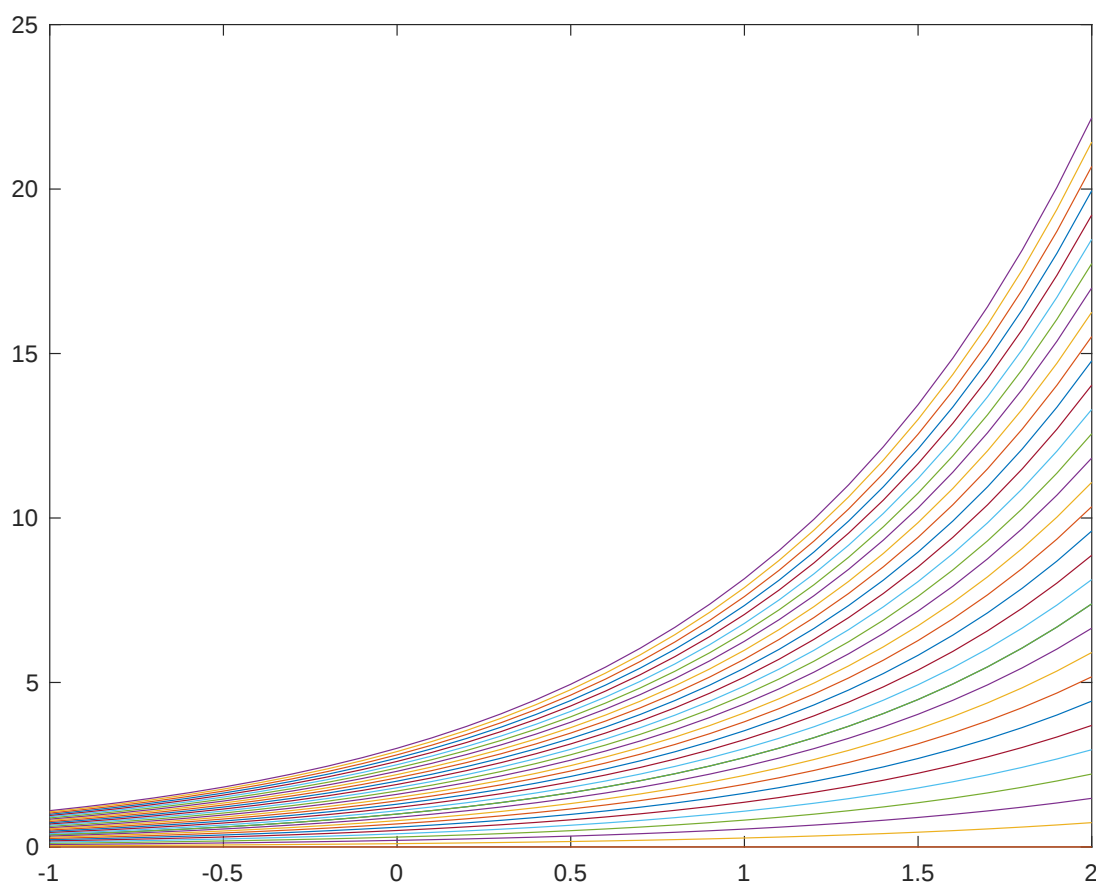


1 - 1 - DIFFERENSIALLIKNINGER I - LF

- 1 Likningen sier at funksjonen skal være sin egen derivert. Det finnes bare en slik funksjon, og det er $x(t) = e^t$. Nei, vent, det korrekte svaret er

$$x(t) = ce^t$$

der c er en vilkårlig konstant, for denne passer i likningen uansett hva c er. Vi har altså en uendelig familie av løsninger; her er plot for tredve forskjellige verdier av c :



- 4 Løsningen er

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}.$$

Dette kan du sjekke selv ved å sette inn i likningen, og det er klart at $x(0) = x_0$.

- 5-8 La oss begynne med 8. Dersom t måles i 20-minutters inkremitter, går det for eksempel 20 minutter mellom $t = 0$ og $t = 1$. På denne tiden skal antall bakterier dobles, så da må vel $\lambda = \ln 2$, slik at

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} = x_0 e^{(\ln 2)t} = x_0 2^t.$$

Å øke t med en korresponderer nå til å øke antall bakterier med en faktor to.

Dette er omtrent slik du må tenke. La oss ta oppgave 7.¹ Dersom t måles i sekunder, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått 1200 sekunder. Vi kan egentlig gjøre det enkelt og si at det skal dobles fra $t = 0$ til $t = 1200$:

$$2 = e^{1200\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/1200$. Samme med de andre. Dersom t måles i minutter, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått tjue minutter, så vi får

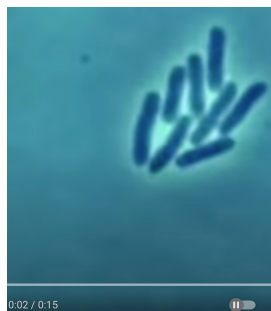
$$2 = e^{20\lambda}$$

som gir $\lambda = (\ln 2)/20$. Dersom t måles i timer, skal antall bakterier dobles hver gang det har gått en tredjedels time, så vi får

$$2 = e^{\lambda/3}$$

som gir $\lambda = 3 \ln 2 = \ln 8$.

5678 Ett sekund i denne videoen er antagelig omtrent 20 minutter i virkeligheten. Her er skjermdumper av omtrent en gang i sekundet. Tell selv:



9 Vi vet at løsningen er

$$x(t) = x_0 2^{-t/5700}.$$

Nå er det irrelevant hva x_0 er, så lenge vi finner det tidspunktet der $x(t)$ er nede i en tiendedel av x_0 , som gir likningen

$$\frac{1}{10} = 2^{-t/5700}$$

som gir

$$\text{KATTENS DØD} = t = 5700 \frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

¹SI-enheter har en viss forrang over andre enheter; en gang krasjet visst et ubemannet månelandingsfartøy fordi en gjeng med amerikanere hadde skrevet noe software der det var brukt fot og pund i stedet for meter og kilogram.

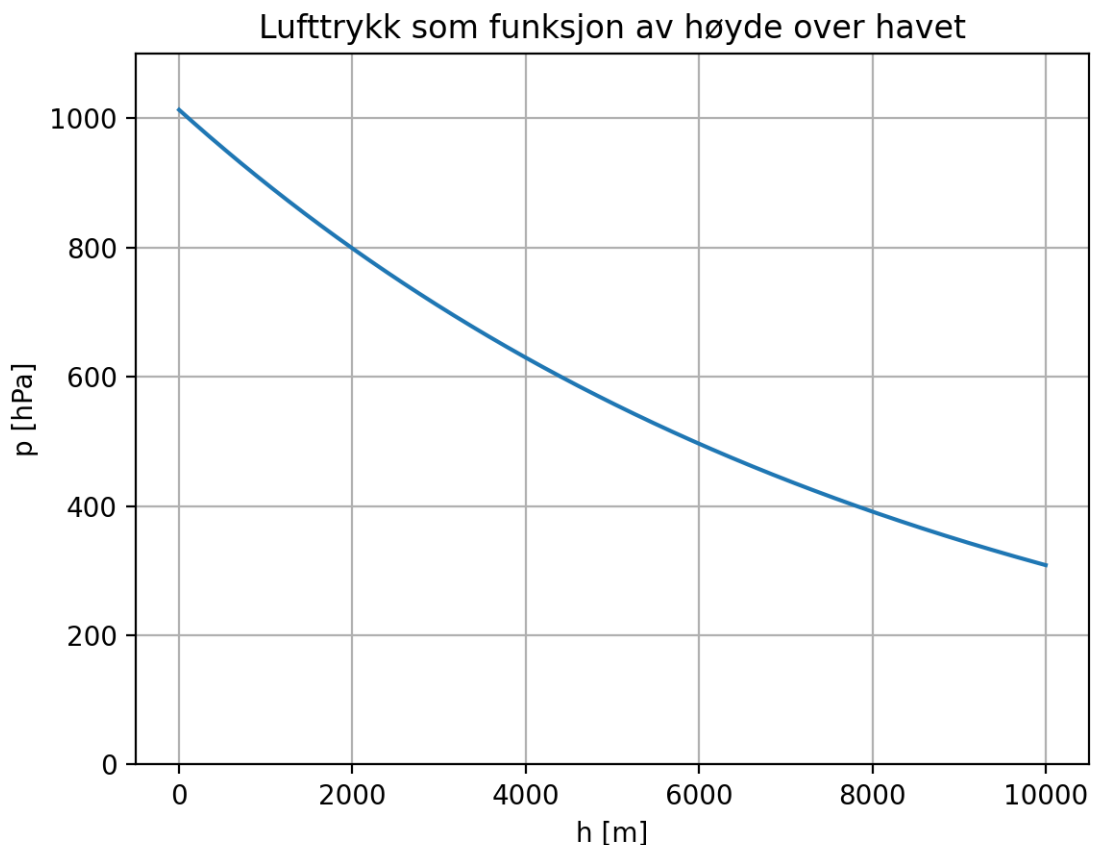
Katten døde altså for om lag 19000 år siden. Dette er omtrentlig, for C-14-konsentrasjonen var ikke den samme da som nå, og forskere krangler ennå om hva det nøyaktige C-14-innholdet i atmosfæren har vært de siste 50000 årene. C-14 dannes når nøytroner fra kosmisk stråling kræsjer med N-14-isotoper høyt oppe i troposfæren, men et par atombombesprengninger (som produserer mye C-14) og massevis av CO₂ fra fossilt brennstoff (som produserer mye C-12) har gjort alt litt komplisert.

- 11 Av og til gir selv enkle modeller korrekt prediksjon ved eksperiment. Ecolimodellen gir sånn høvelig riktig vekst i begynnelsen (den bryter sammen når det begynner å bli trangt), og kondensatormodellen (lenger ned) er også ganske bra.

Modellen i denne oppgaven er fullstendig håpløs. Studass Even har laga et plotteskript til dere, som ligger her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/python/even/>

og det produserer følgende plot:



I denne modellen må man gjøre antagelser på massen til et typisk luftmolekyl. Et "luftmolekyl" finnes jo ikke, luft består av forskjellige konsentrasjoner av forskjellige gasser og disse konsentrasjonene endres med høyden over havet. Tyngdeakselerasjonen endres med høyden over havet, og det gjør selvfølgelig temperaturen også. Med andre ord kan vi ikke forvente at denne modellen treffer særlig bra, se her:

<https://snl.no/lufttrykk>

og her:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_40.html

- 12 Her er det bare å gjøre akkurat det samme. Steg 1 er å skrive alt som inneholder x på én side

$$\beta = \dot{x}(t) - \lambda x(t)$$

gange likningen med $e^{-\lambda t}$, og så observere at

$$\beta e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(\dot{x}(t) - \lambda x(t)) = \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}x(t)).$$

La oss nå ta det ubestemt integral på hver side, og få

$$-\frac{\beta}{\lambda}e^{-\lambda t} + c = e^{-\lambda t}x(t)$$

Nå ganger vi opp med $e^{\lambda t}$ og løser for x og får

$$x(t) = ce^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}.$$

Kravet $x(0) = x_0$ gir

$$x(0) = c - \frac{\beta}{\lambda} = x_0$$

som gir $c = x_0 + \frac{\beta}{\lambda}$ og

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right)e^{\lambda t} - \frac{\beta}{\lambda}.$$

- 13 Vi skriver Newtons avkjølingslov

$$\dot{T}(t) + \alpha T(t) = \alpha T_K$$

og ser at $\lambda = -\alpha$ og $\beta = \alpha T_K$.

- 14 Vi har fått at $T_0 = 6$, $T_K = 20$ og $T(2) = 13$, dersom t måles i timer. Dette gir

$$13 = T(2) = 20 + (6 - 20)e^{-2\alpha},$$

slik at $\alpha = \frac{1}{2} \ln 2$.

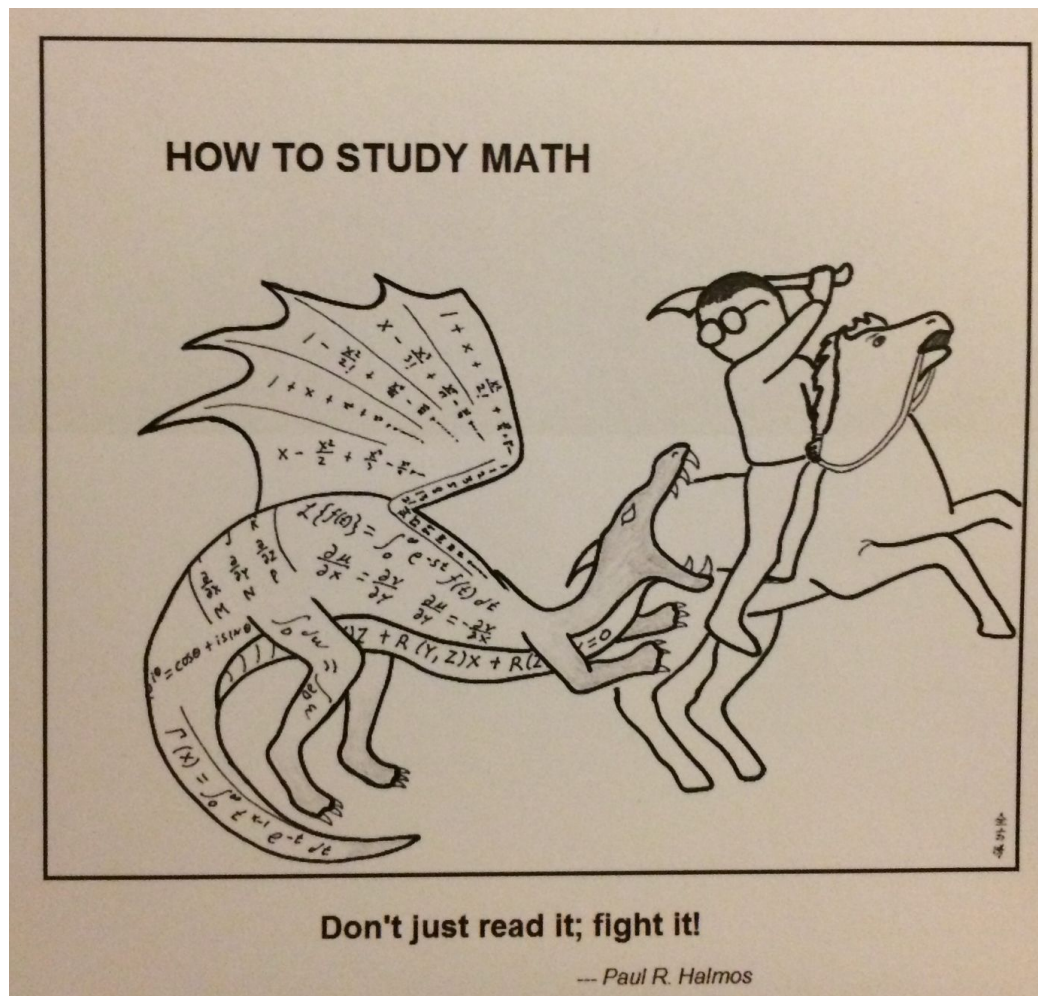
- 15 Vi har fått at $T_0 = 15$ og $T(1) = 12$. Dette gir

$$12 = T(1) = T_K + (15 - T_K)e^{-\frac{1}{2} \ln 2} = T_K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{15}{\sqrt{2}},$$

slik at $T_k = \frac{12 - \frac{15}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{12\sqrt{2} - 15}{\sqrt{2} - 1}$.

