dot{x} + \lambda x = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) x$$

er en lineæroperator. Superposisjonsprinsippet sier at dersom

$$\dot{x} + \lambda x = f \quad \text{og} \quad \dot{y} + \lambda y = g \quad \text{og} \quad z = x + y \quad \text{er} \quad \dot{z} + \lambda z = f + g.$$

Så hva er den praktiske nytten? Her er to RC-kretser:



Differensiallikningen til den til venstre er

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{9}{RC}$$

med løsning

$$v(t) = 9(1 - e^{-t/RC})$$

gitt at $v(0) = 0$. I den til høyre er det koblet to batterier i serie, og ifølge Kirchhoff må vi løse

$$RC\dot{v}(t) + v(t) = 9 + 9 = 18.$$

23 Anta $v(0) = 0$ og løs med superposisjonsprinsippet.

Har du skjønnet at derivasjonsoperatoren er lineær, kan du også forstå hvorfor vi alltid gjetter på eksponensialfunksjonen når vi løser lineære differensiallikninger.

24 Finn egenvektorene til derivasjonsoperatoren $D(x) = \dot{x}$.

Systemet med å kombinere homogen og inhomogen løsning når vi løste differensiallikninger, går igjen i alle lineære problemer.

25 Løs

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

Hva er homogen og hva er inhomogen løsning?

Trenger du flere oppgaver, er disse relevante:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving05.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving06.pdf

Løsningsforslag finner du her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving05-lf.pdf

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/oving06-lf.pdf

Det finnes selvfølgelig aksiomer for vektorrom. De fleste av dem går med til å definere hvordan en lineærkombinasjon fungerer, og dette kan du i bunn og grunn allerede fra gymnasen. La V være en (ikke tom) mengde med vektorer som kan adderes og skalarmultipliseres og som er lukket under lineærkombinasjoner. Vi sier at mengden V er et vektorrom over $\mathbb{C}$ dersom følgende er tilfredsstillende for alle $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{C}$. Du kan også ha vektorrom over $\mathbb{R}$, eller en hvilken som helst annen kropp.

Det skal finnes en vektor, kalt 0 , slik at

$$v + 0 = v$$

Addisjonen skal være assosiativ

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

og kommutativ

$$u + v = v + u.$$

Skalarmultiplikasjonen skal være assosiativ

$$a(bv) = (ab)v$$

og distributiv både med hensyn på addisjon av skalarer

$$(a + b)v = av + bv$$

og vektorer

$$a(v + w) = av + aw.$$

Vi krever dessuten

$$1v = v$$

og

$$0v = 0.$$

En anonym mtelsys-student ble en gang i evalueringsskjema spurt om det var noe vedkommende skulle ønske vedkommende hadde lært mer om, og da uttrykte vedkommende:

“Vektor-rom. Trodde det var kjempe teit men det er faktisk ikke så dumt”

- 26 Vis at en delmengde av et vektorrom er et underrom hvis og bare hvis det er lukket under lineærkombinasjoner og inneholder nullvektoren.
- 27 Vis at to parallelle vektorer er en lineært avhengig vektormengde.
- 28 La $Ax = y$ være et lineært likningssystem. Utgjør x et vektorrom?
- 29 Spis en teskje med kanel. Det er overraskende vanskelig.
(Og ikke så bra for leveren din: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cinnamon#Toxicity>)

1 - 9 - INTEGRALET I

Denne uken leser vi kapittel 3 i Arnes bok, men noen delkapitler er litt viktigere enn andre. For eksempel antar jeg at du allerede kan

- 3.1
- 3.3
- 3.4
- 3.5
- 3.6
- 3.9
- 3.10
- 3.15



fra skolen. Noen av de andre kapitlene, slik som 3.7 og 3.8 er i samme ånden, men kanskje litt for hårete for R2, og handler om antiderivasjonsteknikker ingen av dere kommer til å bruke på jobb.

Kapittel 3.2 antar jeg derimot at de fleste ikke har brukt så mye tid på før, men dette kapitlet er mye viktigere enn alle antiderivasjonsreglene, for det du trenger for å forstå alle de fysiske modellene du skal lære de neste fem årene, er *hva integralet er*. Integralet er nemlig mye mye mer enn bare "arealet under grafen".

Derfor er det mange som synes integralet er litt knotete å lære seg. Vi skal bruke mest tid på tingene som står i kapittel 3.2 og 3.12-14, så du kan trygt lese disse kapitlene.



Integralet får en mer og mer fremtredende plass i livet etterhvert som man blir eldre. Antiderivasjon, derimot, blir mindre og mindre viktig. La oss allikevel repetere de viktigste antiderivasjonstriksene fra videregående skole - vi kommer til å bruke dem jevnt og trutt. Først noen arealklassikere som Arkimedes fant ut av allerede 250 BC. Finn arealet avgrenset av

-17 $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$.

-16 $y = x^2$, $y = 1$ og $x = 0$.

Andre klassikere er de der man bare må skrive om integranden litt. Regn ut

-15 $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4} dx$

-14 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx$

-13 Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse.

Et annet klassisk triks, er kjerneregelen. Den utledes ved å antiderivere kjerneregelen for derivasjon. Den deriverer av $-x^2$ er $-2x$, så vi gjør slik:

$$\int 3xe^{-x^2} dx = 3 \int xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden er komplisert, kan det være lurt å utføre dette trikset som variabelsubstitusjon, men dette blir en meningsløs oppskrift om man ikke skjønner at det er kjerneregelen som ligger i bunn:

$$\int 3xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int e^u du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Regn ut

-12 $\int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} dx$ **-11** $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$ **-10** $\int xe^{x^2} dx$ **-9** $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$

-8 Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

Formelen for delvis integrasjon er bare den antideriverte av produktformelen for derivasjon:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \implies \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

-7 Finn $\int_0^1 e^x \cos x dx$ med delvis integrasjon. Hvis du husker Eulers formel blir den enda lettere.

Så har vi **uegentlige integraler**. Dette er integraler der den ene integrasjonsgrensen er ∞ eller integranden blåser opp et eller annet sted i integrasjonsområdet, for eksempel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1 \quad \text{eller} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Beregn

-6 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

-5 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

-4 $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

-3 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

-2 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

-1 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Nå skal vi videre med selve integralet. Målet med vitenskap er som sagt prediksjon - under gitte forutsetninger ønsker vi å være så sikker som mulig på hva som kommer til å skje. Men av og til plages vi, selv i verdens rikeste land, av *tings iboende uforutsigbarhet*. Dette kan skyldes forskjellige ting, for eksempel manglende kunnskap om grunnleggende mekanismer, slik som for mange kjemiske reaksjoner i kroppen din, eller Heisenbergs usikkerhetsprinsipp, som sier at det ikke er mulig å kjenne en liten partikkels posisjon dersom du kjenner dens bevegelsesmengde. Eller det kan være mer mundant, slik som at hvis du skal bygge kai og har bestilt sekstoms bord, så er de nok ikke nøyaktig 152.4 mm, men kanskje alt mellom 152mm og 157mm. I slike tilfeller må vi til med **sannsynlighetsregning**.

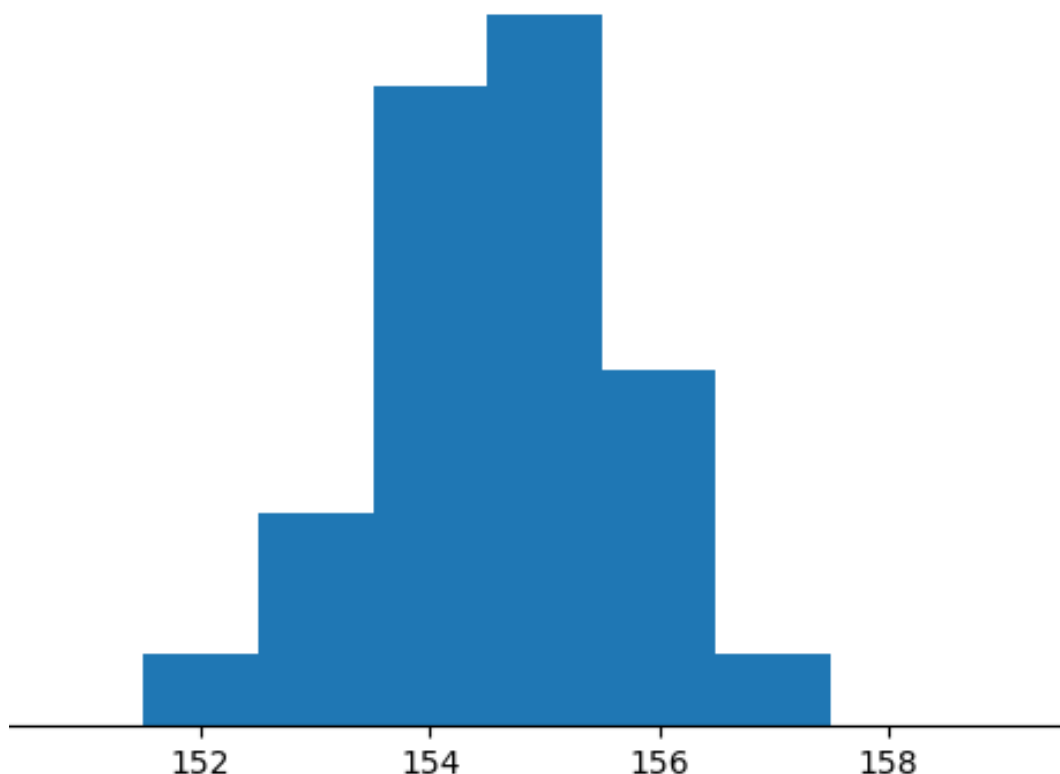


- 0 Jeg fiksa kaien til svigers i sommer, og målte den faktiske bredden (til nærmeste millimeter) på alle de tjuei sekstomsbordene som var bestilt. Gjennomsnittsbredden var $\mu = 154.6$ mm, og det empiriske standardavviket på $\sigma = 1.1$ mm.^a Plott funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

oppå histogrammet over relative frekvenser, altså antall bord av hver lengde delt på totalt antall bord.

(Du finner dataene som .csv-fil her: <https://folk.ntnu.no/mortano/python/kai.>)



1	154
2	154
3	153
4	156
5	155
6	153
7	154
8	155
9	153
10	154
11	155
12	155
13	154
14	156
15	155
16	154
17	155
18	154
19	154
20	156
21	155
22	154
23	155
24	157
25	152
26	155
27	156
28	155
29	156

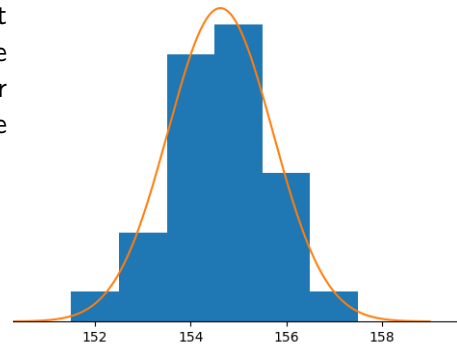
^a<https://tma4245.math.ntnu.no/deskriptiv-statistikk/>

Hvis du gjorde oppgaven over riktig, fikk du et plot som så omtrent ut som det til høyre. Kurven f kalles **normalfordelingskurven**,^a og er et eksempel på noe som kalles **sannsynlighetstetthetsfunksjon**.^b Dette kommer for fullt rett etter jul i et fag som heter TMA4245. For oss er det nok å vite at man finner sannsynligheter ved å integrere sannsynlighetstetthetsfunksjonen:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

^ahttps://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

^bhttps://en.wikipedia.org/wiki/Probability_density_function



Uttrykket $P(a < X < b)$ leses som “sannsynligheten for at du trekker noe mellom a og b ”, og du kan tenke på det som sannsynligheten for å trekke et bord med en lengde i intervallet $[a, b]$ dersom du trekker et tilfeldig bord av stabelen.

Dersom $\mu = 0$ og $\sigma = 1$, får vi **standardnormalfordelingen**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Dette er den man stort sett bruker. Vi er opptatt av den på grunn av følgende oppgave.

- 1 Prøv å finne arealet under standardnormalfordelingskurven mellom $x = 0$ og $x = 1$.