- Mer realistisk 15 Her må man nesten bruke regresjon. Dette lærer du i TMA4245 til våren:
<https://tma4245.math.ntnu.no/enkel-lineær-regresjon/>
 Inntil videre får du bare prøve og feile og plotte i python.

16



- 17 Her er det viktig å skjønne at dette er akkurat den samme likningen som Newtons avkjølingslov, det er bare det at den er skrevet ned litt annerledes. Løsningen er den samme, men de fysiske parametrene er annerledes. Dersom man er i tvil, er det tryggest å ta alt fra scratch. Likningen er

$$Li'(t) + Ri(t) = 9.$$

Dersom vi deler på L , blir den

$$i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{9}{L}.$$

og vi ser nå at det lønner seg å gange med $e^{Rt/L}$, for da kan vi bruke integrasjonstrikset, og skrive

$$\frac{d}{dt}(e^{Rt/L}i(t)) = \frac{9}{L}e^{Rt/L}.$$

slik at

$$e^{Rt/L}i(t) = \frac{9}{R}e^{Rt/L} + c$$

eller

$$i(t) = \frac{9}{R} + ce^{-Rt/L}$$

og bruker vi $i(0) = 0$, får vi

$$i(t) = \frac{9}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

fremdeles på formen $ce^{at} - b/a$, men nå heter den ukjente $i(t)$ (i er vanlig bokstav for strøm, og derfor bruker de j for den imaginære enheten i elektroteknikk), og $Ri(t)$ er på motsatt side av likningen i forhold til lenger opp. Løsningen er

$$i(t) = \frac{9}{R} + ce^{-Rt/L}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = i(0) = \frac{9}{R} + c$$

slik at løsningen blir

$$i(t) = \frac{9}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

Når t går mot uendelig går $i(t)$ mot $9/R$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{9}{R}.$$

Dette er det samme som strømmen ville vært om du erstattet spolen med en ideell leder. Dette indikerer at en spole oppfører seg som en ideell leder når det ikke er endring i strøm.

18 Dette blir identisk med oppgaven over. Løsningen er

$$v(t) = 9 + ce^{-t/RC}$$

og bruker vi initialkravet, får vi

$$0 = v(0) = 9 + c$$

slik at løsningen blir

$$v(t) = 9 (1 - e^{-t/RC}).$$

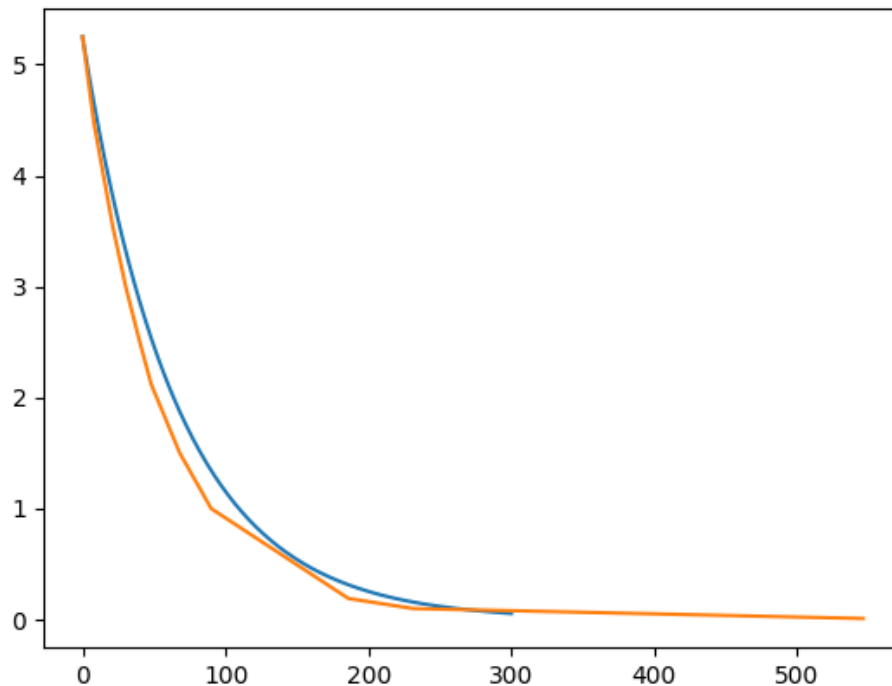
- 19 Takk til Håvard Lien Juvik og hans kamerat Kjell Senås som gjorde dette eksperimentet i forelesning. Det var en kondensator på 66 mikrofara²d og en motstand på 2.2 megaohm. En kondensator er en ting som samler opp elektrisk potensiell energi på noen metallplater. I forelesning ble den først ladet opp med et batteri, og så målte gutta krutt utladningsprosessen. (De filma multimeteret med en telefon og henta ut spenninger og tidspunkt etterpå.) Dette gir difflikningen

$$RC\dot{v} + v = 0$$

med initialkrav sånn ca $v(0) = 5.3$ volt eller noe i den dur. Løsningen er

$$v(t) = v_0 e^{-t/RC}$$

og her er plot av løsning (blå) og empiriske målinger (oransje). Denne modellen ser ut til å passe ganske bra med empiri. Det er fordi vi vet sånn cirka hvordan motstand, kondensator og strømledning fungerer.



- 22 Vi kan bruke konvolusjonsformelen, eller bare gjøre hele greia fra scratch ved å dele ut RC :

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{1}{RC}\sin(\omega_0 t)$$

gange med $e^{t/RC}$:

$$e^{t/RC} \left(\dot{v}(t) + \frac{1}{RC}v(t) \right) = \frac{1}{RC}\sin(\omega_0 t)e^{t/RC}$$

²Faktisk var det tre kondensatorer på 22 mikrofara²d satt i parallell. Dette var de største kondensatorene Lars fant på kontoret sitt rett før forelesningen.

og så bruke det vanlige trikset og skrive

$$e^{t/RC} v(t) = \frac{1}{RC} \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt$$

Integralet på høyre side er litt hårete å beregne, men ikke umulig. Jeg lærte det på gymnaset. Hvis du tar to delvisintegrasjoner:

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt &= RC \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} - RC \omega_0 \int \cos(\omega_0 t) e^{t/RC} dt \\ &= RC \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} - RC \omega_0 \left(RC \cos(\omega_0 t) e^{t/RC} + RC \omega_0 \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt \right) \\ &= RC \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} - R^2 C^2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{t/RC} - R^2 C^2 \omega_0^2 \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt \end{aligned}$$

kommer du tilbake til integralet du starta med. Så da er det bare å løse likningen for dette integralet, og få at (husk integrasjonskonstanten c)

$$\frac{1}{RC} \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt = \frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2} \left(\sin(\omega_0 t) e^{t/RC} - RC \omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{t/RC} + \frac{c}{RC} \right)$$

slik at

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC} \int \sin(\omega_0 t) e^{t/RC} dt \\ &= \frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2} \left(\sin(\omega_0 t) - RC \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{c}{RC} e^{-t/RC} \right) \end{aligned}$$

Til slutt kan vi bruke initialkravet $v(0) = v_0$ og få at

$$\frac{1}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2} \left(\frac{c}{RC} - RC \omega_0 \right) = v_0$$

som gir oss c , men folk borte på elsys bryr seg katta om initialkrav, så nå orker vi ikke mer.



1 - 2 - TALL - LF

- 0 Dersom $x(t) = e^{\lambda t}$, er $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, slik at likningen blir

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 1) = 0,$$

som impliserer at $\lambda^2 + 1 = 0$ siden eksponensialfunksjonen aldri blir null. Denne likningen har ingen reell løsning, derav resten av denne økten.

- 1 Det finnes ingen hele tall slik at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Dette kan vi bevise som følger. Anta at det finnes hele tall m og n slik at likningen over holder. Vi kan anta at m og n ikke har noen felles faktorer, for hvis de hadde hatt det, kunne vi bare forkortet brøken til de ikke lenger hadde det. Vi ganger nå hele likningen med n , og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, og da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n .

Eksemplet over illustrerer at dersom du har et kvadrat med sidekant 1, finnes det ikke noe rasjonalt tall som beskriver diagonalens lengde. Majoriteten av alle mennesker på jorden trenger matematikk først og fremst som et redskap for presis kvantifisering av verden rundt oss, så dette er rett og slett ikke bra nok. Eksemplet over har vært kjent for menneskeheten i flere tusen år. Det er lett å utvide argumentet til å vise at for eksempel $\sqrt[3]{2}$ også ikke kan skrives som en brøk. De aller fleste tall kan faktisk ikke skrives som en brøk.¹ For å sette dette i sammenheng med forrige oppgave, så kan vi like gjerne si at likningen

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

ikke har noen rasjonal løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{R}$.

- 2 Akkurat som $\lambda^2 - 2 = 0$ ikke har rasjonal løsning, har ikke

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

noen reell løsning, og derfor har vi funnet opp $\mathbb{C}$, og nå kan vi enkelt og greit si at løsningene er $\pm 2i$ siden $(2i)^2 = 2i \cdot 2i = 4 \cdot i^2 = -4$.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set

3 Løser vi likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i,$$

slik at

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

(Gang ut og sjekk at det stemmer.)

4 Vi beregner

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i \\ &= -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} \\ &= \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$

5 Vi ganger sammen komplekse tall slik:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deler dem slik:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Utleddning av formlene for addisjon og subtraksjon er trivielle.

7 Her er det bare å gange oppe og nede med $\bar{z}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

8 La oss ta for eksempel $z = 1 - 2i$. Da blir

$$\begin{aligned} iz &= 2 + i \\ i^2 z &= -z = -1 + 2i \\ i^3 z &= -iz = -2 - i. \end{aligned}$$

Vi kan egentlig fortsette litt til. Siden $i^4 = 1$, får vi

$$\begin{aligned} i^4 z &= z = 1 - 2i \\ i^5 z &= iz = 2 + i \\ i^6 z &= i^2 z = -1 + 2i \\ &\vdots \end{aligned}$$

og slik går nu dagen. For å konkludere: potenser av i repeterer seg selv slik:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ &\vdots \end{aligned}$$

og vi ser tydelig at det å gange med i er det samme som å rotere nitti grader mot klokken i det komplekse planet.

9 Vi beregner

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2,$$

slik at

$$z/|z| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Nå kunne jeg beregna alle disse på kartesisk form, men ideen med oppgaven er å være et frempek på at vi kan skrive

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pi i/3}$$

og så er det bare å se at

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k = e^{k\pi i/3},$$

og at denne repeterer seg på samme måte som i forrige oppgave, men med periode på seks istedet for fire, siden argumentet er seksti grader istedet for nitti.

10 På samme måte er det å gange med

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pi i/3}$$

det samme som å rotere seksti grader i det komplekse planet, så du får seks forskjellige verdier av $z^k w$.

11 La $z = a + bi$. Vi beregner

$$|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Gjør du det samme med z^3 vil du se at $|z^3| = |z|^3$.

12 Denne er skikkelig artig. Hvis vi tenker at vi får lov til å derivere e^{it} slik som andre eksponensialfunksjoner, er

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it},$$

og vi ser at dette er en løsning av $\dot{x} = ix$. Men

$$\frac{d}{dt}(\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t),$$

så denne passer visst også i likningen. Nå går det an å vise at dette problemet har entydig løsning dersom du spesifiserer initialkrav (her må du slå opp i en mer avansert bok, for eksempel Schaeffer og Cain), så da må det vel kanskje være slik at

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

(Her har jeg brukt initialkravet $x(0) = 1$.)

- 13 Vi antar vi kan derivere med brøkregelen som vanlig selv om det står en i her og der, og får

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{e^{i\theta}} \right) = \frac{(-\sin \theta + i \cos \theta) e^{i\theta} - i(\cos \theta + i \sin \theta) e^{i\theta}}{e^{2i\theta}} = 0$$

slik at

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{e^{i\theta}} = C$$

eller

$$\cos \theta + i \sin \theta = C e^{i\theta}.$$

Setter vi inn $\theta = 0$ på begge sider, får vi $C = 1$, slik at

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}.$$

- 14 Vi beregner

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\theta} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta + i \cos \alpha \sin \theta + i \sin \alpha \cos \theta \\ &= \cos(\alpha + \theta) + i \sin(\alpha + \theta) = e^{i(\alpha + \theta)} \end{aligned}$$

- 15 Argumentet til $z = 1 + i$ er $\pi/4$ og modulus er $\sqrt{2}$, så vi kan skrive

$$z = \sqrt{2} e^{\pi i/4}.$$

Argumentet til $w = 1 + \sqrt{3}i$ er $\pi/3$ og radius 2, så vi får

$$w = 2 e^{\pi i/3}.$$

- 16 La $z = r e^{i\theta}$ og $w = s e^{i\alpha}$. Dersom man multipliserer komplekse tall, er det bare å gange radiene og legge sammen argumentene, siden

$$z \cdot w = r e^{i\theta} \cdot s e^{i\alpha} = r s e^{i(\theta + \alpha)}.$$

For divisjon er det likeledes bare å dele radiene på hverandre og subtrahere argumentene:

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} e^{i(\theta - \alpha)}$$

- 17 Dette er bare fancy måter å skrive opp ting på:

$$\begin{aligned}e^{\pi i/2} &= i \\e^{\pi i} &= -1 \\e^{3\pi i/2} &= -i \\e^{2\pi i} &= 1\end{aligned}$$

- 18 Siden $\cos(-\theta) = \cos \theta$ og $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ er det bare å substituere $-\theta$ for θ og få

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

- 19 Legg sammen $e^{i\theta}$ og $e^{-i\theta}$.

- 20 Trekk dem fra hverandre.

- 21 Fra nå av når du har et vanskelig integral med sinus- og cosinusfunksjoner, kan du bare skrive om og integrere eksponensialfunksjoner istedet. Dette er som regel mye enklere.

- 22 Lett:

$$\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \overline{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = re^{-i\theta}$$

- 23 Her er det bare å substituere $i\theta$ for θ og så får du sinus og cosinus ut på direkten:

$$\begin{aligned}\cosh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta \\ \sinh(i\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = i \sin \theta\end{aligned}$$

Det går forresten andre veien også:

$$\begin{aligned}\cos(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} + e^{-i(i\theta)}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2} = \cosh \theta \\ \sin(i\theta) &= \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = i \sinh \theta\end{aligned}$$

For å vise at

$$\begin{aligned}\cos(a + bi) &= \cos a \cosh b - i \sin a \sinh b \\ \sin(a + bi) &= \sin a \cosh b + i \cos a \sinh b\end{aligned}$$

er det bare å bruke formlene

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

som du lærte på skolen, og substituere ib for b , og bruke likningene over.