På videregående skole trener man på antiderivasjonstriks til man blir grønn i fjeset. Men du kan trene et helt liv på antiderivasjon og fremdeles komme til kort; i mange faktiske anvendelser er det umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Standardnormalfordelingen har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en enkel måte, og tilforlatelige funksjonsuttrykk kan ha så kompliserte antideriverte at kun wolframalpha får det til:

$$\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)} dx =$$

$$-\left(\left(\log(\cos(x))\left(2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i) - (1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + \right.\right.\right.$$

$$2 \operatorname{Li}_2\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(-i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) -$$

$$2 \operatorname{Li}_2\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) -$$

$$2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right) + (1+i)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\frac{x}{2}\right) + (1-i)\right)\right) +$$

$$\log^2\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) +$$

$$\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) +$$

$$4 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) \log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log(4) \log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) -$$

$$2 \log\left(1 - i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \log\left(1 + i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) -$$

$$2 \log\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) -$$

$$2 \log\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) -$$

$$2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) -$$

$$2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) -$$

$$\log(4) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) -$$

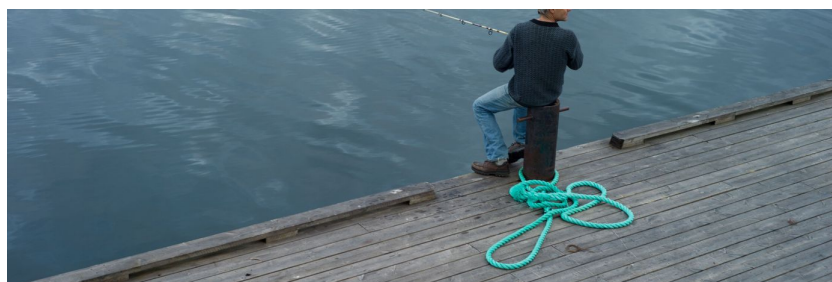
$$2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) +$$

$$\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) +$$

$$\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) /$$

$$\left(4 \left(\log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \text{constant}$$

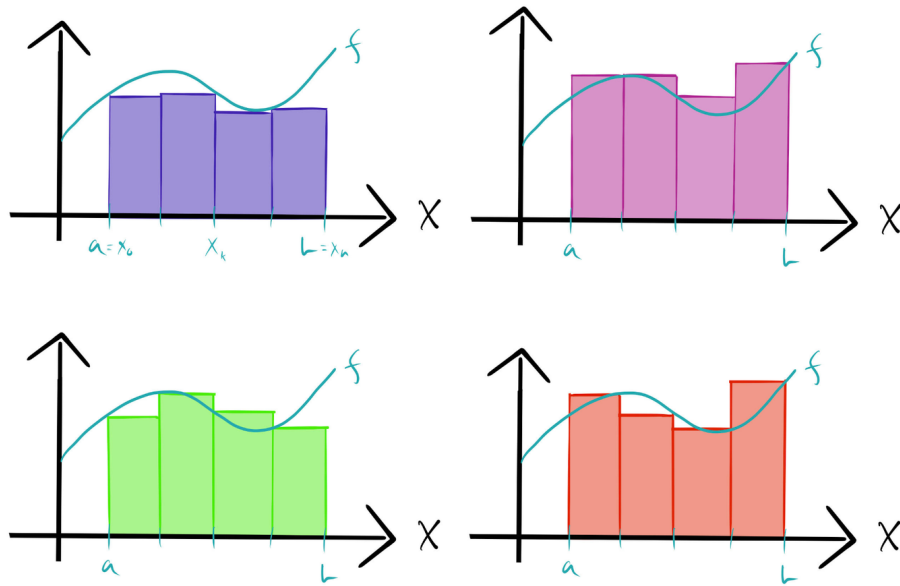
- 2 Finn ut hva en riemannsum er i Arnes bok (kapittel 3.2), og løs forrige oppgave med en slik.



En **partisjon** av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i , der $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Hvis avstanden mellom delingspunktene er den samme overalt, sier vi at partisjonen er **jevn**. Punktene er da gitt ved formelen

$$x_k = a + hk$$

der $h = \frac{b-a}{n}$ kalles **gitterfinheten**. En **riemannsum** er et histogram, der histogramhøyden er funksjonshøyden ett eller annet sted på intervallene i partisjonen. Det finnes flere typer riemannsummer, alt etter hvor på intervallene man setter histogramhøyden.¹



Hvis man skal definere integralet presist, er man mest opptatt av maksimums- og minimumsverdiene til f på hvert intervall. Er man bare ute etter arealet under grafen, er det mest praktisk med endepunktene på hvert intervall. Disse kalles henholdsvis, øvre, nedre, høyre og venstre riemannsum.

3 Hva er hva i figuren over?

Skal du forstå integralet, må du nesten forstå riemannsummer. Dette virker litt corny i begynnelsen, men i fysikk er det mange konsepter som er definert ved integraler, og for å forstå disse er det mye viktigere å forstå hva integralet er enn å ha svart belte i antiderivasjon.

4 Les litt mer om normalfordelingen, for eksempel i kapittel 5 her (gratis på gløsnettet): <https://link.springer.com/book/10.1007/1-84628-168-7> og skriv en pythonkode som tar inn a og b og returnerer $P(a < Z < b)$ ved riemannsummer. (Z istedet for X betyr at vi snakker om standardnormalfordelingen.)

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum



I denne økten har jeg ambisjon om at du skal få med deg én ting: *Arealet under kurven kan fint beregnes på andre måter enn ved antiderivasjon.* Det finnes mange viktige sannsynlighetsfordelinger som ikke kan antideriveres. Her er noen eksempler. Planckfordelingen

$$I(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}$$

forteller noe om strålingsintensiteten for hver frekvens fra et svart legeme, og Maxwell-Boltzmann-fordelingen

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

forteller noe om fordelingen av hastighetene til partikler i en gasstank (noen partikler har høy fart, mens andre har lav fart).² Når du teller forskjeller i ACGT-sekvenser på kromosomene dine trenger du noe som kalles betafordelingen.³ Sannsynlighetsfordelinger dukker opp overalt i naturen.



- 5 Hva med $(1 + x^2)^{1/3}$ da, klarer du å antiderivere den?

Det finnes mer effektive måter å beregne arealet under kurven på enn høyre og venstre riemannsum. Det finnes en femte type riemannsum som ikke står i figuren over. Den kalles **midtpunktriemannsum**, og kjennetegnes som du sikkert skjønner av at man tar funksjonsverdien på midtpunktet i hvert delintervall i partisjonen.

- 6 Lag en ny versjon av koden fra oppgave 4 der du bruker midtpunktriemannsummen istedet for høyre eller venstre riemannsum. Test alt på

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx \approx 0.3413447460685429485852$$

og prøv forskjellige gitterfinheter. Ser du noe? Kan du forklare?

Tar du gjennomsnittet av høyre og venstre riemannsum får du noe som kalles **trapesmetoden**.⁴

- 7 Tegn opp og forklar hvorfor det heter "trapesmetoden". Lag en ny versjon av koden fra oppgave 4 der du bruker trapesmetoden. Og test for forskjellige gitterfinheter. Hva ser du?

²https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution

³https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule

TMA4101/4106/4111/4121



En riemannsum er et histogram, og dersom f er integrerbar, går histogrammets totale areal mot integralet til f på $[a, b]$ når partisjonen blir finere. Integrerbarhet betyr bare at arealet under grafen er veldefinert; hvorvidt funksjonen er mulig å antiderivere, er irrelevant. Normalfordelingsfunksjonen e^{-x^2} er integrerbar selv om den ikke har noen pen antiderivert. En annen funksjon som ikke har noen pen antiderivert er sincfunksjonen. Denne er veldig viktig i signalbehandling.⁵

8 Finn en tilnærming til

$$\int_0^\pi \text{sinc}(x) dx \approx 1.85193705196$$

ved å bruke både riemannsummer og trapesmetoden.^a Sammenlikne nøyaktigheten mellom metodene når du bruker samme h .

^ahttps://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function



Hvis du sitter på en øde øy og trenger å finne arealet under en kurve til høy presisjon med penn og papir, kan du selvfølgelig bruke riemannsummer, men det finnes andre teknikker.⁶ La oss se litt mer på **interpolasjon**. Hvis du har $n + 1$ punkter (x_i, y_i) i $\mathbb{R}^2$, der $x_j \neq x_k$ for alle $j \neq k$, vil det alltid være mulig å finne et polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

hvis graf går gjennom alle disse punktene, altså at

$$p(x_k) = y_k$$

for $0 \leq k \leq n$. Disse likningene utgjør et $(n+1) \times (n+1)$ -likningssystem for koeffisientene a_k :

$$\begin{array}{cccc|c} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 & y_0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 & y_n \end{array}$$

kalt **vandermondesystemet**. La oss repetere litt fra forrige økt.

9 Finn koeffisientene til et annengradspolynom som går gjennom punktene $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 1)$.



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration

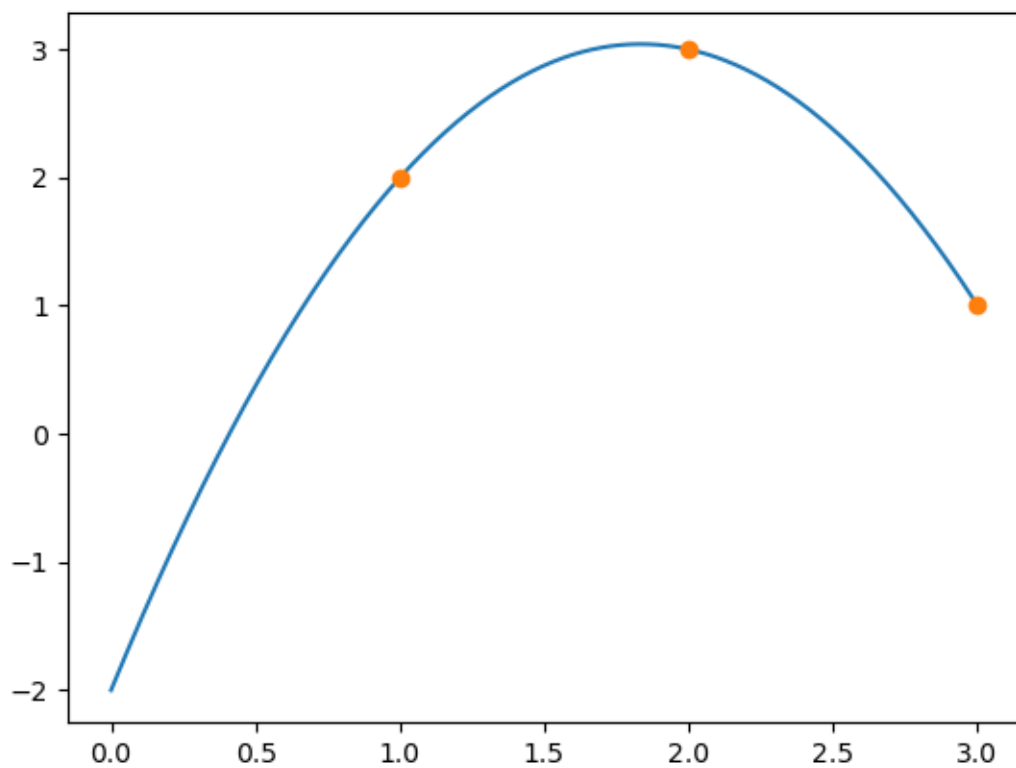
Dersom du skjønnte hvordan oppgaven over skulle løses, brukte du likningene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 1$ til å sette opp vandermondesystemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

hvis løsning gir oss polynomet

$$p(x) = \frac{1}{2}(-3x^2 + 11x - 4).$$

som ser slik ut:



Men vi slipper faktisk å plages med all denne gaussingen av vandermondesystemet, for vi kan heller gjøre som følger. For hvert punkt x_k , definerer vi et polynom

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

10 Sjekk at polynomet $l_k(x)$ har orden n , og at det tilfredsstiller

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = k \\ 0 & \text{for } m \neq k \end{cases}$$

Hvis du aksepterer oppgaven over, er det lett å se at

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

tilfredsstiller $p_n(x_k) = y_k$ for alle k . Polynomene l_k kalles **lagrangepolynomer**, og alt dette kalles **Lagranges interpolasjonsmetode**. Det er også ikke veldig vanskelig å se at det alltid finnes et entydig interpolasjonspolynom av maksimal grad n dersom $x_k \neq x_j$ for alle $k \neq j$.⁷

11 Finn et tredjegradspolynom som går gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ og $(3, 2)$.

Lagrangepolynomene kan brukes til å finne en approksimasjon til

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Vi deler $[a, b]$ i et eller annet gitter med $a = x_0$ og $b = x_n$, og skriver

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b l_k(x) dx$$

Integralene

$$w_k = \int_a^b l_k(x) dx$$

kalles **vektene** og er trivielle å beregne siden l_k er polynomer. Formelen

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

kalles en **kvadraturregel**.

12 Hvis du tar $n = 1$ i formelen over, får du en metode du allerede kan. Hvilken?



⁷Hvis vi antar at det finnes to forskjellige polynomer p_n og q_n av grad n som interpolerer den samme tabellen, og evaluerer differansen $p_n - q_n$ i punktene x_k , ser vi at

$$p_n(x_k) - q_n(x_k) = 0 \quad 0 \leq k \leq n.$$

Polynomet $p - q$ har maksimal grad n , og kan maksimalt ha n nullpunkter, så derfor må $p = q$.

For $n = 1$ får man trapesregelen

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

Det finnes mange kvadraturregler, og vi har i bunn og grunn bare en ting å variere på, nemlig gitteret. For høyere presisjon kan vi skru opp n og variere på hvordan gitterpunktene er fordelt på $[a, b]$. Når partisjonen er jevn kalles det **Newton-Cotes-kvadratur**,⁸ dersom gitteret er ekstremalpunktene til chebyshevpolynomene, får du **clenshawcurtiskvadratur**,⁹ og dersom det er nullpunktene til legendrepolynomene, får du **gausskvadratur**.¹⁰ Newton-Cotes for $n = 2$ er for eksempel en klassiker og kalles Simpsons metode:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right)$$

Dette er en veldig populær metode, spesielt på eksamen i et typisk førstesemesteremne i ingeniørmatematikk på universitet. (Jeg bryr meg ikke så mye om den; det finnes bedre metoder.)

- 13 Utled Simpsons metode ved å finne lagrangepolynomene til gitteret

$$\left\{ a, \frac{a+b}{2}, b \right\}$$

og integrere dem.

- 14 Finn en integrasjonsrutine og beregn

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

til maskinpresisjon fortest mulig. Fordelen med å gjøre det i et ordentlig språk som C++, FORTRAN eller RUST, er at for-løkker går kjapt. RUST har også innebygget funksjonalitet for parallellisering.



⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Newton-Cotes_formulas

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Clenshaw-Curtis_quadrature

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature

UKENS NØTTER

- 1 Den tekniske definisjonen på riemannintegralet er det tallet som er større enn eller lik alle nedre riemannsummer og mindre enn eller lik alle øvre riemannsummer. Dette tallet eksisterer ikke alltid. Et eksempel på en funksjon som faktisk ikke er integrerbar, er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Forklar hvorfor.

- 2 I mekanisk fysikk er de veldig opptatt av **skrått kast**. Hvis du skyter et prosjektil fra $(0,0)$ med utgangshastighet

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

er spørsmålet hvor på x -aksen det kommer til å lande. Newtons andre lov ved fravær av luftmotstand gir likningene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 &= -g \end{aligned}$$

dersom massen settes til 1. Vis at prosjektilet lander i $x_1 = 2v_1v_2/g$.