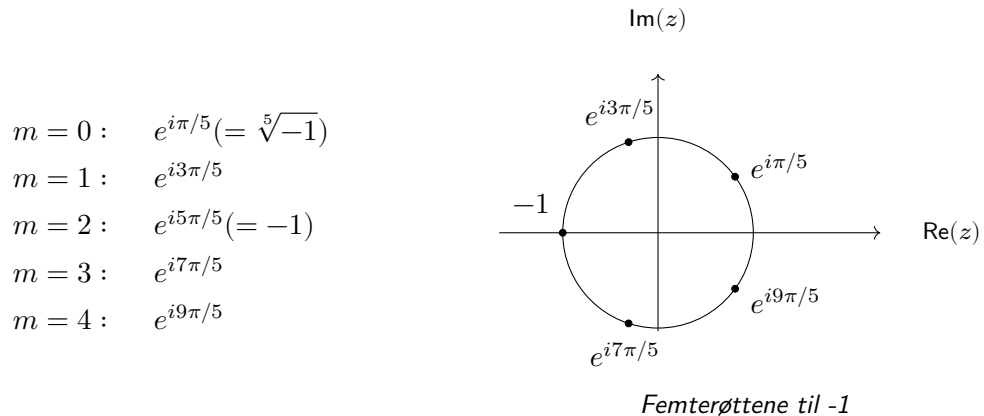
- 24 Siden

$$-1 = e^{i(\pi+2m\pi)},$$

får vi

$$(-1)^{1/5} = e^{i(\pi/5 + 2m\pi/5)}.$$

Vi skriver opp løsningene for $0 \leq m \leq 4$. Merk hvordan røttene sprer seg jevnt ut på en sirkel om origo. Om vi lar $m > 4$ eller $m < 0$, får vi røtter som allerede er listet opp.



25 Et polynom er gitt ved

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

og dersom alle a -koeffisientene er reelle, kan vi beregne

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n} \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1} \overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z}) \end{aligned}$$

Dersom vi har $p(z) = 0$, må vi også ha $p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = 0$, så dersom imaginærdelen til en rot er forskjellig fra null, må det finnes en annen rot med samme realdel og motsatt fortegn på imaginærdelen.

26 Det er ikke så lett å faktorisere et tilfeldig tredjeordens polynom med mindre man husker $abcd$ -formelen.² Det gjør ikke vi, men vi ser jo at $p(1) = 0$, så vi kan dele ut $x - 1$ og få

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Polynomdivisjonen vi alle lærte på barneskolen synes jeg er knotete. Det er mye bedre å sammenlikne ordner av x på hver side av likningen, og se at

$$\begin{array}{rcl} x^3 : & a & = 1 \\ x^2 : & -a + b & = 1 \\ x : & -b + c & = 1 \\ 1 : & c & = 3 \end{array}$$

som gir $b = 2$, slik at

$$p(x) = x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3) = (x - 1)(x + 1 + i\sqrt{2})(x + 1 - i\sqrt{2}).$$

Dette kalles et lineært likningssystem, og vi skal studere slikt skrømt grundig om et par uker.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation

27 Samme her, vi ser jo at $p(1) = 0$, så vi kan dele ut $x - 1$ og få

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

Sammenlikner vi ordner av x på hver side av likningen, får vi

$$\begin{array}{rcl} x^3 : & a & = 1 \\ x^2 : & -a + b & = 1 \\ x : & -b + c & = 0 \\ 1 : & c & = 2 \end{array}$$

som gir $b = 2$, slik at

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = (x - 1)(x + 1 + i)(x + 1 - i).$$

Det sies at Lars Onsager fikk til å utlede formelen for løsning av tredjegradslikninger på egenhånd da han var tolv år gammel. Det sies også at da de ringte ham for å fortelle ham at han hadde fått nobelpris, spurte han bare "I hva?". Han visste nemlig at han hadde gjort store nok bidrag til å få nobelprisen i både fysikk og kjemi.



1 - 3 - DIFFERENSIALLIKNINGER II - LF

- 1 Spenningen over alle kretselementene må summere til null, så om $x(t)$ er strømmen i kretsen, må

$$L\dot{x} + Rx + \frac{1}{C} \int x = 0.$$

Integrallikninger skal vi ikke lære å løse, så la oss derivere hele greia, og få

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{1}{C}x = 0.$$

Sammenlikner du med kloss-og-fjær, ser du at det er samme likning, så strømmen kommer til å oppføre seg som klossen. Induktansen L sitter på samme plass som massen m , så en stor spole med høy induktans vil gjøre samme nytten som en stor og tung kloss. Motstanden R sitter på samme plass som dempingen μ , og $1/C$ på samme plass som fjærstivheten k . Lav kapasitans gir mye spenning per ladning, så en kondensator med lav kapasitans vil oppføre seg som en stiv fjær.

- 2 Likningen blir

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0,$$

så den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

og

$$x(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \right).$$

- 3 Likningen blir

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0,$$

så den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -1$$

og

$$x(t) = e^{-t} (c_1 t + c_2).$$

Det kom en ivrig person og spurte om hvordan man utleda denne løsningen, og den går som følger. Gang differensiallikningen med e^t på begge sider

$$e^t(\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t)) = 0$$

og observer at

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)e^t) = e^t(\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t))$$

slik at

$$x(t)e^t = c_1 t + c_2$$

og

$$x(t) = e^{-t}(c_1 t + c_2).$$

Trikset fungerer generelt - det er bare å gange med $e^{a_1 t/2}$ og integrere to ganger.

4 Likningen blir

$$\ddot{x} + x = 0,$$

slik at

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

og

$$\lambda = \pm i$$

og

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

5 Likningen blir

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0,$$

så den karakteristiske likningen blir

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

slik at

$$\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

og

$$x(t) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2}$$

6 Løsningen til likningen er

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

der c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter. Initialkravet for posisjon $x(0) = 1$ gir

$$1 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 0$ blir

$$0 = \dot{x}(0) = c_2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir $c_2 = 0$. Løsningen blir

$$x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

7 Initialkravet for posisjon $x(0) = 0$ gir

$$0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = 1$ blir

$$1 = \dot{x}(0) = c_2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

8 Initialkravet for posisjon $x(0) = x_0$ gir

$$x_0 = x(0) = c_1.$$

Initialkravet for fart $\dot{x}(0) = v_0$ blir

$$v_0 = \dot{x}(0) = c_2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

som gir

$$c_2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Løsningen blir

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

9-11 Disse blir identiske med 6-8.

12 Den homogene løsningen har vi allerede regna ut:

$$x_h(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right).$$

Den partikulære finner vi ved å gjette på at

$$x_p(t) = H(\omega) e^{i\omega t}$$

og så sette denne inn i likningen for å finne $H(\omega)$. Vi gjør som foreslått, og får

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \ddot{x}_p(t) + \dot{x}_p(t) + x_p(t) \\ &= H(\omega)(i\omega)^2 e^{i\omega t} + H(\omega)(i\omega) e^{i\omega t} + H(\omega) e^{i\omega t} \\ &= H(\omega) e^{i\omega t} (-\omega^2 + i\omega + 1) \end{aligned}$$

slik at

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

og

$$x_p(t) = \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1}$$

den fulle løsningen er nå

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) + \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega + 1}. \end{aligned}$$

Dette fremstår som litt corny på de fleste første gang de ser det, men det er bare å venne seg til. Vi bruker først $x(0) = 0$, og får

$$x(0) = c_1 + \frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1} = 0,$$

slik at

$$c_1 = -\frac{1}{-\omega^2 + i\omega + 1}.$$

Likeledes finner du c_2 ved å derivere og bruke $\dot{x}(0) = 0$. Det som er verdt å merke seg til nå, er to ting:

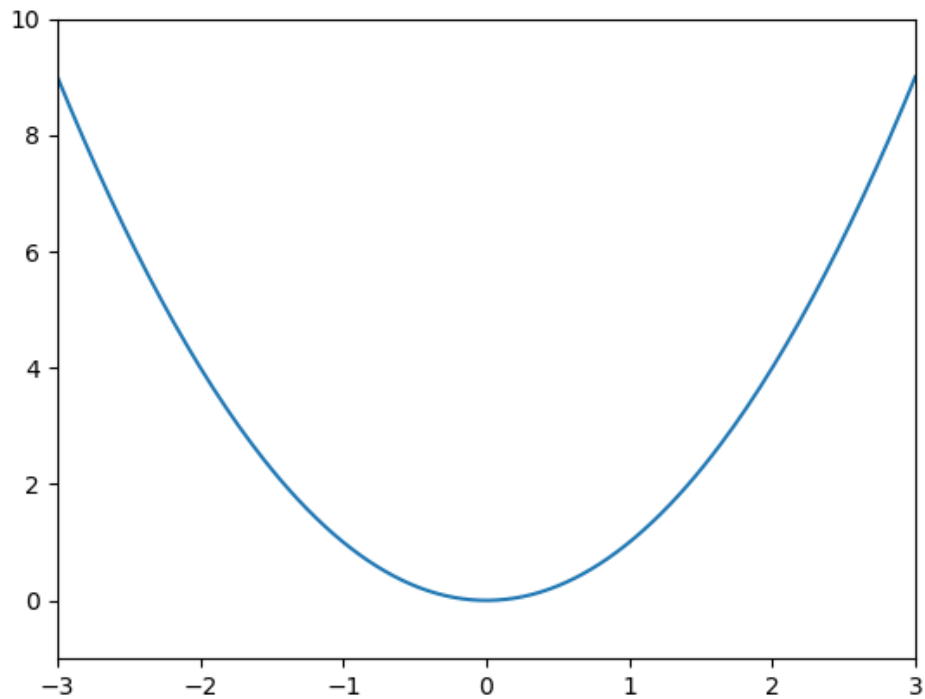
- Siden realdelen til λ er negativ og gir opphav til faktoren $e^{-t/2}$ i den homogene løsningen, dør den homogene løsningen ut ganske fort. Løsningen på tidsintervallet der den homogene løsningen fremdeles har noe å si, kalles **transienten**, og denne kan fortelle noe om hvordan systemet oppfører seg mellom to forskjellige påtrykte tilstander, for eksempel mellom bytte av to likespenningsnivåer dersom $x(t)$ er strømmen i en rcl-krets. Hvis du ikke er interessert i transienten, trenger du heller ikke den homogene løsningen.

- Hvis vi skal tilpasse initialkravene, ser du at dette ikke går uten den homogene løsningen. Dette blir omtrent som å si at dersom du er interessert i transienten, må du ha den homogene løsningen. Det er litt forskjellig fra fagfelt til fagfelt om transienten er interessant eller ikke. Jeg har en kamerat som er elektriker på skip, og han fortalte en gang at de hadde et problem med uønsket oscillerende transient mellom to spenningsnivåer på et klokkesignal, antagelig på grunn av en uønsket induktans eller kapasitans.

- 13 Lett! Den partikulære løsningen må være konstanten $x_p(t) = mg/k$, for om du setter denne inn i likningen får du $g = g$.
- 14 De homogene løsningene er regna ut i oppgave 2-5 over, alt som mangler er å flytte løsningene opp til korrekt høyde med $x_p(t) = g$.
- 15 Jeg har ikke jobba på bilverksted, men setter pengene mine på $\mu \approx 2$, altså kritisk dempet. For lite demping gir oscillasjoner, og da vil bilen hoppe og sprette etter hver dump. For mye demping vil gi bilen langvarig slagside etter hver dump.
- 16 Jeg skal prøve dette en gang, men har ikke kommet så langt ennå.

1 - 4 - FUNKSJONER - LF

- 1 Både domenet og kodomenet er $\mathbb{R}$ - dette spørsmålet var bare for å sjekke om du hadde lest avsnittet over oppgaven. Her er grafen til f :



- 2 Putter du inn hele $\mathbb{R}$ i f , får du ut alle reelle tall større enn eller lik null, så dette er bildet.
- 3 Jeg har en liten kodesnutt i en mappe som heter python/plotte/generisk eller noe sånt og den ser omtrent slik ut:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-1,np.pi,1000)
y=x**2

plt.plot(x,y)
plt.xlim([-1, 2])
plt.ylim([-1, 10])
plt.savefig('plotte.png')
```

Kommandoer som kan være verdt å kjenne er i tillegg `np.exp`, `np.sqrt` og `np.abs`. Ikke mist gnisten av at du ikke husker syntaks. En god IDE (Integrated Development Environment)

hjelper deg med slikt. Jeg skriver for eksempel dette her i VSCode som fullfører syntaks for meg og så bruker jeg en Vim-plugin slik at jeg har hurtigtastene jeg var vant til før jeg konverterte fra Vim til VSCode.

Hvis du bare kopierer koden over inn i ideen din kan det tenkes den ikke kjører, for det kan være du får med noen tegn som ikke er synlige på skjermen din. Jeg har skrevet koden inn i pdfen nettopp for at du skal bli obs på dette problemet. Se ellers her:

<https://missing.csail.mit.edu/>

- 6 Konsentrasjoner bør vel helst være større enn eller lik 0, men log-funksjonen er ikke definert for 0, så da er vel ikke pH definert for 0 heller. Jeg vet ikke en gang om det er mulig å ha absolutt ingen H_3O^+ -molekyler i en flaske vann. Dersom konsentrasjonen kan ta alle positive verdier, kan pH i prinsippet være alle reelle tall, men pH holder seg vel som regel mellom 0 og 14.

- 7 Dersom x er gitt i mol per liter og y den samme konsentrasjonen i mol per milliliter, er $x = 1000y$, slik at

$$\text{pH} = f(y) = -\log(1000y).$$

- 8 Vi definerer $\log x$ som det tallet slik at

$$10^{\log x} = x$$

og $\ln x$ som det tallet slik at

$$e^{\ln x} = x.$$

Dette er i bunn og grunn det eneste du trenger å huske, resten er lett å utlede fra regnereglene for eksponensialfunksjonen. For eksempel er

$$\log xy = \log x + \log y$$

siden

$$10^{\log xy} = xy$$

og

$$10^{\log x + \log y} = 10^{\log x} 10^{\log y} = xy.$$

- 9 Her er tabellen med en ekstra rad:

t	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$e^{\lambda t}$	1.00	1.105	1.22	1.35	1.49	1.65
λt	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50

Ser ut som om $\lambda = 1/2$.

- 10 Du skal gange 1.00 med denne faktoren for å få 1.105, så da må det vel være 1.105.

- 11 På en vanlig seksstrengs gitar er det fire kvarter og en stor ters. Tilsammen skal det bli to oktaver, som har multiplikasjonsfaktoren $2^2 = 4$, men fire rene kvarter og en stor ters gir

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \frac{5}{4} \approx 3.95.$$

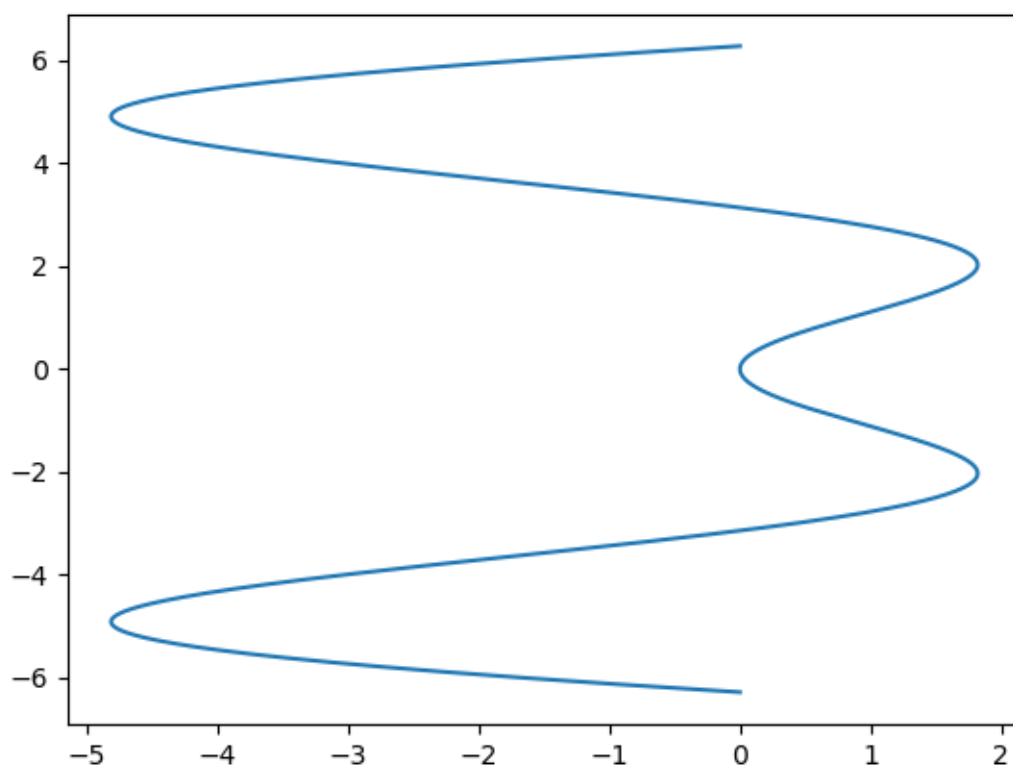
Med andre ord blir det forferdelig surt! Du får samme problem på piano, tolv kvinter skal helst bli syv oktaver, men

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129.7 \neq 128 = 2^7.$$

Derfor har man oppfunnet **likesvevende temperering**, som betyr et halvtone-trinn defineres til å ha multiplikasjonsfaktoren $\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$, og tonesystemet blir den endelige gruppen $\mathbb{Z}_{12}$. Dette løser nesten alle problemer, og et korrekt stemt piano klinger rimelig bra. (På et piano er det noen andre problemer i tillegg, men de har med bølgefysikk å gjøre, og er foreløpig for kompliserte for oss.)

12 Dette gjorde jeg i forelesning.

13 Bytter du om x og y i kodesnutten over, får du denne figuren:



15 Eksponensialfunksjonen og logaritmefunksjonen er inverse funksjoner.

16 La oss sette

$$y = x^2 + 2x + 2$$

og løse for x med abc -formelen:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2 - y)}}{2} = -1 \pm \sqrt{y - 1}.$$

To funksjonsuttrykk! Jøye meg. På attenhundretallet ville de kanskje sagt at den inverse funksjonen hadde to funksjonsverdier, men dette er ikke lov lenger.

- 17 Den korrekte oppførselen er nå å si at funksjonen vi vil invertere er $f : [-1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

som har invers $f^{-1} : [1, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$ gitt ved

$$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-1}$$

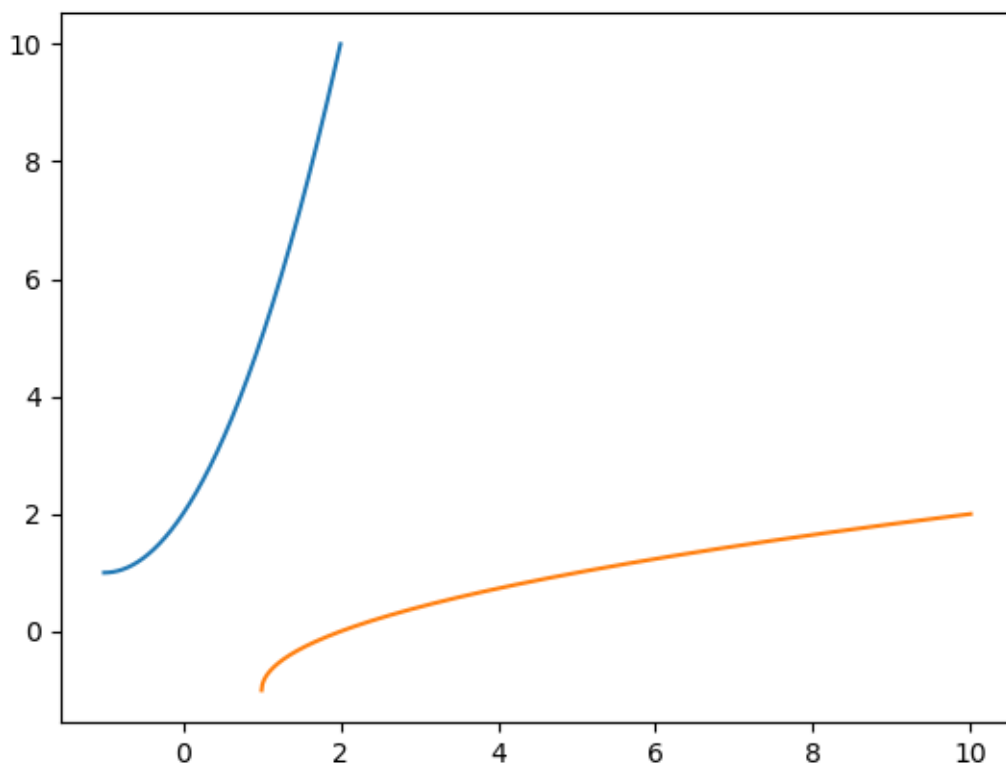
eller eventuelt invertere $g : (-\infty, -1] \rightarrow [1, \infty)$ gitt ved

$$g(x) = x^2 + 2x + 2$$

som har invers $g^{-1} : [1, \infty) \rightarrow (-\infty, -1]$ gitt ved

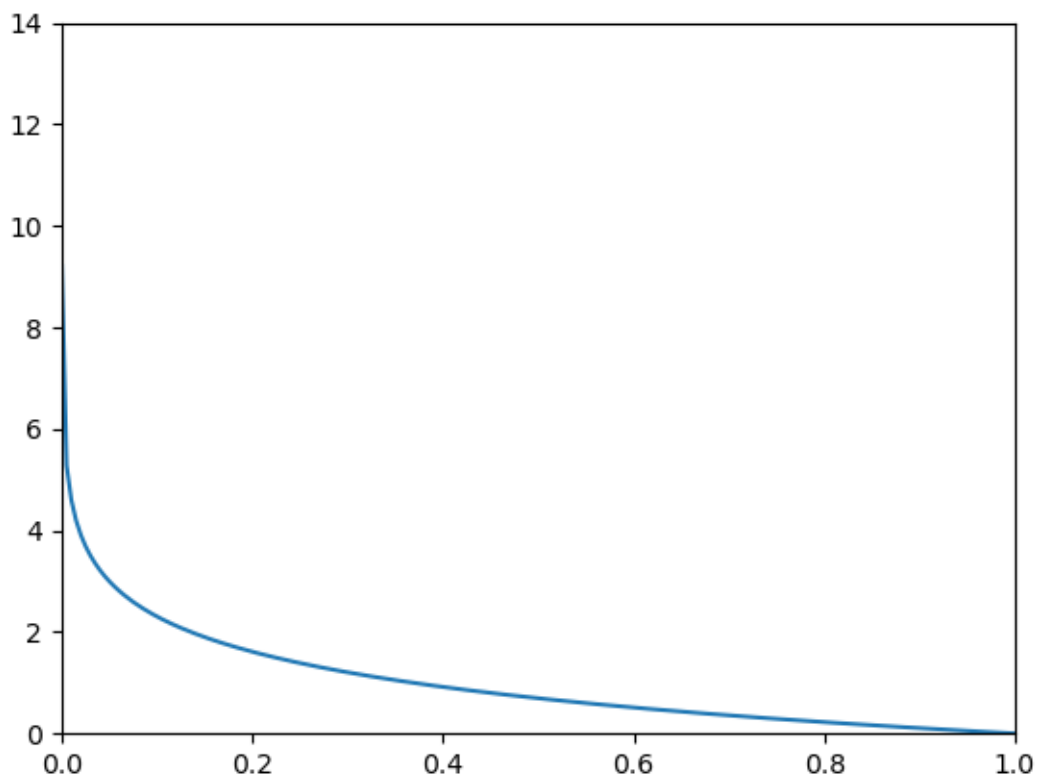
$$g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x-1}$$

Her er et plot av f :



- 18 Det er kun f , g , h , j og m som har anledning til å ha hele $\mathbb{R}$ som domene, og kun f , h og j som er injektive.

- 19 Her er $[\text{H}_3\text{O}^+]$ mot pH . pH mot $[\text{H}_3\text{O}^+]$ er samme figur speila om $pH = [\text{H}_3\text{O}^+]$.



- 20 To eksempler er $f(x) = x$ og $f(x) = 1/x$.
- 21 Dette er et spesialtilfelle av neste oppgave.
- 22 Denne oppgaven er kanskje mest et påskudd for å lære dere å gange ut

$$(a + b)^n$$

for dette er et triks mange ikke kan, og du får bruk for kunnskapen i TMA4245 Statistikk og sannsynlighetsregning til våren. Så her kommer et løsningsforslag som er litt vel pedagogisk, du trenger ikke skrive fullt så mye greier på eksamen. Først må vi ha Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

For eksempel er

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4 \\ &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}b^4\end{aligned}$$

Symbolet $\binom{n}{r}$ leses “ n over r ” og det er ikke kjempevanskelig å vise ved induksjon at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Merk at for alle n er

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{og} \quad \binom{n}{1} = n$$

slik at

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right) = nx^{n-1}\end{aligned}$$

- 23** Funksjonen $f : A \rightarrow f(A)$ sin inverse funksjon eksisterer dersom f er injektiv, og f^{-1} tilfredsstiller likningen

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

for alle $x \in f(A)$. Hvis vi deriverer denne likningen med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1$$

eller

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dersom vi setter $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \tan x$ og husker at

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

dette

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

rett ut. Arcus sinus er lik.

1 - 5 - LINEÆRALGEBRA I - LF

- 2 Vi ganger den første likningen med 4, trekker den andre likningen fra dette, og får

$$2b + 3c = 5.$$

Nå bytter vi likning nummer to ut med denne, og får likningssystemet

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned}$$

Vi gjentar prosessen, ganger første likning med 9 og trekker den tredje likningen fra dette, bytter ut tredje likning med det vi fikk, og får

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ 6b + 8c &= 17 \end{aligned}$$

Nå kan vi gange den andre likningen med 3, trekke dette fra likning tre, og bytte ut denne, slik at vi får

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 2b + 3c &= 5 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Nå har vi fått **trappeform**, og det er bra, for vi kan regne ut

$$\begin{aligned} c &= -2 \\ b &= (5 + 3 \cdot 2) / 2 = 11/2 \\ a &= 2 - 11/2 + 2 = -3/2 \end{aligned}$$

Polynomet som går gjennom punktene (1, 2), (2, 3) og (3, 1) er altså

$$p(x) = \frac{1}{2}(-3x^2 + 11x - 4).$$

- 4 Du trenger ikke fasit på disse. Noen få linjer i python gir deg den:

```
A = np.array([[2, 3, 4], [3, 4, 5], [4, 5, 7]])
b = np.array([4, 5, 3])
x = np.linalg.solve(A, b)
```

Jeg skal allikevel ta den siste:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5 - 3i & 10 \\ 4 & 2i & 10 + 2i & 20 + 16i \\ 2i & -1 & 4 + 6i & 2 + 12i \end{array}$$

for det er mange som blir forvirret av gausseliminasjon når det er komplekse tall involvert. Begynn med å gange første likning med 2, trekke den fra likning nummer 2, og bytte ut:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5 - 3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 2i & -1 & 4 + 6i & 2 + 12i \end{array}$$

Så ganger vi første likning med i , trekker den fra den siste, og får

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 0 & 0 & 1+i & 2+2i \end{array}$$

Hvis vi nå ganger likning nummer to med $(1+i)/8i$ og trekker dette fra den siste og bytter ut, får vi

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 10 \\ 0 & 0 & 8i & 16i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Hm. Det er visst bare to likninger dette her. Den ene forsvant helt under gausseliminasjon! Siden likningene var konsistente får vi uendelig mange løsninger, og de kan skrives opp som følger. Først gir den andre likningen at $x_3 = 2$, og da sitter vi igjen med likningen

$$2x_1 + ix_2 + 2(5-3i) = 10.$$

Nå kan vi velge $x_2 = s$, regne ut at

$$x_1 = 3i - \frac{i}{2}s.$$

Det er vanlig å skrive opp løsningene på vektorform slik:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i - \frac{i}{2}s \\ s \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette kalles å **parametrisere løsningsrommet**.

5 Vi gausser

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Huff da, $x_2 + 2x_3$ kan da ikke være både 2 og 5. Disse likningene var inkonsistente, og vi har ingen løsning. Neste:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Disse likningene var konsistente, så nå kan du prøve å parametrisere løsningsrommet slik som i forrige oppgave. Den neste er lett:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Den siste likningen sier at $x_3 = 0$. Dersom $x_3 = 0$, sier den andre likningen at $x_2 = 0$, og dersom $x_2 = x_3 = 0$, sier den første likningen at $x_1 = 0$. Med andre ord impliserer likningssettet at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Den neste likner på en av de forrige:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

og vi får uendelig mange løsninger

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 6 Likningssystemene i oppgaven over handler alle om å finne skjæringspunkter mellom tre plan. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

finnes det ikke noe entydig skjæringspunkt (enten ingen eller uendelig mange), siden de tre normalvektorene ligger i det samme planet. Dette kan du finne ut av ved å ta trippelproduktet mellom de tre normalvektorene. I likningssystemene med matrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

peker normalvektorene i "hver sin retning", og det finnes et entydig skjæringspunkt mellom alle planene.

Dette kan være litt vanskelig å se for seg. Ta tre ark og eksperimenter litt med de forskjellige situasjonene. Hvis du synes det er håpløst, kan jeg trøste deg med at du får en bedre teknikk om noen få strakser.

- 7 Anta at både

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

og

$$d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \dots + d_n \mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

Dersom du trekker disse to likningene fra hverandre og bruker vektorregnereglene du lærte på skolen, får du

$$(c_1 - d_1) \mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2) \mathbf{v}_2 + \dots + (c_n - d_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige må nå

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$$

som betyr at

$$c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_n = d_n.$$

- 8 La oss ta for oss det første systemet i oppgave 3:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

Dette er altså en vektorlikning:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

For å undersøke om vektorene i lineærkombinasjonen på venstre side er lineært uavhengige, må vi løse systemet

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gausser du dette slik som i oppgave 5, får du at $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, og dermed er vektorene lineært uavhengige. Følgelig ser vi at systemet

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}$$

ikke kan ha mer enn én løsning. Det neste systemet i oppgave 3 har lineært uavhengige vektorer på venstre side, for jeg konstruerte det ved å tegne en krets og skrive ned likninger for alle strømmene i kretsen - du kan analysere det på samme måte som jeg nettopp viste. Det siste systemet med komplekse tall kan umulig ha lineært uavhengige kolonner, for når vi løste systemet, fikk vi uendelig mange løsninger. I oppgave 5 har du allerede sjekka lineær uavhengighet da du løste systemene med nullvektor på høyre side. Vektorene på venstre side i det siste systemet i oppgave 5 har lineært uavhengige kolonner. Siden det er tre likninger og to ukjente tenkte du kanskje at det ikke kunne være noen løsning, men det er det, og den er entydig siden de to vektorene er lineært uavhengige. At de er lineært uavhengige er lett å se siden to vektorer er lineært avhengige hvis og bare hvis de er parallelle.

- 9 Å gange sammen matriser er en formel. Du går på Norges hippeste ingeniørutdanning. Du klarer det. Her er fasiten:

$$\begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 26 & 62 & 98 \\ 35 & 83 & 131 \end{pmatrix}$$

- 10 Dersom to matriser skal kunne ganges sammen, må antall kolonner i den til venstre være det samme som antall rader i den til høyre, ellers går det ikke. Pythonrutinen for å gange sammen matriser kalles "matmul". Denne kalles ved å bruke @:
<https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.matmul.html>
 se eksemplene nederst på siden i lenken. Du kan prøve alle produktene i oppgaven med denne.

- 11 Nei og nei:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Se så kjekt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette kan brukes til å løse likningssystemer. Hvis du ganger med den inverse fra venstre på likningssystemet

$$Ax = b,$$

får du løsningen

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

bare se her:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dette er det du fikk som løsning på et av systemene i oppgave 3.

- 12 Vi ønsker å finne en matrise B slik at $AB = I$. Dette er egentlig bare å løse de tre likningssystemene

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 0 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \end{array}$$

og dette kan gjøres simultant ved å gausseliminere matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gausseliminerer du helt til du får

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

har du fått tak i A^{-1} til høyre i systemet. Dette er kjedelig, men en fin test på om du kan gausseliminere feilfritt.

Hvis du ikke liker å gausse, kan du ta alle de ni 2×2 -determinantene som er mulig å beregne ved å slette en kolonne og en rad i A , sette dem opp i et spesielt mønster, gange noen av dem med -1 , og til slutt dele alt på $\det A$. Dette kalles **kofaktorekspansjon**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

14
$$BA = \begin{pmatrix} 42 & 54 & 73 \\ 51 & 66 & 89 \\ 60 & 78 & 105 \end{pmatrix} \neq AB = \begin{pmatrix} 20 & 47 & 74 \\ 26 & 62 & 98 \\ 35 & 83 & 131 \end{pmatrix}$$

- 15 Atommatrisen blir

$$\begin{pmatrix} & \text{C}_6\text{H}_{14}\text{O}_4 & \text{O}_2 & \text{CO}_2 & \text{H}_2\text{O} \\ \text{C} & 6 & 0 & -1 & 0 \\ \text{H} & 14 & 0 & 0 & -2 \\ \text{O} & 4 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De tre siste kolonnene er lineært uavhengige, siden

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

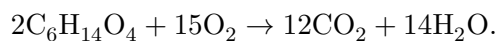
kun løses av nullvektoren. Fire vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan åpenbart ikke være lineært uavhengige, og nå kan jeg et lurt triks som du skal få lære i neste uke, og det er at da må løsningsrommet til

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

være endimensjonalt. Sett $d = s$. Den andre likningen gir $14a - 2s = 0$, slik at $a = s/7$. Videre gir likning nummer én at $6s/7 - c = 0$, eller $c = 6s/7$. Til slutt gir den nederste likningen $4s/7 + 2b - 12s/7 - s = 0$ eller $4s + 14b - 12s - 7s = 0$, slik at $b = 15s/14$. Alt i alt har vi nå

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1/7 \\ 15/14 \\ 6/7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

slik at korrekt balansering blir



1 - 6 - LINEÆRALGEBRA II - LF

1 Vi gausser:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 10 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Som du ser har vi nå nådd **trappeform**. Dette er gunstig, for når man har trappeform, kan man parametrisere løsningsrommet. Velg $x_4 = s$. Da får vi (jobb deg fra nederst til øverst)

$$x_3 = -s$$

$$x_2 = 2 + x_3 = 2 - s$$

$$x_1 = (4 - x_2 - x_3 - 2x_4) / 2 = (4 - 2 + s + s - 2s) / 2 = 1$$

slik at løsningsrommet er alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siden løsningen ikke var entydig, vet vi at kolonnene er lineært avhengige. Hadde vi ikke visst det, måtte vi gausset slik:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

og så valgt $x_4 = s$ som over, og regnet ut at

$$x_3 = -s$$

$$x_2 = x_3 = -s$$

$$x_1 = (-x_2 - x_3 - 2x_4) / 2 = (s + s - 2s) / 2 = 0$$

slik at løsningsrommet er alle vektorer på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

og konkludere med at det finnes massevis av løsninger som ikke er nullvektoren, slik at kolonnene er lineært avhengige. Merk sammenhengen mellom løsningen til de to systemene - det ser ut til å følge systemet med homogen og inhomogen løsning som vi støtte på når vi løste differensiallikninger.

For å finne ut om det er lineært uavhengige rader, kan vi gausse dette systemet:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Her har jeg gjort om rader til kolonner og kolonner til rader - dette kalles å **transponere** matrisen. Denne operasjonen trenger vi ikke før i TMA4106, men nå vet du hva det går i. Gausser vi systemet

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ser vi at vi får massevis av løsninger og følgelig lineært avhengige rader. Merk at strukturen på trappeformen er den samme, med tre diagonalelementer forskjellig fra null. Ikke tilfeldig.

- 2] Determinanten i systemet gir hypervolumet av hyperparallelepipedet utspent av kolonnene i matrisen: <https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

Den beregnes ved å jobbe seg rundt i matrisen på en spesiell måte. Først tar man alle tallene i øverste rad, alternerer dem med pluss og minus, og ganger dem med determinantene til noen mindre matriser der man har tatt vekk raden og kolonnen til hvert tall i øverste rad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

De fire 3×3 -determinantene til høyre i likningen beregner du på samme måte som du lærte på skolen, og svaret blir i dette tilfellet 0, siden kolonner og rader er lineært avhengige. Dette er fordi radene og kolonnene ikke spenner ut et ordentlig hyperparallelepiped i $\mathbb{R}^4$.

- 3] Likningssystemet blir

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setter vi $x_1 = i_1$ og $x_2 = i_2$ og $i_3 = x_1 - x_2$, får vi likningssystemet

$$\begin{aligned} R_3(x_1 - x_2) + R_1x_1 &= V \\ R_3(x_2 - x_1) + R_2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$$

som er et like bra system, det er bare det at en av likningene i det forrige systemet er eliminert.

- 4-7 Disse oppgavene er designet for at jeg skal kunne vise deg et par triks. La oss først sette opp systemet i oppgave 4. Fire sløyfer, fire likninger. De blir

$$Rx_1 + R(x_1 - x_2) + R(x_1 - x_3) = V_1$$

$$Rx_2 + R(x_2 - x_1) + R(x_2 - x_4) = 0$$

$$Rx_3 + R(x_3 - x_1) + R(x_3 - x_4) = 0$$

$$Rx_4 + R(x_4 - x_2) + R(x_4 - x_3) = 0$$

eller

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R & 0 \\ -R & 3R & 0 & -R \\ -R & 0 & 3R & -R \\ 0 & -R & -R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

om du vil. Setter du $R = 1$ får du et system fra oppgave 3 i forrige uke, så løsningen har du allerede, så lenge du forstår at det er helt innafor å skrive systemet slik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

slik at det faktisk bare er å ta løsningen fra forrige økt og gange med V_1/R . Siden jeg ikke gaussa det systemet da, får jeg gjøre det nå:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 8 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -1 & -3 & 1 & 0 & 8 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 63 & -27 & 9 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 21 & 1 & 0 & 0 & 0 & 120 & 16 \end{array}$$

som gir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningen til

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R & 0 \\ -R & 3R & 0 & -R \\ -R & 0 & 3R & -R \\ 0 & -R & -R & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

blir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{15R} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis du nå ser på hva som er gjort over, vil du se at det å løse

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{V_1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vil tvinge deg til å gjøre nøyaktig de samme gausselimineringsstegene, og likeledes med oppgave 6 og 7. Gjør du dette, får du henholdsvis

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Dette kunne vi like gjerne gjort i en smell slik:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array},$$

og nå skjønner du forhåpentligvis gaussing av dette systemet produserer den inverse matrisen - systemet er bare

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi har faktisk at

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

er følgelig den inverse matrisen, så nå er det bare å multiplisere V_k/R og vips så har du strømmene.

8 Her er det bare å legge sammen løsningene fra oppgave 4-7, dette heter superposisjonsprinsippet og det kommer vi tilbake til om to uker.

9 Slik setter du en matrise i python:

```
A=np.array([[2,3,4],[3,4,5],[4,5,7]])
```

og husk doble firkantklammer for å få søyle- og ikke radvektor:

```
b=np.array([[4],[5],[3]])
```

og så løser du slik:

```
np.linalg.solve(A,b)
```

To andre nyttige kommandoer er

`np.linalg.det(A)`

og

`np.linalg.inv(A)`

- 10 Identitetsmatrisen lar vektorer være helt i fred:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 11 Denne speiler om x_1 -aksen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

- 12 Mens denne speiler om x_2 -aksen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 13 Denne speiler om origo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

- 14 Og denne om linjen $x_1 = x_2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

- 15 Denne projiserer ned på x_1 -aksen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 16 Mens denne projiserer ned på x_2 -aksen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 17 Og denne strekker vektorer

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- 18 Denne roterer vektorer vinkelen θ mot klokken når $\theta > 0$, og med klokken når $\theta < 0$. Dette ser vi siden

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

helt klart er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rotert vinkelen θ og siden

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

helt klart er

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rotert vinkelen θ og siden

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

19 Denne gjør ingenting, akkurat som i oppgave 10.

20 Denne speiler om planet $x_2 = x_3$, slik som i oppgave 14.

21 Denne projiserer ned på x_1 -aksen, slik som i oppgave 15.

22 Denne projiserer ned i x_1x_2 -planet.

23-25 Disse roterer vektorer rundt henholdsvis x_3 -aksen, x_2 -aksen og x_1 -aksen.

33 Når vi har funnet egenverdiene, kan vi finne egenvektorene ved å løse likningen

$$(A - \lambda_k I) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

For eksempel er egenvektoren til $\lambda_2 = 4$ gitt ved alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siden

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1-4 & 2 & 2 & 0 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6-4 & 2 & 0 & \sim & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

De andre finnes på samme måte.

34 I oppgave 10-13 er matrisene diagonale, og da blir det veldig greit, for egenverdiene står på diagonalen, og standardbasen er egenvektorer. Matrisen i oppgave 14 må vi nesten ta manuelt. Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

slik at egenverdiene er 1 og -1 . Gausser vi systemet

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

får vi at egenvektorer til $\lambda = 1$ er alle vektorer på formen

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Likeledes er egenvektorer til $\lambda = -1$ alle vektorer på formen

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De tre neste er diagonale og løses slik som 10-13. Rotasjonsmatrisen er litt artig. Det karakteristiske polynomet er

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = 1 - 2\lambda \cos \theta + \lambda^2.$$

Setter vi dette lik null og finner λ , får vi

$$\lambda = \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i\theta}.$$

Nullrommet til

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \mp i \sin \theta \end{pmatrix}$$

er henholdsvis alle skalarmultipler på formen

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}.$$

Hvis du skjønner ideen bak egenvektorer (matrisen skalerer dem) og ikke kjente til komplekse tall, ville du kanskje ha hoppet til den konklusjon at rotasjonsmatrisen ikke har egenvektorer siden den roterer alle vektorer, men dette er feil. Det er bare det at egenverdier og egenvektorer er komplekse. I oppgave 19-25 kan du gjenbruke alt jeg nettopp regna ut, siden alle matrisene (unntatt den i 24) er **blokkdiagonale**:

https://en.wikipedia.org/wiki/Block_matrix

For eksempel er egenverdiene til den i 25 1 og $e^{\pm i\theta}$, og egenvektorene er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

og alle skalarmultipler (men ikke lineærkombinasjoner) av disse. Matrisen i 24 har de samme egenverdiene, og alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

som egenvektorer.

1 - 7 - DIFFERENSIALLIKNINGER III - LF

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2)\end{aligned}$$

1 Hvis vi setter

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 (x_2 - x_1) \\ \alpha_1 (x_1 - x_2) + \alpha_2 (0 - x_2) \end{pmatrix}$$

så det blir riktig.

$$2 \quad A = \begin{pmatrix} -(R_1 + R_3)/L_1 & R_3/L_1 \\ R_2/L_2 & -(R_2 + R_3)/L_2 \end{pmatrix}$$

Dersom du bruker Kirchhoffs spenningslov på sløyfene i kretsen under, får du

$$\dot{x}_1 = \left(-(R_1 + R_3)x_1 + R_3x_2 \right) / L_1$$

$$\dot{x}_2 = \left(R_2x_1 - (R_2 + R_3)x_2 \right) / L_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad \text{der} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3 En to ganger to matrise har karakteristisk polynom av orden 2, så det kan være maksimalt to egenverdier, og i $\mathbb{R}^2$ er det ikke "plass til" mer enn to lineært uavhengige egenvektorer, så mennesker som ikke er på galehuset vil forvente to lineært uavhengige løsninger. Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 1 \\ &= (1 + \lambda)(2 + \lambda) - 1 \\ &= 1 + 3\lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

som har røtter

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Å finne nullrommet til $A - \lambda I$ er å løse likningssystemene

$$\begin{array}{cc|c} -1 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 0 \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{cc|c} -1 - \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 1 & 0 \\ 1 & -2 - \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) & 0 \end{array}$$

Dette synes du sikkert ser helt forferdelig ut, men det å finne nullrommet til en 2×2 -matrise involverer heldigvis så og si ingen gausseliminerings. Dersom matrisen ikke er inverterbar, er radene lineært avhengige, og da er den ene raden en skalarmultiippel av den andre. Dersom vi nå har regnet ut korrekte egenverdier, vet vi jo at dette skal være tilfellet, så da koker alt ned til å finne alt som passer i likningen

$$-1 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad 1 \mid 0 \quad \text{og} \quad -1 - \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad 1 \mid 0$$

eller, etter litt rydding,

$$1 - \sqrt{5} \quad 2 \mid 0 \quad \text{og} \quad 1 + \sqrt{5} \quad 2 \mid 0$$

Løsningene til disse to likningene er alle skalarmultipler av henholdsvis

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Nå har vi funnet to løsninger av differensiallikningssystemet vi startet med, nemlig

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

og akkurat som i økten om andre ordens differensiallikninger, vil alle lineærkombinasjoner av disse to også være løsninger av systemet:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4 Først finner vi egenvektorene til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1, \tag{2}$$

som har røtter $\lambda = 1$ og $\lambda = 3$. Vi beregner så

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

og

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

som gir egenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Alle lineærkombinasjoner av disse to løser systemet:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

Vi regnet ut i forrige uke at egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

er 0, 4 og 9, med korresponderende egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Løsningen er derfor alle lineærkombinasjoner på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5 Vi beregner først det karakteristiske polynom

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda-1) + (1-(2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\ &= (1-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Dette kommer vi tilbake til. Løsningen er alle lineærkombinasjoner på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \left(c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

7 Krever vi $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, får vi likningssystemet

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

som gir $c_1 = c_2 = 1/2$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \left(e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad (9)$$

og så videre.

8 Det karakteristiske polynomiet blir

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)^2,$$

så det finnes kun én dobbel egenverdi $\lambda = 1$. Når vi prøver å gausse oss frem til egenvektoren, får vi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir egenvektorer på formen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

og ingen fler. Vi har nå kun funnet én løsning, og den er

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

og denne kommer aldri til å kunne tilfredsstille det oppgitte initialkravet. Dette eksemplet illustrerer en viktig ting. Det karakteristiske polynomiet til en $n \times n$ -matrise kan alltid spaltes i n lineære faktorer, men det finnes ikke alltid n lineært uavhengige egenvektorer. I dette tilfellet sier vi at matrisen er **defekt**. Differensiallikningssystemet i oppgaven har flere løsninger enn de du fant, og derfor klarer du ikke tilfredsstille initialkravene. Spenningen er til å ta og føle på og hvis du vil kan du regne ut alle løsningene ved å først løse $\dot{x}_2 = x_2$ og så sette x_2 inn i den første likningen og så finne x_1 .

- 9 Vannet skal ha en passelig drikketemperatur på 13 grader, så vi må løse likningen

$$13 = x_2(t),$$

der x_2 er den andre komponenten i

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{(-3+\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} + c_2 e^{(-3-\sqrt{5})t/2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Dette går ikke med penn og papir, siden x_2 er en lineærkombinasjon av to forskjellige eksponensialfunksjoner. Hvordan vi håndterer slikt skrømt kommer vi tilbake til.

Dersom en $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ har n lineært uavhengige egenvektorer sier vi at A er **diagonaliserbar**. Dette er fordi det i så fall er mulig å skrive

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

der P har egenvektorene som kolonner og Λ er diagonal.

- 10 Dersom du er trent nok i matrisemultiplikasjon vil du se at dersom du har n likninger på formen

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

kan disse sammenfattes som

$$AV = V\Lambda$$

der

$$V = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{array} \right) \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dersom de n vektorene er lineært uavhengige er V inverterbar, og da kan vi gange med V^{-1} fra høyre og få

$$A = V\Lambda V^{-1}.$$

- 11 Vi får

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$$

som har karakteristisk polynom

$$|A - \lambda I| = -\lambda(-a_1 - \lambda) + a_0 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0,$$

altså det samme karakteristiske polynomet som likningen $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$. Tilfeldig at begge heter "karakteristisk polynom"? Selvfølgelig ikke. Det finnes tilfeller der A ikke er diagonaliserbar, for eksempel hvis $a_1^2 = 4a_0$ slik at det finnes en dobbel egenverdi $\lambda = -a_1/2$.

REPETISJONSOPPGAVER

1 Vi gausser litt:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \\
 \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \\
 \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Det sto vel at vi skulle løse likningssystemene, men det er ikke så farlig nøyaktig hva løsningen på dette siste systemet er. Vi ser på det nåværende tidspunktet at det er entydig løsning, til tross for at vi har fire likninger og tre ukjente. Dette er fordi de tre kolonnene i matrisen er lineært uavhengige og vektoren på høyre side ligger i rommet utspent av disse. Se neste oppgave.

2 Vi ønsker som alle vet å løse systemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og dersom $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, er kolonnene lineært uavhengige. Vi gausser i vei

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 3 & 9 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Et trent øye ser nå at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er den eneste løsningen, og følgelig er kolonnene lineært uavhengige. Så er det bare å brette opp ermene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

og se at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi beregner til slutt

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 3 Vi finner egenverdiene og egenvektorene til A . Det karakteristiske polynomet er

$$\det \begin{pmatrix} 13 - \lambda & 20 \\ -10 & -17 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 7)$$

og de tilhørende egenvektorene blir

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Løsningene til differensiallikningssystemet er

$$\mathbf{x} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-7t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- 4 Vi gausseliminerer (her kan det finnes flere veier til Rom)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Av dette ser vi at

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

kan også skrives

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

og ganger vi på hver side med den inverse matrisen, får vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 Volumet er

$$\det A = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 1) + 1 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = 1$$

Siden $\det A \neq 0$, er kolonnene i A lineært uavhengige, og derfor vil likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha entydig løsning uansett hva $\mathbf{b}$ er.

6 Vi begynner med å finne det karakteristiske polynom

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

og registrerer at det finnes en repetert egenverdi $\lambda = 1$ med multiplisitet 3. Vi finner egenvektorene ved å løse systemet

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som altså blir

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

De to første likningene i dette systemet impliserer at $v_2 = v_3 = 0$, mens v_1 kan være hva som helst, siden den ikke inngår i likningssystemet en gang. Egenvektorene til $\lambda = 1$ blir følgelig

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siden matrisen kun har en lineært uavhengig egenvektor, er den ikke diagonaliserbar, og vi kan ikke finne en diagonalmatrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Og så til difflikningssystemet. Dette er et likningssystem på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

der A er matrisen over. Vi vet derfor at

$$\mathbf{x}(t) = ce^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der c er en vilkårlig konstant, er en løsning. Det finnes to lineært uavhengige løsninger til, men de er litt mer kompliserte å regne ut, så det er ikke pensum i høst. Initialverdikravet

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = 0$$

er tilfredsstilt dersom $c = 1$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 - 8 - LINEÆRALGEBRA III - LF

- 1 Nei, disse er parallelle, og følgelig lineært avhengige, og følgelig ikke en basis for noe som helst.
- 2 Tja vi kan jo endre litt på den basisen vi har, for eksempel

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Har du skjønnt lineær uavhengighet er det trivielt å se at denne vektormengden er lineært uavhengig, og følgelig en basis for $\mathbb{R}^5$.

- 3 Hvis du husker tilbake til oppgave 1 i økt 1-6, husker du kanskje at nullrommet til denne matrisen består av alle skalarmultipler av

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kolonnene i matrisen er derfor lineært avhengige og ikke en basis for noe.

- 4 Vi gausser matrisen slik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nå skal jeg vise deg noe snedig. Dersom vi lar de to første kolonnene i systemet stå, og setter den tredje på høyre side og gausser, kan vi bruke de samme stegene:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dette forteller oss at den tredje kolonnen kan skrives som en lineærkombinasjon av de to første på en entydig måte, og likeledes gir

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

at den fjerde kolonnen kan skrives som en lineærkombinasjon av de to første på en entydig måte. Det følger at dimensjonen på kolonnerommet må være to, siden alle lineærkombinasjoner

på formen $A\mathbf{x}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to første kolonnene, som åpenbart må være uavhengige. Underrommet av $\mathbb{R}^4$ har altså dimensjon 2. Et klassisk triks for å finne en basis for kolonnerommet til en matrise er å gausseliminere til trappeform. Antall pivotelementer¹ gir deg dimensjonen på kolonnerommet, og kolonnene med pivotelementer i trappeformen gir deg indeksene til de kolonnene i den originale matrisen som er en basis for kolonnerommet.

5 Vi gausser først

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som gir at dimensjonen til kolonnerommet er 2. Gausser vi den transponerte matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at radene i den opprinnelige matrisen (altså kolonnene i den transponerte matrisen) også spenner ut et rom med dimensjon 2. Dette rommet kalles **radrommet**, og det står ortogonalt på nullrommet til matrisen. For å finne rangen til matrisene i økt 1-5 og 1-6, kan du bruke det samme trikset - gausseliminér og tell antall pivotelementer.

6 I både oppgave 4 og 5 er de to første kolonnene basis for kolonnerommet, jamfør kolonnerombasistrikset. Basiser for nullrommene finner vi ved å parametrisere løsningsrommene. Gaussingen

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

gir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2(-2s-3t)-3s-4t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at en basis for nullrommet er

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nullrommet til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Pivot_element

er akkurat det samme. Dette er kanskje ikke noe sjokk - likningssystemet

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

inneholder den samme informasjonen som likningssystemet

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \end{array}$$

siden den siste likningen følger av de tre første.

7 Vi beregner først det karakteristiske polynomet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) - (2-\lambda - 1) + (1 - (2-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \\ &= (1-\lambda)(4 - 5\lambda + \lambda^2) \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \end{aligned}$$

og ser at vi har en enkel egenverdi $\lambda = 4$ og en dobbel egenverdi $\lambda = 1$. La oss begynne med den enkle egenverdien. Vi kunne gausset i vei, men siden vi elsker tall og observerer at tverrsummen av alle radene er 4, må egenvektoren være

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så den doble. Siden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ser vi at alle egenvektorer ligger i planet til likningen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

så for eksempel

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

duger. Merk at begge er ortogonale på $\mathbf{v}_1$, men ikke på hverandre. Dette er ikke tilfeldig; vi kommer tilbake til det i TMA4106.

- 8 Dette er en lureoppgave. Egenrommet til egenverdien $\lambda = 0$ er det samme som nullrommet til matrisen, så vi har allerede funnet det.

- 9 Løsningene er som vi vet alle funksjoner på formen

$$x(t) = e^{-t/2} \left(c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right)$$

men det er like korrekt å skrive at løsningene er alle funksjoner på formen

$$x(t) = d_1 e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t} + d_2 e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t}.$$

Nå er det strengt tatt ikke riktig å si at vi "vet" at dette er alle løsningene, for det må egentlig bevises og det er litt overkill for dette kurset, men det er altså slik at løsningene til en lineær differensiallikning alltid danner et vektorrom med samme dimensjon som ordenen til likningen. To basiser som er akkurat like fine, er

$$\left\{ e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})t}, e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})t} \right\} \quad \text{og} \quad \left\{ e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right), e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right\}.$$

Vi burde kanskje dobbeltsjekke at det er lineær uavhengighet mellom basisvektorene. Dette følger av at dersom likningen

$$0 = c_1 e^{-t/2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + c_2 e^{-t/2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

kun er sann (for alle t) dersom $c_1 = c_2 = 0$. Du kan sjekke den andre basisen på samme måte.

- 10 Siden likningen

$$0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kun er sann om $a_2 = a_1 = a_0 = 0$, er

$$\{x^2, x, 1\}$$

en basis for rommet av alle polynomer på formen

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

og følgelig er dette rommet tredimensjonalt.

- 11 For å avgjøre dette må vi ned i aksiomene i bunnen av filen. Leser du dem vil du oppdage at du må bestemme deg for hvilken kropp du skal hente skalarene i lineærkombinasjonen din fra, og vi sier at vi har et vektorrom "over" denne kroppen. De komplekse tallene er et endimensjonalt vektorrom over de komplekse tallene, men et todimensjonalt vektorrom over de reelle tallene.