- 3 Dersom du antar lineær luftmotstand, får du likningene

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -r\dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 &= -g - r\dot{x}_2 \end{aligned}$$

Vis at prosjektilet lander i løsningen til likningen

$$0 = \left(\frac{g}{rv_1} + \frac{v_2}{v_1} \right) x - \frac{g}{r^2} \ln \left(\frac{v_1}{v_1 - rx} \right).$$

Hva vi gjør med slike håpløse likninger skal vi se i økt 1-11.

- 4 Dersom du antar prosjektilet går høyt og at luftmotstanden er proporsjonal med lufttettheten og at lufttettheten går som spådd fra modellen i oppgave 1-11, får du et likningssystem du ikke greier å løse analytisk. Utled dette. Hva vi gjør med slike håpløse difflikningssett skal vi se på i kommende uke.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1 Avgjør om integralet

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$$

konvergerer eller divergerer.

- 2 Finn et tredjeordens polynom som går gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$. Skisser polynomet og punktene.

- 3 Siv har en kuleformet vanntank med radius R . På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

1 - 10 - DIFFERENSIALLIKNINGER IV

Snøskoharen (*Lepus americanus*) er en liten nordamerikansk hareart som er kjent for sine voldsomme bestandssvingninger. Bestandssvingningene har periode på omtrent ti år, og skyldes at den formerer seg fort og at den kanadiske gaupen (*Lynx canadensis*) nesten ikke spiser noe annet enn snøskohare dersom den har tilgang på dem.¹ Dette var et av de første biologiske systemene som ble forsøkt modellert av matematikere,² og utledningen går omtrent som følger. La x_1 være harebestanden og x_2 gaupebestanden. Ved fravær av gaupe vil harene formere seg eksponensielt, slik at

$$\dot{x}_1 = ax_1$$

der $a > 0$. Dersom det finnes gaupe, spiser disse harer og dette fører til en nedgang i harebestanden. Hvis vi antar at predasjonen er proporsjonal med *både* harebestanden og gaupebestanden, og at predasjon er den eneste av harenes dødsårsaker som ikke er tatt høyde for i a , får vi

$$\dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2$$

der $b > 0$. Det første leddet på høyresiden beskriver hvordan harene formerer seg, og det andre leddet beskriver predasjonen. Økning i antall harer er differansen mellom disse to. Gaupen oppfører seg på alle måter stikk motsatt: Hvis du antar at gaupene kun spiser hare, kan du ved fravær av hare trygt anta at gaupene dør ut. Antar vi at raten er proporsjonal med bestanden, får vi

$$\dot{x}_2 = -cx_2$$

og dersom det er hare, fører dette til økning i gaupebestanden som er proporsjonal med både harebestanden og gaupebestanden:

$$\dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1x_2$$

Alt i alt får vi differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 + dx_1x_2\end{aligned}$$

der a, b, c og $d > 0$. Lotkavolterrasystemet kan ikke *løses*; det er ikke mulig å finne pene funksjoner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ som passer i likningssystemet. Men det finnes massevis av andre teknikker for å hale ut informasjon av modellen. For eksempel kan vi dele likningene på hverandre, sortere litt og integrere med hensyn på t . Hvis du gjør dette riktig, får du at en eventuell løsning må ligge på kurven

$$dx_1 + bx_2 - c \ln |x_1| - a \ln |x_2| = C$$

der C er vilkårlig konstant. Dette kalles en **invariant**.

1 Utled likningen slik som foreslått.



¹<https://www.enr.gov.nt.ca/en/services/lynx/lynx-snowshoe-hare-cycle>

²https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equations

Mengden av punkter som passer i en likning med to variable

$$x_1 + x_2 - \ln|x_1| - \ln|x_2| = C$$

kalles en **implisitt gitt kurve**.³ Det finnes en annen måte å representere slike kurver på, nemlig ved $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dette kalles en **vektorvaluert funksjon**, siden den avhengige variabelen er en vektor. Grafen til $\mathbf{x}$ kan du tenke på som trajektorien til en flue som spaserer rundt på rullegardinen; t er tidspunktet og $\mathbf{x}(t)$ er posisjonen. Å si at lotkavolterrasystemet ikke kan løses er i samme gate som å si at det ikke er mulig å finne et eksplisitt uttrykk for en vektorvaluert funksjon som gir oss punktene på kurven $x_1 + x_2 - \ln|x_1| - \ln|x_2| = C$.

- 2 Vi begynte egentlig med dette allerede i uke 38. Finn en funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ som ligger på linjen med likning $x_1 + x_2 = 1$.

Den deriverte

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h}$$

gir **tangenten** til kurven ved tiden t , og et plot $x_1(t)$ mot $x_2(t)$ kalles funksjonens **faseplott**.⁴

- 3 Hvis du fulgte med på gymnaset kjenner du allerede noen vektorvaluerte funksjoner ganske godt. Skisser $\mathbf{x} : [0, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

- 4 Hva med $\mathbf{y} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$? Finn tangenten.

- 5 Enn $\mathbf{z} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$? Hva er tangenten i $t = 0$?

- 6 Det går fint med flere komponenter enn to. Finn $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$ som gir alle korrekte balanseringer av $x_1\text{NO} + x_2\text{O}_2 \rightarrow x_3\text{NO}_2$.



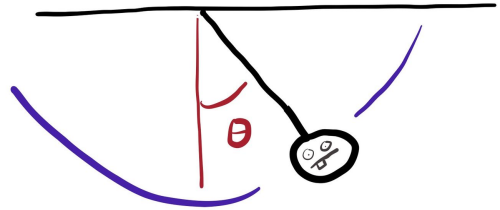
³Punktene som passer i likningen $y = f(x)$, altså grafen til f , er et spesialtilfelle.

⁴<https://www.wolframalpha.com/input/?i=random+logo+curve>

Førsteintegralet i lotkavolterrasystemet er ikke så enkelt å tolke. Nå skal vi se på en annen modell der førsteintegralet er kjent og kjært. En pendel som henger fra taket og dingler uten friksjon eller luftmotstand, tilfredsstiller

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

der θ er vinkelutslaget med loddlinjen, l er pendelens lengde og g er tyngdeakselerasjonen.



- 7 Utled likningen fra Newtons andre lov.

Førsteintegralet kan i dette tilfellet utledes ved å gange likningen med $ml^2\dot{\theta}$ og integrere:

$$m \frac{1}{2} (l\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta = C,$$

- 8 Gjør dette og tolk førsteintegralet fysisk.
(Hint: Du har lært dette i fysikktimene på gymnaset.)

Hvis du, som jeg, syntes det var litt mystisk å få slengt Newtons lover i trynet og så bare få vite at energien var konserverert uten noe mer forklaring, har du nå grunnen. Energikonservering følger av Newtons lover, og oppgave 8 er et eksempel på hvordan. Et annet eksempel er klossen og fjæren

- 9 Gjenta analysen for kloss og fjær $m\ddot{x} + kx = 0$.

Akkurat som for lotkavolterrasystemet, er det håpløst å hente ut nøyaktig hvordan $\theta(t)$ oppfører seg fra pendellikningen, men om θ er liten, oppfører pendelen faktisk seg som kloss og fjær. Dette kan vi finne ut av ved noe som heter **linearisering**. Fysikere simpelthen elsker linearisering.

- 10 Vis geometrisk at

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Av dette kan vi slutte at dersom pendelens vinkelutslag er lite, er $\theta \approx \sin \theta$, slik at vi får **den lineariserte pendellikningen**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

- 11 Denne har du løst før. Løs den igjen og sammenlikne med kloss og fjær.

Både den logistiske modellen og lotkavolterramodellen er tilnærmet ubrukelige til prediksjon. Det vi prøver å ta med oss fra dem er noen grunnleggende ideer som kan ha en viss verdi. For eksempel vil E. Coli formere seg omtrent eksponensielt så lenge det er god plass i petriskålen. Veksten avtar etterhvert som skålen blir full, og den logistiske kurven ser kvalitativt riktig ut. Det er det samme med Lotka-Volterra. Det er bare det at "det at det ser kvalitativt riktig ut" ikke er godt nok for prediksjon. For prediksjon må man som regel ha en ide om mekanismen som er presis.

- 12 Den lineariserte pendellikningen gir oss faktisk en modell som er grei nok, om vinkelutslaget er lite. I realfagsbygget finner du Norges lengste foucaultpendel.⁵ Finn ut hvor lang den er.
(Hint: Mål perioden så nøyaktig du kan, og sammenlikne med den lineariserte pendellikningens

⁵<https://www.ntnu.no/fysikk/foucault>

analytiske løsning. Institutt for fysikk har visst målt tyngdeakselerasjonen i kjelleren på realfagsbygget temmelig nøyaktig til 9.8214675 meter per sekund per sekund.)

Nå skal vi se på industristandarden for å takle uløselige differensiallikninger, nemlig **numeriske differensiallikningslødere**. La oss bruke Lotka-Volterra med $a = b = c = d = 1$ som eksempel.⁶

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy \\ \dot{y} &= -y + xy\end{aligned}$$

Jeg har prøvd å forklare ideen bak numeriske differensiallikningslødere hundrevis av ganger siden jeg var student, og det går dårligere og dårligere for hver gang jeg prøver. Men ideen er i bunn og grunn enkel: Hvis du antar at populasjonene står i punktet (x, y) , kan du *anslå størrelsen på dem litt senere* ved å bruke differensiallikningene og din forståelse av tangenten på side 2. Høyresiden av likningen forteller deg nemlig hvilken retning $(\dot{x}, \dot{y})$ løsningen er på vei. Her er en kode som regner ut numerisk løsning ved Eulers eksplisitte metode.⁷

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T=20
N=2000
h=T/N

t=np.linspace(0,T,N+1)
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=2
y[0]=2

for n in range(N):
    x[n+1]=x[n]+h*x[n]*(1-y[n])
    y[n+1]=y[n]+h*y[n]*(x[n]-1)

plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.savefig('lotkavolterra-tid.png')

plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.savefig('lotkavolterra-fase.png')
```

- 13 Finn ut hva koden gjør og hva Eulers eksplisitte metode er. (Antagelig er dette første gang du får en kode slengt i trynet med beskjed av en autoritetsperson om å finne ut hvordan den virker. Jeg vedder en månedslønn på at det ikke er siste.)



⁶Jeg bruker x og y istedet for x_1 og x_2 , for vi kommer til å trenge subindeksen til noe annet akkurat her.

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method

Eulers eksplisitte metode fungerer omtrent som følger. Man deler intervallet $[0, T]$ på t -aksen inn i små biter med lengde $h = T/N$. Delingspunktene kalles **tidssteg**, og er gitt ved

$$t_n = nh \quad 0 \leq n \leq N.$$

Mengden med disse $N + 1$ punktene kalles **gitteret**, og for hver t_n definerer vi en tilnærming:

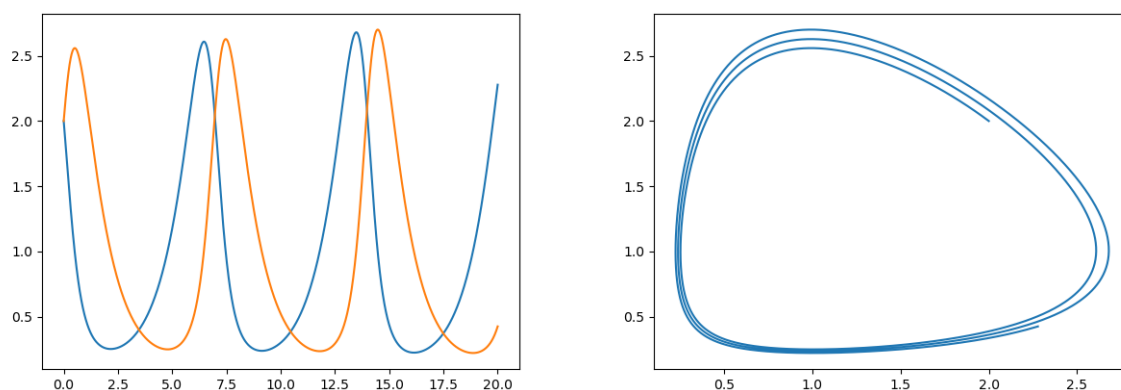
$$x_n \approx x(t_n) \quad y_n \approx y(t_n)$$

Disse beregnes rekursivt ved å ta tilnærmingen på forrige tidssteg, beregne tangenten direkte fra differensiallikningen der, og legge til h ganger denne tangenten:

$$x_{n+1} = x_n + hx_n(1 - y_n)$$

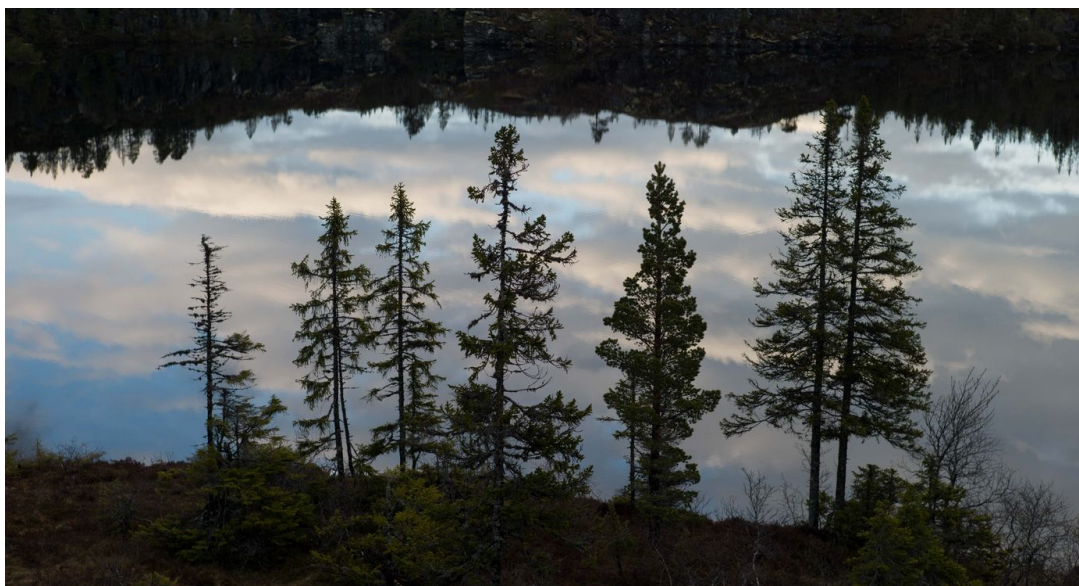
$$y_{n+1} = y_n + hy_n(x_n - 1)$$

Koden på siden over produserer disse to figurene (den til høyre kalles et **faseplott**):



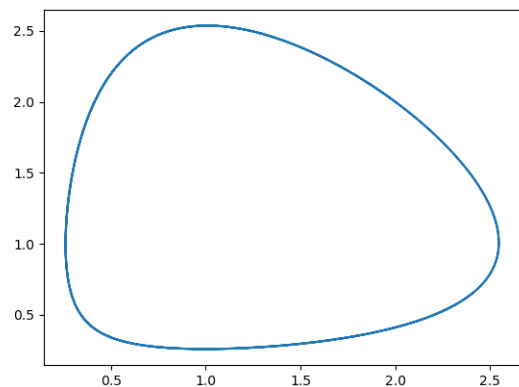
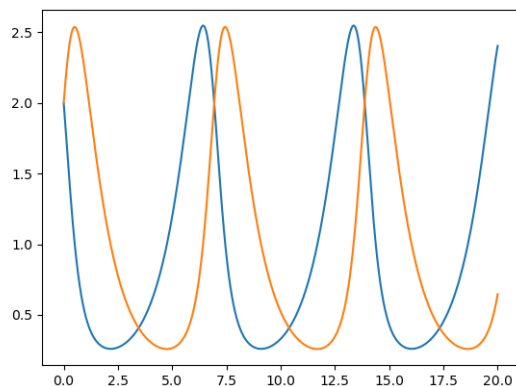
Den til venstre er x og y mot t mens den til høyre er x mot y . Disse to figurene illustrerer to veldig viktige poenger. For det første er denne løsningen ikke kvalitativt korrekt, og for det andre er dette lett å se fra den ene figuren, men ikke fra den andre.

- 14 Finn ut hva som er feil og forklar hvilken figur man ser det fra.
(Hint: Sammenlikne med kurvene gitt av $C = x + y - \ln|x| - \ln|y|$.)



Det finnes hundrevis av numeriske metoder for å løse ordinære differensiallikninger. Her er en variant som gir helt andre figurer:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hx_n(1 - y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hy_n(x_{n+1} - 1)\end{aligned}$$



- 15 Løs Lotka-Volterra med denne metoden og sammenlikne med Eulers eksplisitte metode. Legg inn en evaluering av $f(x_n, y_n) = x_n + y_n - \ln|x_n| - \ln|y_n|$ i løkken, og plott denne som funksjon av t .

Hvis du har en andreordens differensiallikning, kan den skrives om til et første ordens system, og så er det bare å kjøre de samme numeriske metodene. La oss vise med pendelen. Vi lager oss bare noen nye variable der $\dot{\theta}$ er en egen variabel. Det vanligste er å bruke $q = \theta$ og $p = \dot{\theta}$, slik at systemet blir

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\frac{g}{l} \sin q\end{aligned}$$

- 16 Den nye metoden anvendt på pendelen kalles **symplektisk Euler**. Prøv eksplisitt og symplektisk. Akkurat som for lotkavolterra, kan du evaluere den totale energien i hvert tidssteg.

En annen klassiker fra elektroteknikken er van der Pols likning:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Denne ble oppdaget av Balthasar van der Pol i forbindelse med radorør, men modellerer visst også nevronavfiring og sprekker mellom kontinentalplater.

- 17 Løs van der Pol numerisk med $\mu = 2$, og plott x mot $\dot{x}$.



Hvis man skjønner metodene for numerisk integrasjon, kan man lære seg en enkel tommelfingerregel: **For enhver numerisk integrasjonsrutine finnes det en korresponderende metode for å løse ordinære differensiallikninger.** Triksset for å skjønne dette er enkelt. La oss si vi ønsker å løse initialverdiproblemet

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = 0$$

på intervallet $[0, T]$. Vi deler tidsintervallet inn i en partisjon med $n + 1$ punkter

$$t_k = kh \quad 0 \leq k \leq n$$

der $h = T/n$, og integrerer den uløselige differensiallikningen fra et gitterpunkt til neste:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t)) dt$$

Hvis vi setter inn en enkelt rektangulær riemannboks eller trapesmetoden for integralet på høyresiden, og så setter inn approksimasjonen $x_k \approx x(t_k)$ overalt, får vi nå fire metoder på rappen:

$$\text{Eksplisitt Euler:} \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k)$$

$$\text{Implisitt Euler:} \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$$

$$\text{Midtpunktmetoden:} \quad x_{k+1} = x_k + hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

$$\text{Trapesmetoden:} \quad x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

Jeg kunne bedt deg om å fundere på hvilken som korresponderte til hvilken, men de avsløres av navnene. Hvis du setter eksplisitt eulersteg inn som approksimasjon for x_{k+1} på høyresiden i trapesmetoden, får du noe som kalles

$$\text{Heuns metode:} \quad x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}(f(x_k) + f(x_k + hf(x_k)))$$

Det samme kan gjøres med midtpunktmetoden; da får du noe som kalles den eksplisitte midtpunktmetoden. Det finnes faktisk en uendelig stor klasse av forskjellige metoder, kalt **rungekuttametoder**, som alle er variasjoner og generaliseringer av disse metodene.⁸ Bruker du Simpsons metode på integralet på høyre side og setter inn noen approksimasjoner slik som dem som gir Heuns metode fra trapesmetoden, får du den kjente RK4. Nå kan du teste disse metodene på

$$\boxed{18} \text{ Ecoliproblemet: } \dot{x} = x \quad x(0) = 1 \quad \boxed{19} \text{ Fallskjermproblemet: } \dot{v} = 1 - v^2 \quad v(0) = 0$$

og sammenlikne med analytisk løsning. Trenger du hjelp med å komme igang, finner du kode her: <https://folk.ntnu.no/mortano/fallskjerm/>

$$\boxed{20} \text{ Løs Newtons avkjølingsproblem}$$

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \quad T(0) = \frac{1}{10}$$

med Eulers eksplisitte metode og med trapesmetoden og plott begge i samme plott som den analytiske løsningen for eksempel $h = 0.1$. Kan du forklare hvorfor trapesmetoden approksimerer den analytiske løsningen mye bedre enn Eulers eksplisitte metode?

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods

Eulers implisitte metode er

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}).$$

I problemene på forrige side gikk det greit å løse rekursjonen for x_{n+1} . Newtons avkjølingslov er $\dot{T} + \alpha(T - T_K) = 0$, og i oppgave 20 var $\alpha = 1$ og $T_K = 2$. Hva om α ikke er et tall, men en funksjon av T ? Proporsjonalitetskonstanten α forteller oss noe om hvor raskt varmen strømmes mellom elgtungen og omgivelsene, og det er en rimelig antagelse at α er avhengig av elgtungens varmekapasitet. Jeg vet ikke om noen har studert varmekapasiteten til en kokt elgtunge, men om vi kjøler ned en krystall, kan vi forvente at varmekapasiteten er sterkt temperaturavhengig.⁹ Hvis vi nå gjør det enkelt, og antar at

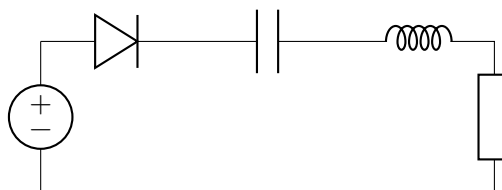
$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

(her er det en haug med fysiske konstanter som er satt til en av hensyn til din kognitive last) blir Newtons avkjølingslov

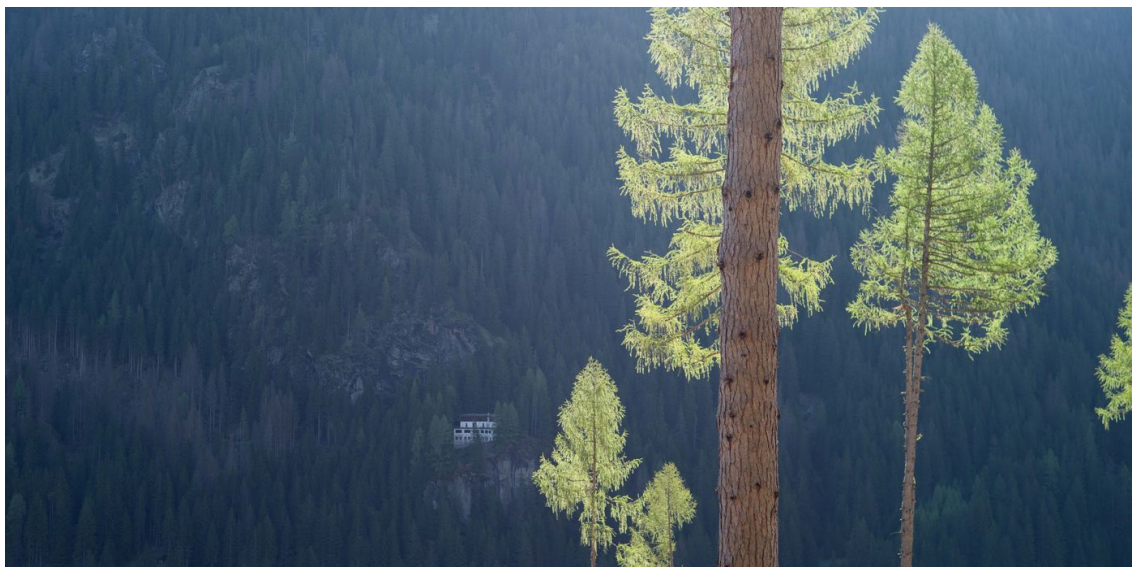
$$\dot{T} + \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2} (T - T_K) = 0 \quad T(0) = T_0.$$

21 Sett opp Eulers implisitte metode. Hvordan i alle dager skal du klare å beregne T_{k+1} ?

Hvis du vil ha en uløselig differensiallikning fra kretsteorien, er det bare å slenge på en diode. Kretsen under er en dårlig frekvensfordobler, og du får det samme problemet med implisitte metoder som for den kokte krystallen.



22 Anta at $i(0) = 1$ etter at spenningskilden er slått av, sett parametrene til et eller annet, og finn strømmen.



⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_solid

UKENS NØTTER

Det er en ting matematiske modeller trenger, og dette kravet har de til felles med andre ting, for eksempel software og orienteringskart, nemlig *korrekt balanse mellom lesbarhet og detaljnivå*. Dersom et orienteringskart har for mange detaljer, blir det umulig å lese, og har det for få, gir det ikke korrekt beskrivelse av terrenget. Software som er skrevet for ytelse heller enn lesbarhet kan fort bli uforståelig for alle andre enn det store geniet som har skrevet koden, og da kan den bli ubrukelig når det geniet dør eller skifter jobb eller glemmer hva det har gjort.

Lotkavolterra modellen er lesbar. Begge likningene i lotkavolterra har ett ledd som beskriver veksten ved fravær av den andre arten, og ett ledd som beskriver hvordan arten påvirkes av samspillet med den andre arten. Jeg introduserte den logistiske modellen ved å si at du tok modellen for eksponensiell vekst, og byttet ut proporsjonalitetsfaktoren med en monotont synkende funksjon som har et nullpunkt i bærekapasiteten, men du kan også skrive den slik:

$$\dot{x} = a(x - x^2/k)$$

Hvis du har skjønnet lotkavolterra skjønner du kanskje at det kvadratiske leddet kan representere kannibalisme.¹⁰ Når man først har vendt seg til tanken at endring i en størrelse kan være proporsjonal med produktet av størrelsen med seg selv eller andre størrelser, er det en lavhengende frukt å forstå **kinetikk**, nemlig modellering av kjemisk reaksjonshastighet.

La oss si at du har en kjemisk reaksjon som tar speciene A og B og produserer C :



Produktet av konsentrasjonene $[A]$ og $[B]$ forteller noe om sannsynligheten for at disse to molekylene tilfeldigvis møter på hverandre i suppen, og massevirkningsloven¹¹ sier at dersom reaksjonen kun går den ene veien, tilfredsstiller konsentrasjonene $[A]$, $[B]$ og $[C]$ differensiallikningen

$$\frac{d}{dt} [C] = k [A] [B]$$

der k er en konstant som avhenger av sannsynligheten for at A og B faktisk kombinerer til C når de møtes.¹² Dette avhenger av temperatur og farten til molekylene og masse annet, og siden det trengs én av A og én av B for å produsere én av C , er

$$\frac{d}{dt} [A] = \frac{d}{dt} [B] = -\frac{d}{dt} [C].$$

Dersom reaksjonen kan gå begge veier, tilfredsstiller konsentrasjonene differensiallikningen

$$\frac{d}{dt} [C] = k_+ [A] [B] - k_- [C].$$

En av de mest kjente kjemiske reaksjonsdifferensiallikningene kalles Michaelis-Menten-systemet.¹³ Det er en modell for en enzymkatalysert reaksjon som visstnok skjer i levende celler:



¹⁰Kannibalisme er faktisk ikke helt uvanlig i naturen:

<https://www.youtube.com/watch?v=7wKu13wmHog>

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_mass_action

¹²Radioaktiv nedbrytning er det enkleste eksemplet: https://en.wikipedia.org/wiki/Uranium-lead_dating

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Michaelis-Menten_kinetics

Reaksjonsratene er k_1 og k_{-1} for den første reaksjonen, og k_2 for den andre. I virkeligheten går den andre reaksjonen begge veier, men man sørger visst for å ta de uinteressante produktene ut av suppen når man tester dette i lab, så ikke alt skal bli så komplisert. På skolen lærte du at en katalysator er noe som påvirker en kjemisk reaksjon uten å bli brukt opp. Dette forvirret alltid meg, men man må huske på at dette betyr at det er snakk om flere reaksjoner som skjer samtidig, og at katalysatoren blir brukt i en reaksjon og produsert i en annen.

1 La $s = [S]$, $e = [E]$ og $c = [C]$, og vis at differensiallikningssystemet blir

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -k_1 s e + k_{-1} c \\ \dot{e} &= -k_1 s e + (k_{-1} + k_2) c \\ \dot{c} &= k_1 s e - (k_{-1} + k_2) c\end{aligned}$$

Vi kan forenkle litt. Summen av to av konsentrasjonene må være konstant.

2 Hvilke?
(Hint: Tenk logisk eller herje litt med likningene.)

Dersom du bruker relasjonen du fant over, bør det være mulig å koke alt ned til

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -k_1 s (e_0 - c) + k_{-1} c \\ \dot{c} &= k_1 s (e_0 - c) - (k_{-1} + k_2) c\end{aligned}$$

3 Løs numerisk.

med initialverdier $e(0) = e_0$ og $c(0) = 0$. Det er nå vanlig å anta at produksjonen av c går veldig fort unna og raskt går i likevekt, slik at $\dot{c} = 0$. I så fall blir den andre likningen en algebraisk likning.

4 Vis at i så fall er

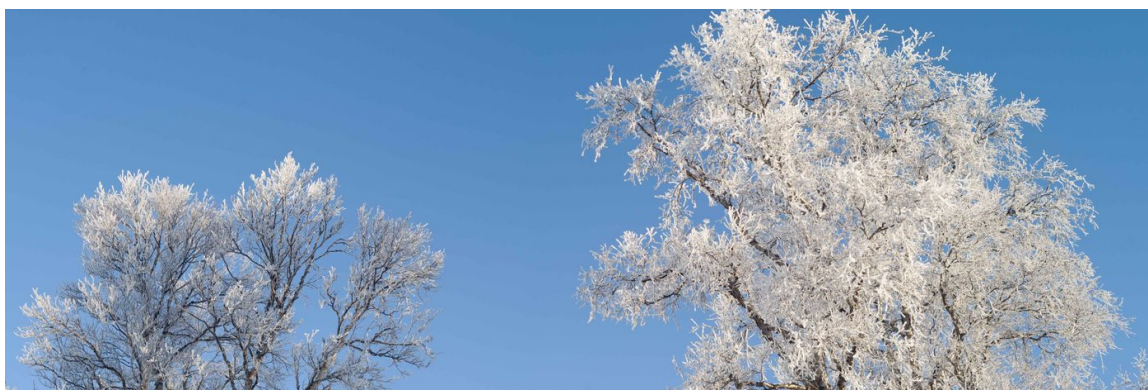
$$\dot{s} = -\frac{k_2 e_0 s}{s + K_m} \quad \text{der} \quad K_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}.$$

og løs numerisk.

Konstanten K_m kalles *michaelismentenkonstanten*. Likningen for s kan ikke løses i ordinær forstand, men du kan herje litt, integrere, og få

$$s + K_m \ln s + k_2 e_0 t = C.$$

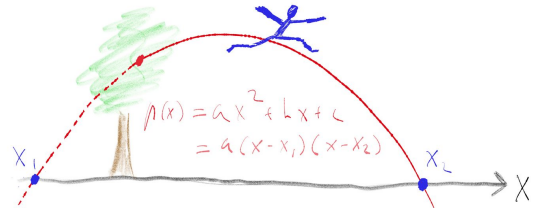
5 Ligger den numeriske løsningen fra oppgave 4 på denne kurven?



1 - 11 - LIKNINGER

Fysiske modeller formuleres stort sett som likninger. Dersom du kun påvirket av tyngden hopper ut av et tre får du et helt greit estimat for landingspunktet ved å løse en annengradslikning.

- 0 Sett opp likninger og finn landingspunktet gitt startposisjon og startfart. Tyngdeakselerasjonen på campus er $g = 9.8214675$. (Denne er målt ganske nøyaktig i kjelleren på Institutt for Fysikk.)

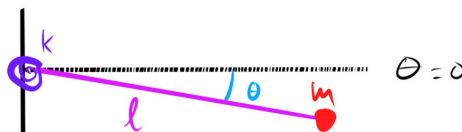


På skolen trente du mye på å løse likninger. Men denne tolv år lange løsningsstrengsleiren gir et skjevt bilde av virkeligheten; de fleste likninger som dette ut av praktiske anvendelser er umulige å løse for hånd. Under ser du et bilde av en torsjonsfjær.¹ Dette er en slik fjær du finner i musefeller og i gamle dører og den leverer et moment² som er proporsjonalt med utslagsvinkelen θ .

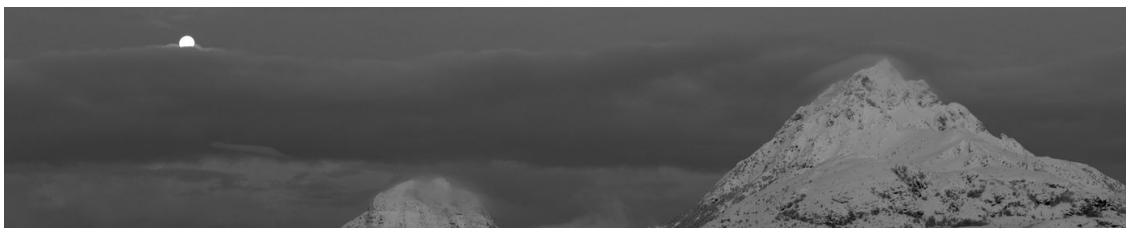


Vi fester en horisontal stang med lengde l i en vegg med en torsjonsfjær med stivhet k og legger en vekt m ytterst på stangen. Gravitasjonskraften fra vekten gir da dreiemomentet $mgl \cos \theta$. Hvis vi har lyst til å regne ut hvor langt ned vekten drar stangen, må vi finne punktet der momentet fra fjæren balanserer momentet fra vekten:

$$k\theta = mgl \cos \theta$$



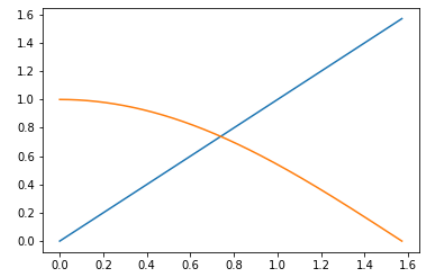
- 1 Vi setter $mgl/k = 1$ så det blir greit. Prøv å løse likningen $\theta = \cos \theta$.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_spring

²Dreiemoment er kraft ganger arm og har benevning Nm. Svigerfaren min er tannlege og i kjeften på folk skrur man til med om lag 30 Nm. Hjulbolten på en bil pleier å være 90-120 Nm, og en vanlig drill leverer 30-50. Et tikilos lodd i enden av en én meter lang vannrett latmannsarm gir 98 Nm.

Her er et plot av funksjonene $f(\theta) = \theta$ og $g(\theta) = \cos \theta$. De to funksjonene krysser hverandre, så løsningen til likningen eksisterer, men den er ikke god å finne uten en kalkulator eller en datamaskin. Løsningen kalles *dottietallet* og er oppkalt etter en professor i fransk. Professor Dottie var gift med en matematiker, og oppdaget at hvis hun skrev inn et tilfeldig tall på kalkulatoren hans og trykket gjentatte ganger på cosinusknappen, endte hun alltid opp på omtrent 0.739085.



2] Gjenta Dotties eksperiment i Python.

Før vi går videre kan vi ta et sitat av en stor matematiker:

“It is impossible to exaggerate the extent to which modern applied mathematics has been shaped and fueled by the general availability of fast computers with large memories. Their impact on mathematics, both applied and pure, is comparable to the role of the telescopes in astronomy and microscopes in biology.”

— Peter Lax, *Siam Rev.* Vol. 31 No. 4

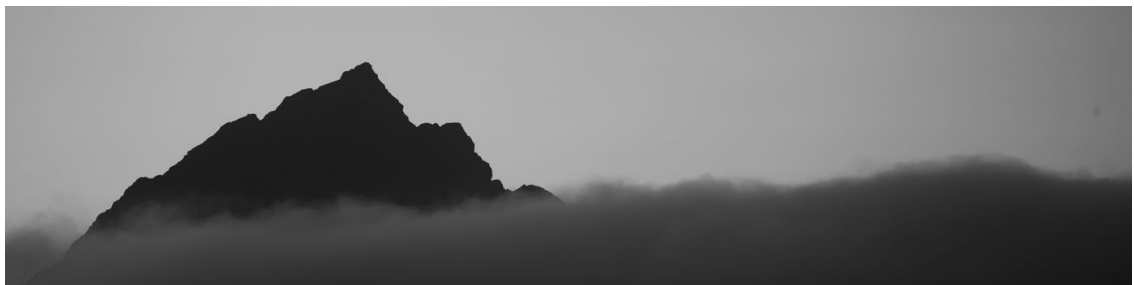
Konseptet “datamaskin som kan generere prediksjon” er ganske gammelt,³ og et helt uunværlig verktøy for å løse små og store matematiske problemer. En av de klassiske teknikkene for å løse uløselige likninger kalles **fikspunktiterasjonen**, og det var denne Professor Dottie snublet over ved å leke med cosinusknappen. Hun oppdaget at rekursjonen

$$\theta_{n+1} = \cos \theta_n$$

lager en følge som sakte men sikkert konvergerer mot $L \approx 0.739085$ uansett hvor man starter.

Fikspunktiterasjonen har vært i bruk i tusener av år,⁴ og er et eksempel på noe som kalles en **numerisk likningsløser**. Dette er noe som produserer en følge som jobber seg inn mot løsningen til en likning. Det er nyttig å kjenne til numeriske likningsløser, slik at man ikke blir stående fast bare fordi man støter på en likning som er umulig å løse med penn og papir.

3] Gjenta professor Dotties eksperiment i Python, men legg inn noe som teller hvor mange iterasjoner det tar før det stabiliserer seg på $L \approx 0.739085133215161$.



³https://en.wikipedia.org/wiki/Antikythera_mechanism

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Fixed-point_iteration

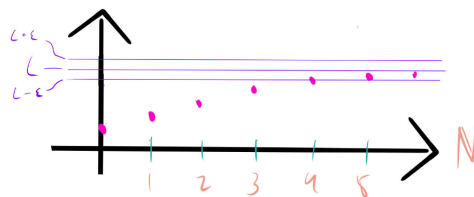
Nå er det antagelig på tide å innføre en ny type funksjon som kalles en **følge**. Dette er en funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Vanligvis er følgen gitt ved en **rekursjon**:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

og en initialverdi x_0 . Spørsmålet er nesten alltid hva følgen konvergerer til. Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er **konvergent** dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Dette er en definisjon som får mange studenter til å fryse på ryggen. Men det er dessverre den eneste måten å gjøre det på slik at alt blir presist. Tenk på L som løsningen til $x = \cos x$, og på ϵ som et vilkårlig valgt bitte lite tall. Konvergens betyr at alle ledd etter ledd nummer N ligger nærmere L enn ϵ , og at du kan finne en slik N uansett hvor liten ϵ velges.



Fikspunktiterasjonen er gitt ved rekursjonen

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

og den produserer en følge som av og til konvergerer mot en løsning av likningen

$$x = g(x).$$

Om fikspunktiterasjonen konvergerer til noe fornuftig, kommer an på g og på x_0 . Nøyaktig når den konvergerer, skal vi komme tilbake til. Nå tar vi noen flere eksempler.

4 Likningen

$$x \ln x = 1$$

kan skrives om til formen

$$x = g(x)$$

på minst to forskjellige måter. Finn de to åpenbare, og prøv fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

på begge. Hvor mange iterasjoner før du når **maskinpresisjon**, altså $\epsilon \approx 10^{-16}$?⁵



⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Double-precision_floating-point_format

Det finnes mange numeriske likningslødere. En annen klassiker er **Newtons metode**. Denne baserer seg på at likningen som skal løses er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter altså etter nullpunkter til funksjoner, og er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- 5 Løs likningen $x = \cos x$ med Newtons metode og tell antall iterasjoner slik som i oppgave 3. (Du må skrive om likningen litt.) Hva ser du?

Det første elementet x_0 i følgen kalles **initialgjetningen**. Alle numeriske likningslødere trenger en slik for å komme igang. Noen numeriske likningslødere er mer sensitive på initialgjetningen enn andre, og forskjellige numeriske likningslødere oppfører seg ganske ulikt.

- 6 Løs likningen $x = \cos x$ med både Newtons metode og fikspunktiterasjonen og eksperimenter med forskjellige initialgjetninger. Hva skjer om $x_0 = 4$ eller større?
- 7 Gjenta for $x = \ln x$.

Nå tar vi en oppgave fra den virkelige verden. Denne er visst en klassiker borte på maskin.

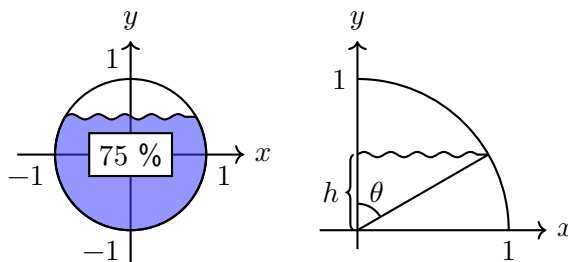
- 8 La h være vannstanden i et kloakkrør med radius 1 m, og la $h = \cos \theta$.

Når vannet fyller 75 % av rørets tverrsnitt, løser θ ligningen

$$2 \sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0.$$

Finn vannstanden h med fikspunktiterasjonen og Newtons metode.

(Figur: Marius Thaule.)



- 9 Likningen $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ har en reell og to komplekse røtter. Du kan finne disse numerisk, men du må fortelle Python at du har til hensikt å jobbe med komplekse tall og skrive initialgjetningen som f.eks. $1 + 1j$. Prøv å finne alle.

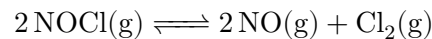


Det er lett å finne eksempler på uløselige likninger fra anvendelser. Det er jo slik at de aller fleste likninger er helt uhåndterlige med penn og papir.

- 10] Dersom man skal finne likevektsskonsentrasjoner, ender man ofte opp med å måtte løse en ikkelineær likning. For eksempel må man løse likningen

$$K_c = \frac{16x^3}{(1-4x)^2}$$

dersom man skal finne likevektsskonsentrasjonene i



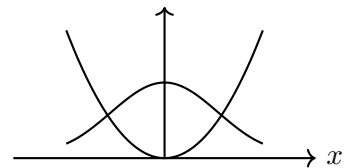
Nå er det i prinsippet mulig å regne ut løsningen av en tredjegradslikning for hånd, men det er enklere å kjøre en numerisk likningsløser. Prøv.

- 11] Når man løser partikkel-i-boks med ikke helt tette vegger,⁶ støter man gjerne på likningen

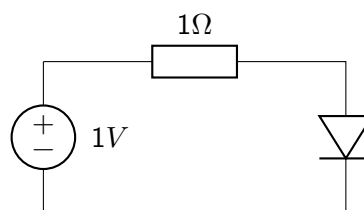
$$\tan \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x(1-x)}}{2x-1}.$$

Finn x .

- 12] Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren, støter man visst på en situasjon der man må finne skjæringspunktet mellom kurvene gitt ved $y = \exp(-ax^2)$ og $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter. Finn skjæringspunktene med en numerisk likningsløser når $a = b = 1$. Hvorfor er det kun nødvendig å beregne det ene skjæringspunktet?



- 13] Det er lett å finne frem til en krets der vi må ty til numeriske likningslødere. Dere som går elsys eller kyb har allerede koblet den opp i ADE:



Vi er mest interesserte i den matematiske oppførselen til likningen, og derfor setter vi både $\frac{q}{nkT} = 1$ og $I_0 = 1$ slik at likningen blir

$$i(v) = e^v - 1$$

for det blir så greit. Kirchhoffs spenningslov gir likningen

$$1 = i + \ln(i + 1)$$

for strømmen i kretsen. Finn strømmen.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_potential_well

Det finnes en klasse av funksjoner som er spesielt gunstige. De heter **polynom**,⁷ og er funksjoner på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Dersom $a_n \neq 0$ sier vi at polynomet har orden n . Det var Rene Descartes som introduserte denne notasjonen på 1600-tallet en gang. Fordelen med polynom er at de er enkle å analysere. Tallene $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ kalles **koeffisientene**.

Vi sier at en tallmengde er algebraisk lukket dersom alle polynom med koeffisienter fra tallmengden har et nullpunkt. Dette er ikke sant for $\mathbb{R}$, for eksempel finnes det ingen $x \in \mathbb{R}$ slik at

$$x^2 + 2x + 2 = 0,$$

men den neste tallmengden i matryosjkaen vår, $\mathbb{C}$, er derimot algebraisk lukket. Jean-Robert Argand (en amatørmatematiker!)⁸ beviste i 1806 at vi alltid kan faktorisere slik:

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i)$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Dette er altfor vanskelig å bevise for oss, men kan være artig å kjenne til fra tid til annen.