- 12 Likningen

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 = 0$$

er kun sann om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, så dette er tredimensjonalt. Likningen

$$0 = c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3$$

er ikke bare sann om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, men også for eksempel når $c_1 = c_2 = 1$ og $c_3 = -1$, så

$$\{\cos^2 t, \sin^2 t, 1\}$$

er ikke en basis for noe. Vi kan skrive den siste vektoren (altså 1-tallet) som en lineærkombinasjon av de to første, men de to første er lineært uavhengige siden

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t = 0$$

kun er sann for alle t om $c_1 = c_2 = 0$. Derfor er

$$\{\cos^2 t, \sin^2 t\}$$

en basis for vektorrommet av alle funksjoner på formen

$$c_1 \cos^2 t + c_2 \sin^2 t + c_3.$$

13 For å finne koordinatene må vi løse likningssystemet

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dette klarer alle barn i barnehagen og løsningen er

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Punktet $(1, 1)$ i den rare basisen er

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så koordinatene er $(3, 3)$ i standardbasiskoordinater. Se også her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4110/2024h/8-mer_om_basisbytte.pdf

14 Koordinatene til

$$x(t) = e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

i den første basisen er helt klart $(1, 1)$. Koordinatene i den andre basisen må vi nesten regne ut ved å løse likningen

$$c_1 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t} = e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

Vi kan skrive om venstresiden med Eulers formel slik

$$\begin{aligned} e^{-t} (c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}) &= e^{-t} (c_1 (\cos t + i \sin t) + c_2 (\cos t - i \sin t)) \\ &= e^{-t} ((c_1 + c_2) \cos t + i(c_1 - c_2) \sin t) \end{aligned}$$

og skal dette bli lik $e^{-t} (\cos t + \sin t)$ må koordinatene tilfredsstille likningssystemet

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ ic_1 - ic_2 &= 1 \end{aligned}$$

som løses av $c_1 = \frac{1}{2}(1 - i)$ og $c_2 = \frac{1}{2}(1 + i)$.

$$\boxed{15} \begin{pmatrix} 20 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \quad \boxed{16} \begin{pmatrix} 47 \\ 62 \\ 83 \end{pmatrix} \quad \boxed{17} \begin{pmatrix} 67 \\ 88 \\ 118 \end{pmatrix} \quad \boxed{18} \begin{pmatrix} 67 \\ 88 \\ 118 \end{pmatrix} \quad \boxed{19} \begin{pmatrix} 181 \\ 238 \\ 319 \end{pmatrix} \quad \boxed{20} \begin{pmatrix} 181 \\ 238 \\ 319 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{15} 2t \quad \boxed{16} 1 \quad \boxed{17} 2t + 1 \quad \boxed{18} 2t + 1 \quad \boxed{19} 4t + 3 \quad \boxed{20} 4t + 3$$

15-21 Du klarer det.

22 For eksempel oppgave 8 i økt 1-6 var lagt opp til at du skulle skjønne at du kunne bruke superposisjonsprinsippet uten å kalle det det.

23 Enkelt! $v(t) = 18(1 - e^{-t/RC})$.

24 I derivasjonstabellen du hadde på skolen sto nok denne linjen:

$$(e^{ax})' = ae^{ax}$$

eller

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

eller en liknende variant. Ser du nøye etter, vil du vel se at dette er en egenvektorlikning der derivasjonen på venstre side er lineæroperatoren, og a er en egenverdi med korresponderende egenvektor e^{at} . At dette er alle egenvektorer er kanskje ikke trivielt, men nå vet du ihvertfall at eksponensialfunksjonen er egenvektor til derivasjonsoperatoren, og siden venstresiden i alle differensiallikninger vi har lært om til nå har vært lineærkombinasjoner av derivasjonsoperatorene, er det derfor vi alltid prøver oss med eksponensialfunksjonen om vi må gjette på omtrent hva løsningen er.

25 Vi gausser

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

slik at løsningene er

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s - 2(-1 - 2s) \\ -1 - 2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + s \\ -1 - 2s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den første av disse er den homogene løsningen - du kan selv sjekke at dette er løsningene til

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Så gausser vi litt mer:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \\
 \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array} \\
 \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

og så videre og så videre.

1 - 9 - INTEGRALET I - LF

$$\boxed{-17} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{-16} \int_0^1 1 - x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{-15} \int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4} dx = \int_0^1 \sqrt{(x+2)^2} dx = \int_0^1 (x+2) dx = \frac{5}{2}$$

$\boxed{-14}$ Litt mer finurlig, men kan du trigonometriske formler, kan du alt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos\left(2\frac{1}{2}x\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx \\ &= 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$\boxed{-13}$ Sinusfunksjonen er 1 i $x = \pi/2$ og -1 i $x = 3\pi/2$, så da er $y = \sin^2(\pi/2) = \sin^2(3\pi/2) = 1$ og vi kan integrere:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 1 - \sin^2 x dx &= \pi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 x dx \\ &= \pi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx \\ &= \pi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{4} dx \\ &= \pi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} -\frac{1}{2} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(2x) dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Merk hvordan vi slipper å huske trigonometriske formler om vi husker Eulers formel!

$$\boxed{-12} \quad \int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} dx = -\log|1 + \cos(x)| + C$$

$$\boxed{-11} \quad \int e^x \sqrt{1 + e^x} dx = \frac{2}{3} (1 + e^x)^{3/2} + C$$

$$\boxed{-10} \quad \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{-9} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C$$

$$\boxed{-8} \quad \int_0^2 x/(x^2 + 16) = \frac{1}{2} \log|x^2 + 16| \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (\log(20) - \log 16) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{5}{4}\right)$$

$\boxed{-7}$ Dette integralet er temmelig likt som integralet i oppgave 22 i økt 1-1. Men la oss ta dette med Eulers formel:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \cos x dx &= \int_0^1 e^x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} e^{1+i} + \frac{1}{1-i} e^{1-i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right) \\ &= \frac{e}{2} \left(\frac{1}{1+i} e^i + \frac{1}{1-i} e^{-i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right) \\ &= \frac{e}{4} ((1-i)e^i + (1+i)e^{-i}) - \frac{1}{4} (1-i+1+i) \\ &= \frac{e}{2} (\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{-6} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \log a = \infty$$

$$\boxed{-5} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{a} = 1$$

$$\boxed{-4} \quad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\sqrt{a} - 2 = \infty$$

$$\boxed{-3} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} -\log a = \infty$$

$$\boxed{-2} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} - 1 = \infty$$

$$[-1] \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2$$

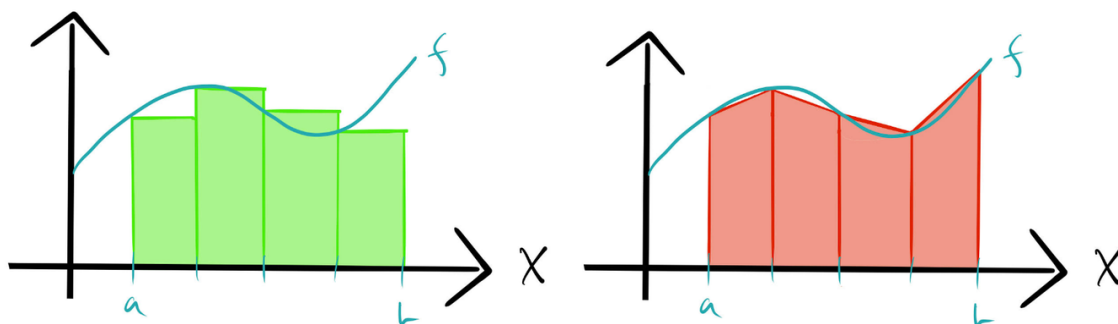
- [1] Poenget med dette er at e^{-x^2} ikke kan antideriveres slik du er vant til. Du må til med numeriske teknikker.
- [3] De øverste er nedre og øvre, mens de nederste er venstre og høyre. Beklager om du er blant de femten prosentene som lider av LRC.¹
- [5] Nope, ihvertfall ikke i den forstand du er vant til.
- [7] I denne mappen:
<https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/>
 finner du litt forskjellig.

Trapesmetoden er implementert på to forskjellige måter i trapes.py, slik at du kan se med egne øyne hvor inni hampen ineffektivt det er å kjøre for-løkker i python. (Koden regner ut arealet mellom μ og b standardavvik over μ . Siden normalfordelingen er speilingssymmetrisk om aksen $x = \mu$, er dette i bunn og grunn alt man trenger.)

Det finnes også rustkode for trapesmetoden. Med denne kan du se med egne øyne at i et "ordentlig" språk (altså et språk som er skrevet for tallknusing heller enn brukervennlighet), er det gjerne motsatt; for-løkker er helt sykt kjapt. Nyt også hvor lett det er å parallelisere i rust. (Takk til Gudbrand.)

I mappen finnes også et par andre koder basert på mer avanserte strategier for å beregne arealet under grafen numerisk. Dette kommer vi tilbake til.

Jeg har ikke implementert midtpunktmetoden eller riemannsummer, men jeg lover at både midtpunkt- og trapesmetoden kommer til å gi mer nøyaktige svar enn riemannsummene. Dette bør være klart om du tegner opp. Følgende figur sammenlikner trapesmetoden (høyre) og venstre riemannsum (venstre):



Du klarer sikkert å lage en tilsvarende figur for midtpunktmetoden.

- [8] Her er det bare å bytte ut standardnormalfordelingen med sincfunksjonen i koden fra forrige oppgave.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Left-right_confusion

9 Dette er oppgave 1 i økt 1-5, og er løst med gaussing der.

10 Symbolet Π (store pi) betyr produkt, og fungerer på samme måte som Σ bare med produkt istedet for sum. Hvis du synes det er uvant å tenke på dette symbolet, viste jeg et eksplisitt eksempel på konstruksjon av lagrangefunksjoner i forelesning. Det er ikke så vanskelig som det ser ut.

11 Dette er altså bare å skrive opp:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) + 2 \cdot l_3(x) \\ &= 1 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-3}{0-3} \\ &\quad + 0 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \\ &\quad + 1 \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-3}{2-3} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \end{aligned}$$

12 Hvis du ser nøye på en figur av trapesmetoden (for eksempel i lf til oppgave 7) samt skjønner hva interpolasjon handler om, vil du se at trapesmetoden er konstruert ved å interpolere med et første ordens polynom på hvert delintervall.

13 Her er det bare å brette opp ermene. Interpolasjonspolynomet er

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b} \\ &\quad + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{x-a}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\frac{a+b}{2} - b} \\ &\quad + f(b) \cdot \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

Å beregne integralene ser kjedelig ut, men litt smart bruk av produktregelen gjør alt mye enklere. Vi beregner

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) \, dx &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b)^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b (x-b)^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \left(a - \frac{a+b}{2}\right) (a-b)^2 - \frac{1}{6} (b-a)^3 \\ &= \frac{1}{4} (b-a)^3 - \frac{1}{6} (b-a)^3 = \frac{1}{12} (b-a)^3 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a) (x-b) \, dx &= \frac{1}{2} (x-a) (x-b)^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b (x-b)^2 \, dx \\ &= -\frac{1}{6} (b-a)^3. \end{aligned}$$

Den observante student vil nå innse at

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-b) dx \\ &= \frac{1}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$

siden $\frac{a+b}{2}$ ligger midt mellom a og b og de to integrandene er symmetriske om dette punktet. (Men regn det ut om du ikke tror meg; beregningen blir omtrent den samme. Jeg beregna først og oppdaget symmetrien etterpå.)

Simpsons regel blir altså

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &\approx f(a) \cdot \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot \frac{1}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{1}{a-b} \\ &\quad - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{1}{6}(b-a)^3 \frac{1}{\frac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{1}{\frac{a+b}{2} - b} \\ &\quad + f(b) \cdot \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot \frac{1}{b - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{1}{b-a} \\ &= f(a) \cdot \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{a-b} \\ &\quad - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{1}{6}(b-a)^3 \frac{2}{b-a} \cdot \frac{2}{a-b} \\ &\quad + f(b) \cdot \frac{1}{12}(b-a)^3 \cdot \frac{2}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)\end{aligned}$$

Herregud for en lang og kjedelig beregning. Definitivt en once in a lifetime experience å utlede Simpsons regel. Dette gjør jeg aldri igjen!



- 14 Det kjappeste jeg har fått til er en 40 nanosek, men det finnes folk i klassene over dere som har gjort det mye fortere. Gå på let etter en morsom fyr på elsys som heter Leo Laukvik og spør ham.

Jeg integrerte maclaurinrekken ledd for ledd. Dette får du lære om i uke 46. Kode: <https://folk.ntnu.no/mortano/normalfordelingen/rust/maclaurin/>

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1 Siden $\cos x \geq \cos 1 > 0$, og integranden er positiv på $[0, 1]$, kan vi skrive

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx \geq \int_0^1 \frac{\cos 1}{x} dx \geq \cos(1) \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Integralet divergerer.

- 2 **Løsning:** Et tredjeordens polynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der $a \neq 0$. Dersom polynomet skal gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$, har vi fire likninger

$$\begin{array}{lcl} 1 = p(0) = d & & \\ 2 = p(1) = a + b + c + d & \text{eller} & \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{array} \\ 3 = p(2) = 8a + 4b + 2c + d & & \\ 5 = p(3) = 27a + 9b + 3c + d & & \end{array}$$

om du foretrekker det.

Siden den første likningen sier at $d = 1$, kan vi umiddelbart forenkle til

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

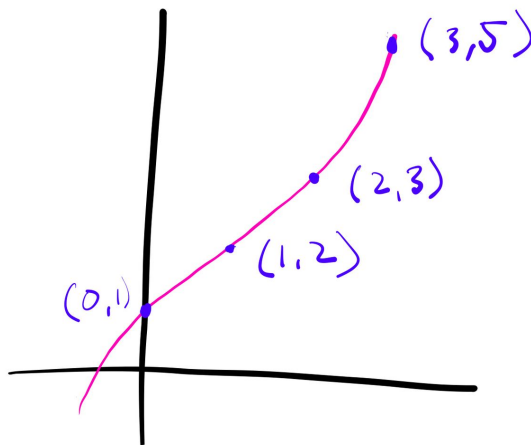
og gausseliminere

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 2 & \sim & 0 & 4 & 6 & 6 & \sim & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 4 & & 0 & 18 & 24 & 23 & & 0 & 0 & 6 & 8 \end{array}$$

slik at $c = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{6}$. Polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

Her er plot:



Det går også helt fint å bruke lagrangepolynomer, og skrive opp interpolanten på direkten:

$$\begin{aligned}
 p(x) = & 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \\
 & + 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\
 & + 3 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \\
 & + 5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}
 \end{aligned}$$

Det blir seff det samme, som du kan sjekke om du orker.

- 3 Dette er en klassiker i TMA4100, og du finner Selveste Seips løsningsforslag her:
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/lf_tma4100_2014h.pdf

1 - 10 - DIFFERENSIALLIKNINGER IV - LF

- 1 Vi deler likningene på hverandre og får

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{ax_1 - bx_1x_2}{-cx_2 + dx_1x_2} = \frac{x_1(a - bx_2)}{x_2(dx_1 - c)}$$

eller

$$\dot{x}_1 \left(d - \frac{c}{x_1} \right) = \dot{x}_2 \left(\frac{a}{x_2} - b \right)$$

som integreres til

$$dx_1 - c \ln |x_1| = a \ln |x_2| - bx_2 + C.$$

- 2 For eksempel

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gjør jobben.

- 3 Blir vel en trekvart enhetssirkel dette her. Den skal vi bruke mye de neste årene.

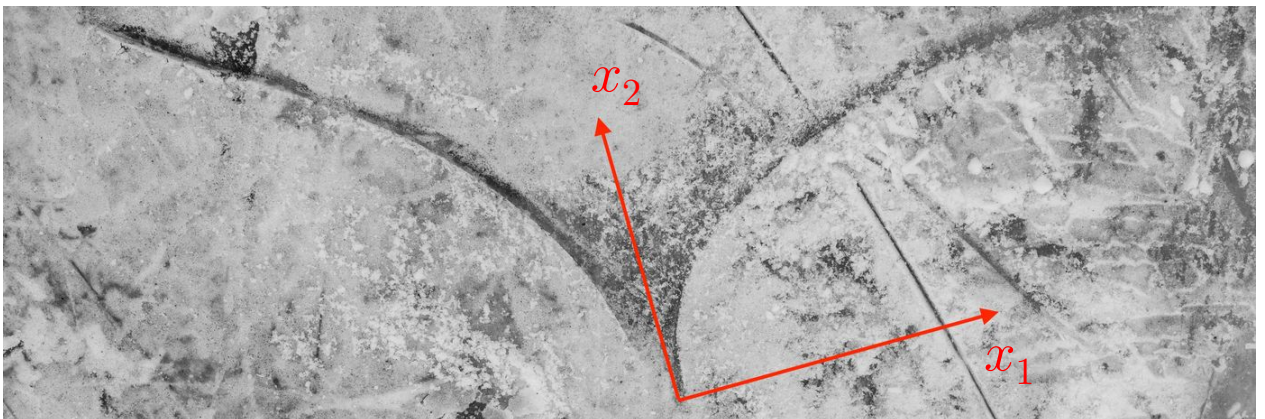
- 4 Dette blir en ellipse. Parametriseringen passer i ellipselikningen

$$\frac{x_1^2}{2^2} + x_2^2 = 1$$

så den er sentrert i origo og har halvaksler 2 og 1. Tangenten er

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

- 5 Tangenten er null i origo. Da kan kurven få en knekk, og kurven ser omtrent sånn ut:



- 6 Dette er bare en annen måte å spørre etter løsningen til balanseringen, som ble regna ut på den første siden i økt 1-5.

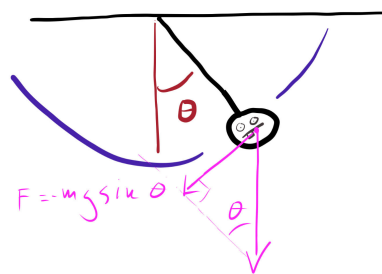
- 7 Newtons andre lov er $F = ma$. Kraften er $-mg \sin \theta$ og akselerasjonen er $a = l\ddot{\theta}$, slik at Newtons andre lov blir

$$-mg \sin \theta = ml\ddot{\theta}$$

eller

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

om du vil. Merk at massen til pendelen ikke har noe å si.



- 8 Hvis vi ganger opp med $ml\dot{\theta}$, får vi

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = 0$$

som integreres til (husk kjerneregelen!)

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta = C$$

som vi kjenner igjen som summen av kinetisk og potensiell energi (pendelens opphengspunkt er satt som nullnivå). I fysikkboken på videregående skole (ihvertfall i den fysikkboken vi brukte) var Newtons lover og konservering av totalenergi presentert som uavhengige konsepter. Men det er altså slik at den algebraiske likningen som forteller at energien er konservert, er en slags "løsning" av Newtons andre lov, som er en differensiallikning. Kunnskap om differensiallikninger er følgelig essensielt for å forstå grunnleggende fysikk.

Hvis du synes det er uvant å integrere ledd som $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ med kjerneregelen, kan du prøve å derivere $(\dot{\theta})^2$ og $\cos \theta$ og se hva du får. (Husk at θ er en funksjon av t , altså $\theta(t)$!)

- 9 Hvis vi ganger opp med $\dot{x}$, får vi

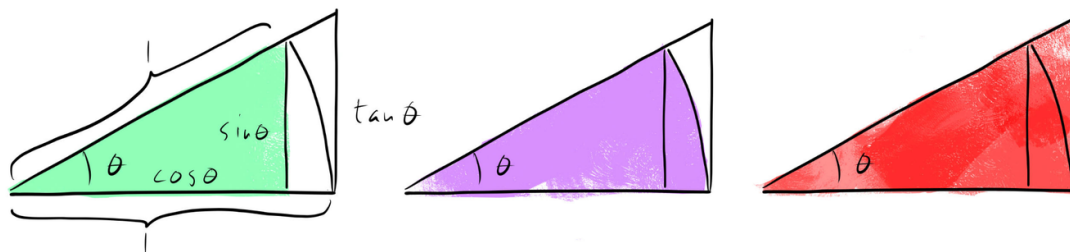
$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$$

som kan integreres på samme måte:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

Denne forteller også at totalenergien er konservert, det er bare systemets drivende kraft som er litt annerledes.

- 10 Her gjelder det å kjenne til følgende figur.



Alle barn i barnehagen ser at det grønne arealet er minst, det røde størst, og det fiolette mellom dem. Det grønne arealet er

$$V_1 = \frac{\cos \theta \sin \theta}{2},$$

det fiolette

$$V_2 = \frac{\theta}{2}$$

og det røde

$$V_3 = \frac{\tan \theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}.$$

Fra ulikheten $V_1 \leq V_2 \leq V_3$ får vi

$$\cos \theta \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Hvis vi antar at $\theta > 0$, og deler på $\sin \theta$, får vi

$$\cos \theta \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

og snur vi denne på hodet, får vi

$$\frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta.$$

Siden

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

går de ytterste uttrykkene begge mot 1, og da skjønner alle barn i barnehagen at også

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Den formelle regelen jeg har brukt kalles “skviseregelen”.¹ Dersom $\theta < 0$ blir argumentet helt likt, vi må bare tenke at arealene er negative og gjøre samme beregning.

- 11 Det karakteristiske polynomet er

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

som gir

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

og

$$\theta(t) = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

- 12 En hel runde av pendelens gang får vi når innmaten i de trigonometriske funksjonene over går fra for eksempel 0 til 2π . Med andre ord kan tiden T pendelen bruker på en periode kan hentes ut fra likningen

$$T \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi.$$

Du kan måle perioden til foucaults pendel ganske nøyaktig ved å filme en haug med perioder med telefonen din og telle dem og så bruke dette estimatet til å gå din vei og komme tilbake mange perioder senere (hvor mange avhenger av hvor bra estimat du sitter på) og filme et nytt tidspunkt og så videre. Jeg holdt på med dette en høst, og kom vel til at perioden var sånn ca. 10.075 sekunder, som gir en lengde på om lag 25 meter og 25 centimeter.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem

- 14 Løsningstrajektoriene skal jo helst ligge på kurvene

$$dx_1 + bx_2 - c \ln |x_1| - a \ln |x_2| = C$$

men vi ser tydelig fra figuren til høyre at eksplisitt Euler ikke klarer dette.

- 15 Her er kode:

`https://folk.ntnu.no/mortano/lotkavolterra/`

for å få et plott av f evaluert på den numeriske løsningstrajektorien. I mappen finner du også rustkode om du liker det.

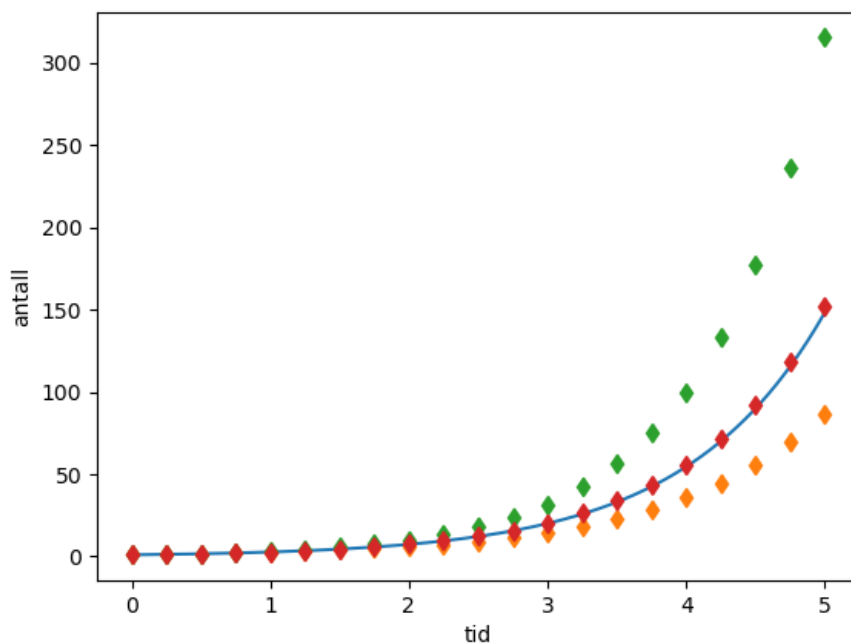
- 16 `https://folk.ntnu.no/mortano/pendelen/`

- 17 `https://folk.ntnu.no/mortano/vanderpol/`

- 18 Denne koden

`https://folk.ntnu.no/mortano/ecoli/`

produserer plottet under. De gule diamantene er eksplisitt euler, de grønne er implisitt euler, og de røde er trapesmetoden.



- 20 Dette blir i prinsippet det samme som oppgave 18.

- 21 Eulers implisitte metode på dette problemet blir

$$T_{n+1} = T_n - \frac{h}{T_{n+1}^2} \frac{e^{1/T_{n+1}}}{(e^{1/T_{n+1}} - 1)^2} (T_{n+1} - T_K).$$

Denne klarer du ikke å løse med penn og papir, så her må vi lære noe nytt for å komme i mål. Det nye kalles **numeriske likningslødere**, og er tema i kommende uke.

- 22 Spør Lars.

1 - 11 - LIKNINGER - LF

1-2 Se oppgave 6.

3-4 Du kan modifisere koden under til å løse dette problemet. Det som er interessant med oppgaven er at likningen $x \ln x = 1$ kan skrives om til formen $x = g(x)$ på minst to forskjellige måter. De to åpenbare er $x = e^{1/x}$ og $x = 1/\ln x$. For den første formen stabiliserer fikspunktiterasjonen seg på $r \approx 1.7632228343518968$ etter om lag 73 iterasjoner med $x_0 = 0.1$, mens for den andre formen konvergerer det ikke for noen startverdier.

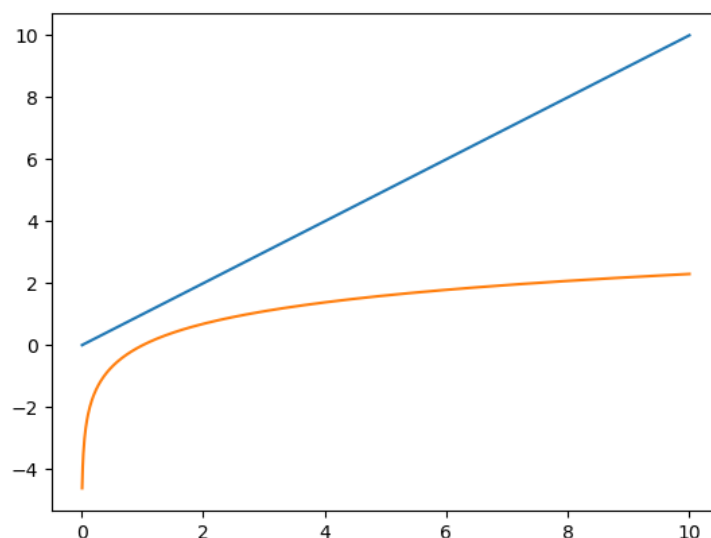
5-6 Her er min kode for å beregne iterasjoner for å finne dottietallet med fikspunktiterasjon (x) og Newtons metode (y):