- 15 Vi vet jo at det kan være vanskelig å finne nullpunktene til et polynom, men nå vet vi ihvertfall at de finnes. Her kan numeriske likningslødere være til hjelp. Faktorer polynomet

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

- 16 Her er en oppgave som slenger ut noen spørsmål vi kan svare på mot slutten av semesteret. Polynomene

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$

og

$$q(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$$

har begge nullpunkt i $x = 1$. Prøv å finne nullpunktene med Newtons metode med startverdi $x_0 = 1/2$, og noter deg hvor mange iterasjoner som trengs for både p og q .



⁷Studenter har flere ganger foreslått at jeg bytter fornavn til Poly.

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

Her kommer en utledning av Newtons metode. Newtons metode baserer seg på at likningen er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter etter nullpunkter til funksjoner. La oss si at nullpunktet vi leter etter kalles r og at vi har en tilnærming x_0 til r , og så slår vi tangenten til f i x_0 . Punktet der tangenten skjærer x -aksen, kaller vi x_1 . Dette punktet kan vi finne ved å sette opp likningen for tangenten til f i x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

og så kreve at $y = 0$ i denne likningen:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Løser vi denne likningen for x_1 , får vi at

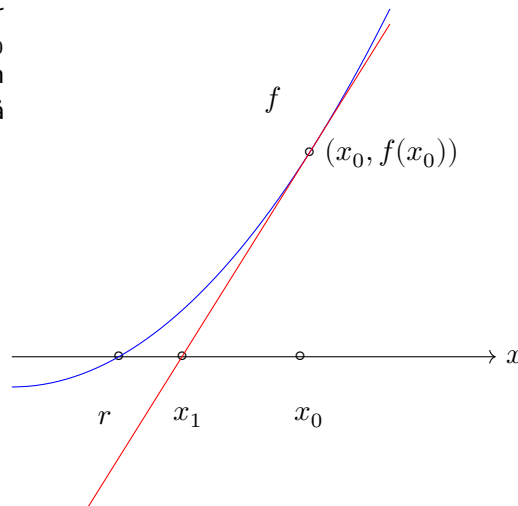
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dersom f og x_0 ser ut slik som i figuren, vil x_1 ligge nærmere nullpunktet enn x_0 , og det trengs ikke så stor fantasi for å se at x_2 vil legge seg nærmere nullpunktet enn x_1 . Newtons metode er definert som den rekursive følgen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Denne utledningen er litt for vanskelig til at du og jeg ville klart å komme på det selv som nittenåringer. Derfor lager jeg heller en oppgave som heter

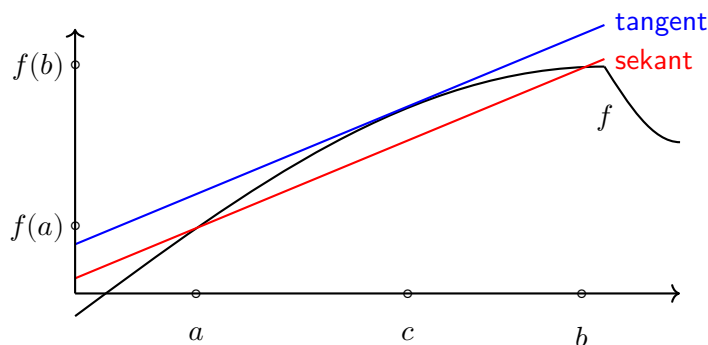
17 Denne utledningen kan du bli spurt om på eksamen og da må du kunne den.



Hvis du husker **sekantsetningen**, som sier at dersom en funksjon f er deriverbar på et intervall som inneholder a og b , finnes en c mellom a og b slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

er det mulig for deg å forstå slike ting som hvorfor fikspunktiterasjonen noen ganger konvergerer fort, noen ganger sakte, og noen ganger ikke i det hele tatt.



Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r , sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r , og vi ser nå at det kan være lurt å ha peiling på hvorvidt $|g'| \leq k < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjør. Hvis $|g'| \geq 1$ kan det være det ikke konvergerer i det hele tatt.

- 18 I oppgave 4 over, var de to åpenbare omskrivningene $x = 1/\ln x$ og $x = e^{1/x}$. Bruk din nye kunnskap til å spå på forhånd (1) hvilken av disse omskrivningene som kommer til å funke og (2) hvilke startverdier som funker for den omskrivningen som funker.

En liknende analyse av Newtons metode vil forklare hvorfor denne som regel konvergerer fort. Men denne analysen må vi vente med, for vi trenger litt mere maskineri først. Dette maskineriet kalles **Taylor's teorem** og kommer nå snart.



La oss til slutt ta noen teoretiske greier. Her er en eksamensoppgave fra i fjor.

- 19 Skriv opp definisjonen på konvergent følge og vis at

$$\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots \right\}$$

konvergerer til 1.

Studiet av alt som involverer ϵ og δ kalles **analyse**. Dette er det helligste fagfeltet innen matematikk. I analyse er det ikke så ofte at man gjør sånn som i oppgaven over og viser at en bestemt følge er konvergent, man tar heller og utleder teoremer

- 20 La $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$ være konvergente følger. Vis at følgen $\{x_n + y_n\}$ konvergerer til summen av grenseverdiene til $\{x_n\}$ og $\{y_n\}$.

og så bruker man dem:

- 21 Vis at

$$\left\{ \frac{2(n+1)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \frac{8}{3}, \dots \right\}$$

konvergerer til 2.

Oppgaven over kunne vi tatt med et annet teorem istedet:

- 22 La $\{x_n\}$ være en konvergent følge med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

og la a være et reelt tall. Vis at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ax_n = ax.$$

Konvergens av komplekse følger er identisk med definisjonen av reelle følger, du bare tolker absoluttverditegnet som kompleks absoluttverdi.

- 23 Gjelder teoremene i oppgave 20 og 22 for komplekse følger? Konvergerer denne:

$$\left\{ \frac{n+i}{in} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad ?$$



UKENS NØTTER

- 1 Utled likningen

$$2 \sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0$$

i kloakkrøppgaven over.

- 2 Følgende oppgave illustrerer Georg Cantors konstruksjon av $\mathbb{R}$, nemlig ved å lage ekvivalensklasser av cauchyfølger.⁹ Løs likningen

$$x^2 - 2 = 0$$

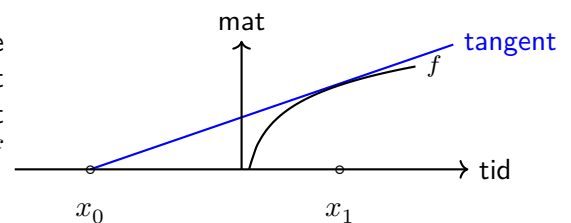
med Newtons metode, og svar på følgende to spørsmål:

- Er det sant at $x_n \in \mathbb{Q}$ for alle n dersom $x_0 \in \mathbb{Q}$?
- Dersom $\{x_n\}$ konvergerer, konvergeres det mot et rasjonalt tall?

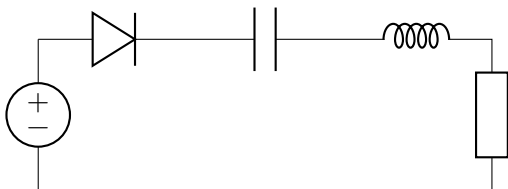
- 3 Følgende er en modell for matauk, og kalles marginalverditheoremet (marginal value theorem).¹⁰

En stjerneunger sine ved å plukke mark fra et sted i nærheten. La $x = x_0$ være tidspunktet den forlater redet, og $x = 0$ tiden den ankommer stedet der den plukker mark. Funksjonen f beskriver hvor mye mat den får med seg. Denne kurven flater ut når tiden øker, for etterhvert som stjernen fyller nebbet med mark, blir det vanskeligere og vanskeligere å fange nye mark.

Stjernen ønsker å maksimere forholdet mellom mengde hjembrakt mat og total tid borte fra redet. Tidspunktet $x = x_1$ når den setter nebbet hjemover, er tidspunktet når dette forholdet er maksimert. Vis at tangenten til f i x_1 skjærer x -aksen i x_0 .

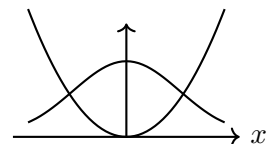


- 4 Finn strømmen:



Når man jobber med den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren:

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator støter man på en situasjon der man må finne arealet under kurven $y = e^{-ax^2}$ og utenfor $y = bx^2$, der $a > 0$ og $b > 0$ er konstanter.



- 5 Lag en funksjon som tar inn a og b , og beregner en tilnærming til arealet. (Her må du vite at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

men hvordan man ser dette må vi vente med til et senere semester.)

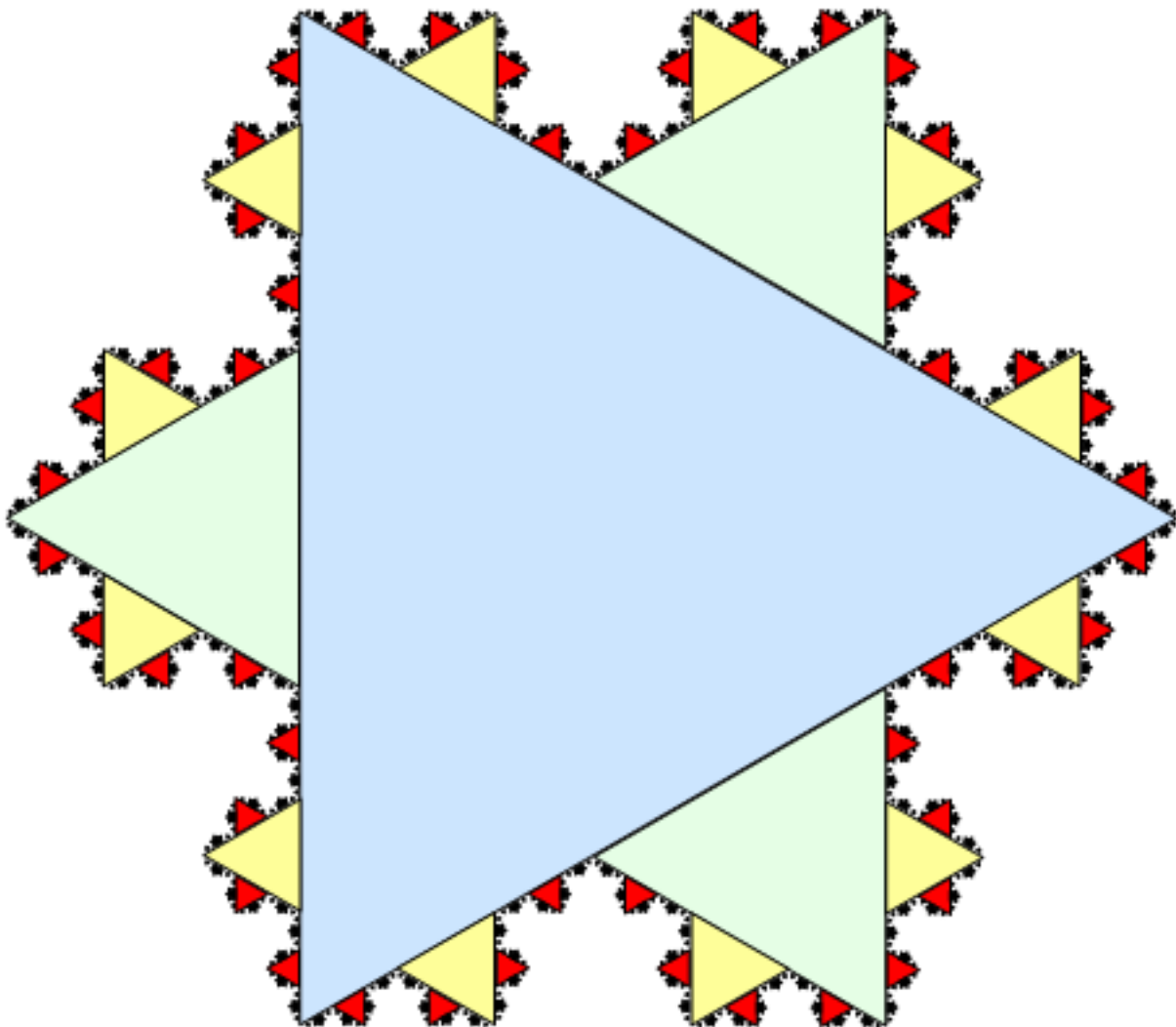
⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers

¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Marginal_value_theorem

1 - 12 - REKKER I

Lewis Fry Richardson oppdaget i 1951 at Spania og Portugal oppga forskjellige lengder på landegrensene - Portugal påsto den var 987 kilometer, mens Spania holdt på 1214 kilometer.¹ Det skyldes enkelt og greit at den målte lengden på noen kurver avhenger av lengden på tomrestokken.

Lengden kan til og med bli uendelig om kurven er rar nok. Figuren (takke til Jim Belk, hvem nå enn det er) viser begynnelsen på noe som heter kochsnøflaket. Dette er en fraktalkurve,² og var ansett som utrolig hipt på 80-tallet. Forholdet mellom sidekantene på forskjellige trekanter i Kochsnøflakets konstruksjon er alltid potenser av $1/3$, og snøflaket har uendelig omkrets men endelig areal. For å analysere disse merkelige situasjonene, må vi til med **rekker**.



¹https://en.wikipedia.org/wiki/Coastline_paradox

²https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_curve

Summetegnet

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

er et nyttig redskap. Arkimedes klarte å beregne arealet under kurven $y = x^2$ for over to tusen år siden. Han kunne nok ikke antiderivere. Man trenger bare barneskolegeometri (arealet av et rektangel) og en litt komplisert grenseverdi-prosess. La oss se litt på omtrent hva arkimedes gjorde.

Siden x^2 er monotont stigende, vil venstre og nedre riemannsum være like på alle intervaller på formen $[0, b]$. Samme for høyre og øvre riemannsum. La oss ta høyre bare for enkelhets skyld.

- 1 Vis at øvre riemannsum for en jevn partisjon med n delintervaller på $[0, b]$ blir

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

Nå trenger vi å finne et lukket uttrykk for

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

Det finnes en pen strategi for å induktivt utlede lukkede uttrykk for

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n k^3 \quad \text{osv}$$

- 2 Den første husker du kanskje fra barneskolen? Jeg husker at læreren en gang kom inn i klasserommet og ba oss legge sammen alle tallene fra 1 til 100. Hvis du ikke husker formelen, kan du utlede den fra likningen

$$n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1) = -n + 2 \sum_{k=1}^n k$$

De neste formlene kan nå utledes med det samme trikset, men det blir mer og mer regning. Ypperlig jobb for en datamaskin. Formelen for $\sum_{k=1}^n k^2$ kan for eksempel utledes fra

$$n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) - 3 \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n$$

og forrige formel for, altså den for $\sum_{k=1}^n k$.

- 3 Hvis du nå holder tungen beint i munnen og lar $n \rightarrow \infty$, klarer du kanskje å se at

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Forrige sides eskapader var der litt for å trene på summering, og litt for å repetere riemannsummer, og litt for å forberede oss på denne ukens stoff, som er litt teknisk. I anvendt matematikk og fysikk er det såpass vanlig at ting skrives som uendelige summer at det kan være smart å sette av litt tid til å studere slike.

Ingen lærebok i matematikk begynner et kapittel om rekker uten Xenos paradoks, som er rundt 2500 år gammelt. Anta at en langdistanseløper skal tilbakelegge en distanse. Han tilbakelegger første halvdel på tiden T . Den neste fjerdedelen tilbakelegger han på tiden $T/2$. Den neste åttendedelen tilbakelegger han på tiden $T/4$. Og slik fortsetter det. Xeno trodde han hadde funnet et paradoks, for han trodde at

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots = \infty$$

siden venstresiden er en sum av uendelig mange tall. Dette er ikke riktig. Dersom Xeno hadde satt seg inn i følgende utledning, hadde han skjönt at han var på villspor. På skolen har du lært om den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Det er ikke så vanskelig å se at dette er riktig dersom $|x| < 1$. **Partialsummene** er

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^N,$$

og hvis vi beregner

$$\begin{aligned} (1-x)S_N &= (1-x) \sum_{n=0}^N x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^N \\ &\quad - (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{N+1}) = 1 - x^{N+1}, \end{aligned}$$

får vi

$$S_N = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Dersom vi lar $N \rightarrow \infty$, ser vi nå at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \infty & x \geq 1 \\ \text{divergerer} & x < -1 \\ ? & x = -1 \end{cases}$$

så skal man tillegge langdistanseløperens tilbakelagte distanse noen verdi, er det naturlig å sette

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \dots = \frac{T}{1 - 1/2} = 2T.$$

4 Denne utledningen kan du bli spurt om til eksamen.

Husk at en følge z er en funksjon på $\mathbb{N}$, og at leddene i følgen skrives z_n . En **rekke** er summen av leddene i en følge

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

På kortform skriver vi $\sum z$, og uttrykket

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$$

kalles **den n -te partialsummen** til rekken. Disse danner en følge S . Grunnen til at jeg plager deg med disse tekniske begrepene er at det kan være vanskelig å vite hva som er sant og ikke sant når summene går til uendelig. La oss se litt på den geometriske rekken

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

for å illustrere problemet. Her er et klassisk triks for å finne L . Man ganger rekken med 2, og får

$$2L = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2 + L$$

som gir $L = 2$. Dette er korrekt.

5 Hva skjer om du prøver samme triks på

$$L = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots ?$$

Her er en annen gøy en. La oss kalle summen av alle naturlige tall x , og summen av alle oddetall y . Hvis vi splitter x i oddetall og partall:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots \\ &\quad + 2 + 4 + 6 + 8 + \dots \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + \dots \\ &\quad + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots) = y + 2x \end{aligned}$$

og kansellerer en x fra hver side av likningen, får vi

$$x + y = 0$$

altså at summen av alle oddetall og summen av alle naturlige tall må summere til null. Dette er åpenbart absurd.³ Så det er ikke så godt å vite hva man skal tro på alltid. Men nå skal jeg vise noen triks som hjelper oss til å holde hodet kaldt.

6 Gå tilbake til økten om likninger og repeter konvergent følge, eller les kap. 2.2 i Arnes bok.

³Men at

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

er derimot ikke absurd, om du opererer med litt andre regneregler enn det du er vant til:
https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan_summation

Hvis du ser på den geometriske rekken, ser du at for noen verdier av x , får vi et tall, mens for noen verdier får vi uendelig eller

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

som ikke er så godt å si noe fornuftig om. Vi kan nå hive all forvirring og frustrasjon på havet, og definere at en rekke er **konvergent dersom partialsummene danner en konvergent følge**. En rekke som ikke er konvergent, er **divergent**. Bildet nederst på denne siden er et klassisk eksempel på det som i dagligtale vi mener med konvergens. Brøystikkene på bildet står i virkeligheten like langt fra hverandre, men på bildet konvergerer de mot et teoretisk punkt langt borte.

4 - coup de grace Vis at den geometriske rekken er divergent for $x = -1$.

(Hint: Tegn opp et koordinatsystem med $\mathbb{N}$ på den eneaksen og partialsummene på den andre og sammenlikne med konvergensfiguren i økten om likninger, så ser du det nok.)

Å vise "ordentlig" at den geometriske rekken konvergerer til $1/(1-x)$ når $|x| < 1$ (altså med N og ϵ) er litt teknisk. Se ukens nøtter.

Geometriske rekker har du regnet ganske mye på på gymnaset, så vi skal ikke herje så mye med det. Men noen triks kan være lurt å kjenne til, og de dukker opp her og der i anvendelser.

7 Finn summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}.$$

8 Hva med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

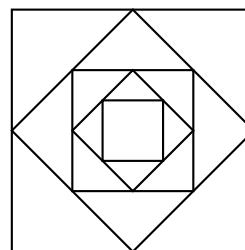
9 Enn

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}?$$

Her er en klassiker fra TMA4100:

10 En spretball slippes rett ned og spretter opp $3/4$ av høyden den ble sluppet fra. Hvor langt vil ballen bevege seg før den blir liggende stille når den slippes fra en høyde på 3 meter?

11 Figuren viser de første fem av en uendelig følge av kvadrater. Finn summen av omkretsene av alle kvadratene.

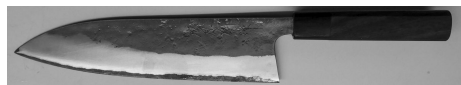


12 Vis at kochsnøflaket har uendelig omkrets men endelig areal. Hva er arealet?



Det finnes mange teknikker for å avgjøre konvergens. Den viktigste kalles **sammenlikningstesten**. La y og z være positive følger, med $y_n \leq z_n$ for alle n . Det er ikke så veldig vanskelig å vise at

Dersom $\sum y$ divergerer, divergerer $\sum z$.
Dersom $\sum z$ konvergerer, konvergerer $\sum y$.



Hvis man skal nyttiggjøre seg denne, må man kjenne til noen rekker. To hjørnesteiner er at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Den første kan utledes på flere måter. Du finner to av dem her:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(mathematics))

[H] Å vise at den harmoniske rekken divergerer kan du bli spurt om på eksamen.

Den andre kan utledes fra fourierrekken til trekantbølgen og noe som kalles Parsevals identitet. Det kommer vi tilbake til senere. Med disse to rekkene og sammenlikningstesten i verktøykassen, er det mange rekker som lett kan analyseres:

$$\boxed{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \boxed{14} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \boxed{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \boxed{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \quad \boxed{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Dersom $\sum |z|$ er konvergent, sier vi at $\sum z$ konvergerer **absolutt**, og dersom denne ikke er konvergent, men $\sum z$ er, heter det **betinget konvergens**. En grei lifehack er at dersom z er en positiv og monotont synkende følge som konvergerer mot null, er

$$\sum_n (-1)^n z_n$$

alltid konvergent. Dette kalles en alternerende rekke. For eksempel er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Hvorfor akkurat $\ln 2$ kommer vi tilbake til i neste uke. Det burde være klart at en rekke ikke kan konvergere med mindre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

[18] Nå kan du lese 6.1 og 6.2 i Arnes bok og gjøre alle oppgavene.



UKENS NØTTER

- 1 Skriv en rutine som bruker trikset i oppgave 2 for å skrive ut formelen for

$$\sum_{k=1}^n k^m = 1 + 2^m + 3^m + \dots$$

Denne kalles gjerne Faulhabers formel:

https://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s_formula

- 2 Bruk definisjonen av konvergent følge til å vise at

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

når $|x| < 1$.

Det er ellers en grei life hack at en monoton og begrenset reell følge alltid må konvergere, se kapittel 2.2 i Arnes bok. Dette nyttiggjør man seg når man skal definere riemannintegralet ordentlig. La oss se på det. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. La

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{og} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Den øvre og nedre riemannsummen til f på partisjonen P er henholdsvis:

$$U(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i \quad \text{og} \quad L(P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i$$

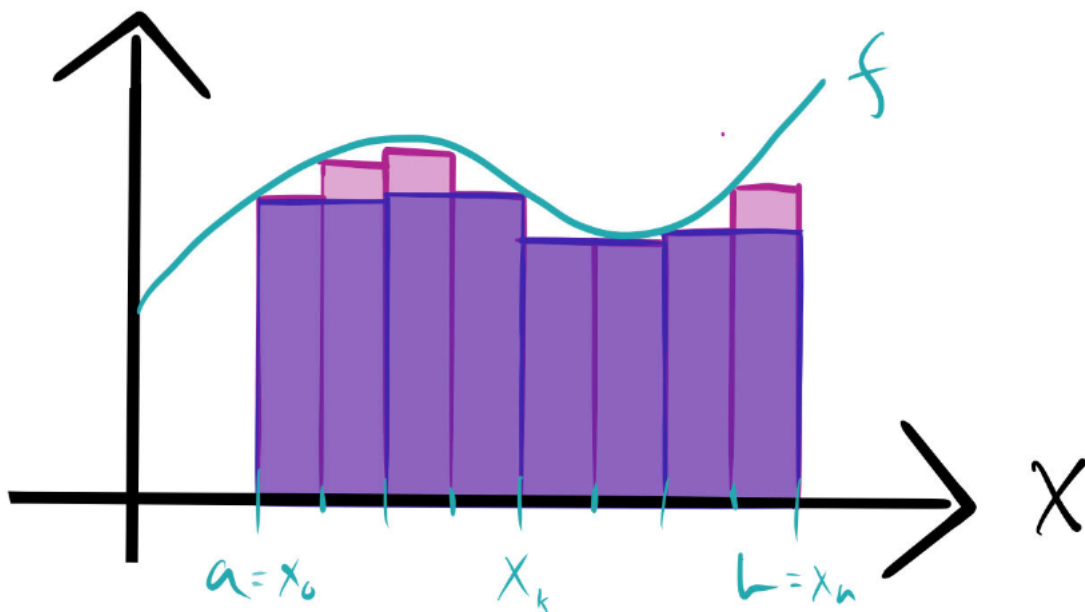
Dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a, b]$ slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at f er integrerbar.



- 3 Bruk teorem 2 i 2.2 til å vise at en kontinuerlig funksjon (se kapittel 2.3) på $[a, b]$ er integrerbar.



Det er visst mange ting i kroppen din som har begynnende fraktalstruktur. Nevroner og blodårer har visst en regel på at de deler seg i to mindre deler når de har vokst til en lengde som er så og så mange multipler av diameteren. Geometriske rekker er nyttig verktøy i analyse av slikt.

- 4 Del en kube i tjuesyv like store mindre kuber og fjern syv av dem; den i midten samt de seks midt på endeflatene. Du har nå en litt rar og delvis hul ting bestående av tjue kuber. Hvis du gjentar prosessen med disse tjue kubene og så med de resulterende fire hundre mindre kubene og så fortsetter videre i samme stilen, får du **mengersvampen**.
Vis at mengersvampen har uendelig overflateareal men ikke noe volum.
(Dette er visst ikke ulikt blodåresystemet ditt; du har omtrent hundre tusen kilometer med blodårer i kroppen din, men de fyller tre prosent av kroppens volum.)

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1 Gjør rede for at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n}$$

konvergerer dersom $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$.

- 2 Finn summen til rekken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}.$$

1 - 13 - REKKER II

Jeg har en rønne på et nes helt nord i Nordland. Neset ligger på grensen mellom Øksnes og Bø¹ og heter Revneset. ² Det er hverken vei, vann, strøm eller kai der. Alt rustet, og det er best å ikke skade seg eller gjøre noe dumt. Tre dyre kameraer har endt sine dager i fjæra på Revneset.



En påske satt jeg på Revneset og var nødt til å finne vinkelen på taket, og hadde ikke tilgang på kalkulator med de inverse trigonometriske funksjonene.

- 1 Jeg estimerte den ene kateten til 15 og den andre til 19. (Enhetene spiller ingen rolle.) Finn takvinkelen på en kalkulator uten arctanknapp.



¹Også kjent som "Norges Monaco".

²Uttales "Rævneset". Jeg prøvde lenge å si "Revneset" men fikk så hatten passet av de lokale, og måtte til slutt kripe til korset og justere uttalen.

Skal man finne en vinkel fra to kateter uten arctanknapp, er det nyttig å vite at

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Denne typen formel kalles en **potensrekkeutvikling**, og ble oppdaget av Isaac Newton. Newton måtte regne ut alt med blyant og papir, så det trengs ikke mye fantasi til for å skjønne at en slik formel kan være gull verdt på en øde øy.³

Hvor i all verden kommer denne formelen fra? Det finnes faktisk liknende formler for de fleste funksjoner du kjenner til; for eksempel er eksponensialfunksjonen gitt ved

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La oss se litt på denne. Du synes sikkert dette var rart. Rare formler trenger rare utledninger. Her er analysens fundamentalteorem på eksponensialfunksjonen, skrevet på en rar måte:

$$e^x = 1 + \int_0^x e^s ds$$

- 2] Nå tar du en delvis integrasjon på integralet på høyre side. Men ikke slik du er vant til. Du skal la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Ikke tenk, bare gjør som jeg sier. Om du gjør det riktig, skal du ende opp med likningen

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x - s)e^s ds.$$



³Etter å ha regnet ut arcustangens til 15/19 på denne måten på telefonen og blitt veldig fornøyd med meg selv, oppdaget jeg at man på Iphone 5 får tilgang på arctanknappen ved å legge telefonen over på siden.

- 3] Gjenta prosessen, men nå med $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$. Holder du tungen beint i munnen, skal du ende opp med

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 e^s ds.$$

- 4] Bruk induksjon til å fortsette prosessen, og utlede at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds.$$

Uttrykket

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

kalles det **n -te ordens taylorpolynom**et til eksponensialfunksjonen. Disse utgjør en familie av polynomer som approksimerer funksjonen.

- 5] Plott eksponensialfunksjonen og noen av taylorpolynomene i samme figur.

Jo høyere n desto bedre approksimasjon. Hvor god er den egentlig? La oss tenke at du sitter på en øde øy uten kalkulator og lur på verdien til eulertallet $e \approx 2.71828182845904523536 \dots$.

- 6] Bruk taylorpolynommet til å approksimere e . Hvor mange ledd må du ha med for å få med alle desimalene over?
(Du får lov til å bruke python.)



Formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds$$

kan generaliseres på to forskjellige måter. For det første kan f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon, og for det andre trenger ikke den nedre integrasjonsgrensen i integralet være null. **Taylor's teorem** sier at dersom f er en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x , er

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s) ds$$

Dette kan du tenke på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, og det kan utledes på samme måte vi gjorde for eksponensialfunksjonen, men jeg skal ikke plage deg med det. Symbolet $f^{(n)}$ betyr den n -te deriverte til f , mens x^n betyr den vanlige n -te potensen til x . Dette kan være litt forvirrende i starten.

- 7 Denne formelen tror jeg nesten jeg kan garantere at du får bruk for, også i andre fag. Du kan like gjerne skrive den ned et par ganger. Bruk blyant og papir.

Det siste integralleddet kalles gjerne **feilen**. Tar vi vekk denne, står vi igjen med

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Uttrykket på høyresiden kalles f sitt **taylorpolynom av orden n om punktet a** . Dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinpolynom istedet**.

- 8 Finn maclaurinpolynomene til sinusfunksjonen og cosinusfunksjonen.
(Hint: Se Arnes bok kap. 6.3.)



På forrige side skrev jeg opp Taylors teorem med feilledd på integralform, fordi det er dette som detter ut når du tar utgangspunkt i analysens fundamentalteorem og delvisintegrerer igjen og igjen. Men det finnes en alternativ form. Under de samme forutsetningene på f finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Akkurat som den første varianten kan tenkes på som en generalisering av analysens fundamentalteorem, kan denne varianten tenkes på som en generalisering av sekantsetningen.⁴ De to variantene er nesten ekvivalente; forskjellen mellom dem er formen på feilleddet. Kravet om at f er $n+1$ ganger deriverbar kan slakkes i den første versjonen, men dette er litt for teknisk til at jeg vil plage deg med det. Nå begynner det å bli mulig å forklare hvorfor Newtons metode konvergerer kjappere enn fikspunktiterasjonen.

- 9] Bruk Taylors teorem med $n = 0$ til å vise at for fikspunktiterasjonen finnes det, dersom g er deriverbar, en s slik at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

- 10] Studer konsekvensene av likningen i forrige oppgave. Ta stilling til om du synes det er en fornuftig påstand at fikspunktiterasjonen kan tenkes å konvergere dersom $|g'| < 1$. Kan det tenkes at fikspunktiterasjonen konvergerer raskt om $|g'|$ er veldig liten?

Ok, nå blir det sikkert litt forvirrende. Newtons metode er faktisk en fikspunktiterasjon;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$$

Vanlig fikspunkt har **lineær konvergens**, mens Newton har **kvadratisk konvergens**.

- 11] Bruk Taylors teorem med $n = 1$ til å vise at det (dersom $f'(r) \neq 0$) finnes en s slik at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2.$$



⁴Merk at for $n = 0$ er dette bare sekantsetningen: https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem

Nå skal vi se på hva som skjer dersom $n \rightarrow \infty$ i Taylors formler.

12 Finn maclaurinpolynomene til

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Vi må selvfølgelig kreve $x \in (-1, 1)$. Ser dette kjent ut?

En generalisering av den geometriske rekken kalles **potensrekke**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

I de fleste tilfeller du kommer til å støte på, er

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

for en eller annen kjent funksjon f . Potensrekken kalles i så fall **taylorrekke**, og dersom $a = 0$ kalles det **maclaurinrekke**. Etter alt du har fiklet med denne økten, kommer det kanskje ikke som noe sjokk at

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{og} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{og} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

I motsetning til den geometriske rekken, er disse uttrykkene faktisk gyldige for alle x . Potensrekker kan konvergere for noen verdier av x og divergere for andre, eller konvergere for alle x eller divergere for alle x . Det kommer an på koeffisientene c_n . Mengden av x slik at potensrekken konvergerer kalles **konvergensområdet**. Som regel er forholdstesten en hit her. Finn konvergensområdet til

$$\textbf{13} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \textbf{14} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \textbf{15} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad \textbf{16} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \quad \textbf{17} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(Hint: Se Arnes bok kap. 6.4 for eksempler.)

Hvis du er dreven i potensrekker, blir det banalt å regne ut en del grenseverdier. Finn

$$\textbf{18} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \textbf{19} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \quad \textbf{20} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x}$$



Du kan også stort sett integrere og derivere ledd for ledd og herje fra deg. (Arnes bok kap. 6.5.)

- 21 Uttrykk standardnormalfordelingsintegralet

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx$$

som en taylorrekke om 0, og skriv en kode som regner ut partialsummer. Sammenlikne kjøretid med trapesmetodekoden din fra i høst. Hva går kjappest for et gitt presisjonsnivå? (Hint: Søk opp "python cpu time" på nett om du ikke har gjort dette før.)

Det er for øvrig lett å finne ut hvor god approksimasjon en partialsum er når rekken er alternerende: https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_series

- 22 Hvor mange ledd må du ta med over for å approksimere integralet med en feil på under 10^{-2} ?

Ofte kan man finne ut hva en rekke konvergerer til ved å gjenkjenne at det er en taylorrekke evaluert i et eller annet punkt. (Se Arnes bok kap. 6.6.) Finn

23 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 24 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$ 25 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ 26 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 27 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Det er faktisk slik at dersom A er en kvadratisk matrise, er

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + A^2/2 + A^3/6 + \dots$$

en naturlig definisjon på e^A .

- 28 Nå vet du hvordan du skal te deg om du skriver opp løsningen til $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ som $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$.



Når du sitter og koser deg foran peisen eller er en tur hos Snåsamannen, kjenner du varmestrålingen. Dette er lavfrekvent elektromagnetisk stråling, altså elektromagnetiske bølger med bølgelengder som er for lange til å se med det blotte øye. Du kan se flammen i peisen fordi flammen stråler ut elektromagnetiske bølger i det synlige spekteret,⁵ men selve peisen ser du fordi peisens overflate reflekterer elektromagnetisk stråling som kommer fra et annet sted - strålingen fra peisen er en blanding av stråling peisen genererer selv og reflektert stråling fra overflaten. Et svart legeme⁶ er en gjenstand som absorberer all elektromagnetisk stråling som treffer den, slik at legemets elektromagnetiske utstråling ikke er tilgriset av elektromagnetiske bølger som reflekteres av overflaten. Et svart legeme stråler ut litt av alle bølgelengder, og energien er fordelt på bølgelengdene ved noe som kalles planckfordelingen. Denne er temperaturavhengig og er gitt ved

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad \text{eller} \quad I(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

der

- λ er bølgelengden
- T er temperaturen
- h er Plancks konstant
- c er lyshastigheten i vakuum
- k er Boltzmanns konstant

Lord Rayleigh hadde tidligere foreslått formelen

$$B(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

som stemmer ganske bra for lange bølgelengder, men bommer totalt for korte bølgelengder. Formelen er utledet med fundering i klassisk fysikk, og skivebommen for korte bølgelengder kalles "den ultrafiolette katastrofen". Planck kom frem til den korrekte fordelingen ved å anta at energi måtte være kvantifisert, og dette regnes som begynnelsen på kvantefysikken.

29 Rayleighs uttrykk er en approksimasjon til Plancks. Hvordan?

Integralet

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega, T) d\omega$$

forteller deg hvor mye av energien som stråles ut mellom frekvensene ω_1 og ω_2 . Setter du $x = \hbar\omega/kT$ i Planckfordelingen får du

$$\frac{k^4 T^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \frac{x^3}{e^x - 1}.$$

30 Nå er det faktisk mulig å beregne den totale utstrålingen

$$\frac{k^4 T^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

med teknikkene vi har lært denne uken.

⁵Synlig lys er omtrent 380-750nm.

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Black_body

UKENS NØTTER

- 1 Finn konvergensområdet for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

- 2 Finn taylorrekken til $f(x) = x \ln x$ om $x = 1$. For hvilke x konvergerer denne?

Vi har tidligere sett at Newtons metode stort sett konvergerer mye kjappere enn “vanlig fikspunkt”. Uttrykkene i oppgave 9 og 11 over kalles feilestimer. De forteller noe om hvordan feilen endres fra iterasjon til iterasjon. Vanlig fikspunkt har lineær konvergens, siden feilen i iterasjon $n + 1$ er proporsjonal med feilen i iterasjon n , mens Newton har kvadratisk; feilen i iterasjon $n + 1$ er proporsjonal med kvadratet av feilen i iterasjon n . Dette kan imidlertid bryte sammen.

- 3 Prøv først å finne roten $r = 1$ til

$$p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

og til

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x - 1)^2(x - 3)(x - 4)$$

med Newtons metode. Hva skjer?

UKENS LIFE HACK

På skredkurs lærer man at den minste vinkelen i en rettvinklet trekant der den ene kateten er dobbelt så lang som den andre er om lag 26.6 grader. Dette er nyttig å vite siden en slik trekant er lett å lage med skistavene, og det sjelden går skred i terreng med helning på under 30 grader.



GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1 Bruk rekkeutviklingen til sinusfunksjonen til å skrive

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

som en alternerende rekke, og finn en tilnærming til integralet ved å legge sammen de to første leddene i rekken. Gi en øvre skranke for feilen.

2 Vis at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergerer for $-1 \leq x \leq 1$. og gjør rede for at

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

i rekkens konvergensområde.

3 Gjør rede for at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

4 Gjør rede for at

$$\frac{9}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$