```
import numpy as np
x=1
y=1

for i in range(15):
    x=np.cos(x)
    y=y-(y-np.cos(y))/(1+np.sin(y))
    print(x,y)
```

Newton går bra mye forttere, men feiler når x_0 er for langt unna den korrekte løsningen.

7 Et plott av $y = x$ og $y = \ln x$ avslører at dette problemet ikke har noen løsning. Ikke let etter løsningen før du vet at den eksisterer! MEN: Setter du $1 + 1j$ som startverdi og kjører $x_{n+1} = \ln x_n$, vil du få tak i den komplekse løsningen $r \approx 0.3181315052047577 + 1.3372357014306768i$



- 9 Kjører du Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ får du den reelle roten $r_1 = -1$ til maskinpresisjon på om lag ti iterasjoner. Kjører du med startverdi $x_0 = 1 + i$ får du den andre roten $r_2 = i$ på rundt fem iterasjoner, og har du gjort oppgave 25 fra økt 1 - 2, vet du at reelle polynomer alltid har komplekse røtter i komplekskonjugerte par, så den siste må være $r_3 = -i$. Vi kan dermed faktorisere polynomet som

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x + i)(x - i).$$

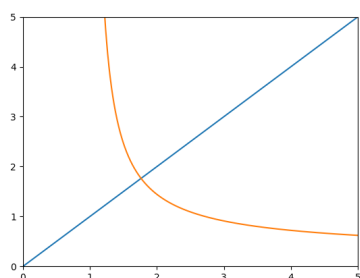
- 10-13 Det er lett å modifisere koden fra oppgave 6 til å løse alle disse.

- 16 Kjører du Newton med $x_0 = 0$ på det første polynomet får du den reelle roten $r = 1$ til maskinpresisjon på om lag ti iterasjoner.¹ Men kjører du den samme startverdien på det andre polynomet, stabiliserer det seg på $r = 0.9999999851925497$ etter om lag tredve iterasjoner. Hva skjer? Følg med senere i semesteret.
(Hvis du evaluerer polynomene litt smartere i newtoniterasjonen, får du en desimal eller to til. Google "Horner method polynomial evaluation".)

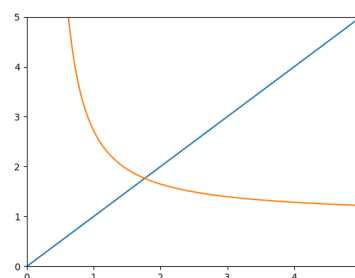
- 18 Likningen

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r)$$

indikerer at det er en god ide å sjekke om $|g'| < 1$. Hvis x_n og r ligger i et intervall der $|g'| < 1$, vil x_{n+1} ligge nærmere r enn x_n . Som erfart av oppgave 7 er det alltid en god ide å plote de involverte funksjonene før man går igang med å lete etter løsninger, så la oss gjøre dette.



$$g(x) = 1/\ln x$$



$$g(x) = e^{1/x}$$

På det venstre plottet er $|g'(r)| > 1$ og på det høyre er $|g'(r)| < 1$. Med andre ord kommer $x_{n+1} = e^{1/x_n}$ til å konvergere og $x_{n+1} = 1/\ln x_n$ ikke til å konvergere. Merk ellers at $e^{1/x}$ og $1/\ln x$ er hverandres inversfunksjoner. Dette gir oss et klassisk triks; siden inversderivasjonsformelen er gitt ved

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

og $r = g(r)$, kan du som regel finne r med iterasjonen $x_{n+1} = f^{-1}(x_n)$ dersom $x_{n+1} = f(x_n)$ ikke funker. Merk ellers at x_0 ikke nødvendigvis må ligge i et intervall der $|g'| < 1$ for at fikspunktiterasjonen skal konvergere. Iterasjonen $x_{n+1} = e^{1/x_n}$ konvergerer selv om du starter med x_0 mellom 0 og 1, for den sender x_1 opp i et område der $|g'| < 1$. Starter du med $x_0 < 0$, tar det to iterasjoner. Hvis du er teknisk anlagt, kan du finne et fullstendig konvergensbevis for fikspunktiterasjonen på side 44 her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf>

¹jeg vet det sto $x_0 = 1/2$ i oppgaven, men det er ikke så viktig

- 19 Denne hadde vi på konten i august, se oppgave 5:
<https://mortano.folk.ntnu.no/eksamen/tma4101-23k-1f.pdf>

- 20 Dersom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L_2$$

er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = L_1 + L_2.$$

Velg ϵ . Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n + y_n - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - L_1 - L_2| &= \\ |x_n - L_1 + y_n - L_2| &\leq \\ |x_n - L_1| + |y_n - L_2| \end{aligned}$$

Siden $\{x_n\}$ konvergerer mot L_1 , og $\{y_n\}$ mot L_2 , kan vi velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|y_n - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $n > N$ at

$$|x_n - L_1 + y_n - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise.

- 21 Siden

$$\frac{2(n+1)}{n} = \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n}$$

følger det fra forrige oppgave at denne grenseverdien må være 2.

- 22 Velg ϵ . Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|ax_n - aL| < \epsilon.$$

Men dette er trivielt siden

$$|ax_n - aL| = |a| \cdot |x_n - L|,$$

så vi kan velge N slik at $n > N$ impliserer $|x_n - L| < \epsilon/|a|$ (for $a = 0$ er det ingenting å vise) og så har vi at $|ax_n - aL| < \epsilon$ dersom $n > N$.

- 23 Jepsi pepsi. Bytt ut alle absoluttverditegn med kompleks modulus og så er du gudd.

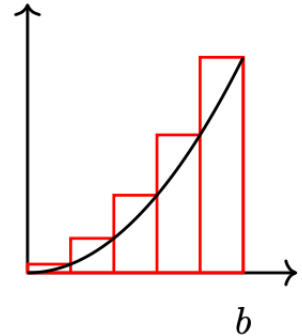
1 - 12 - REKKER - LF

- 1 La $f(x) = x^2$. Gitterpunktene blir

$$x_k = hk = \frac{bk}{n}$$

der indeksen k løper fra 0 til n . Riemannsummen blir

$$\sum_{k=1}^n hf(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} f\left(\frac{bk}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} \left(\frac{bk}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$



- 2 I tredje klasse på barneskolen viste vår klasseforstander Jodis oss at

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots = 50 \cdot 101.$$

Vi ble målløse av beundring, men når jeg i voksen alder skulle bruke det samme trikset, innså jeg at man må tenke seg litt mer om, for hvis du summerer et odde antall stigende heltall, ser det jo bittelitt annerledes ut. Formelen blir den samme, men om man som meg har ikke spesielt høy IQ, er det ikke helt innlysende. Derfor er det penest å gange ut

$$n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1) = -n + 2 \sum_{k=1}^n k$$

og løse for

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 3 Vi gjentar suksessen, ganger ut

$$n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) - 3 \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n$$

og løser for

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3 + 3 \left(\sum_{k=1}^n k \right) - n}{3} = \frac{n^3 + 3 \frac{n^2+n}{2} - n}{3} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Bruker vi oppgave 1 og stoler på at riemannsummen finner frem til integralet når $n \rightarrow \infty$, får

vi

$$\begin{aligned}
 \int_0^b x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \cdot \frac{1/n^3}{1/n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{1} \frac{2 + 3/n + 1/n^2}{6} = \frac{b^3}{3}.
 \end{aligned}$$

5 Vi får

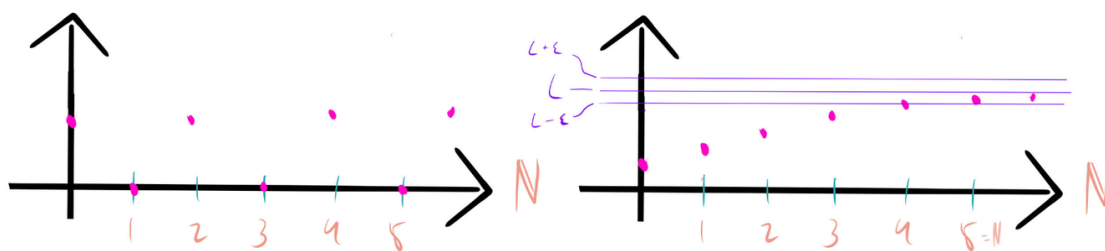
$$2L = 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = L - 1$$

som gir $L = -1$. Dette er åpenbart absurd. Vi har altså ikke funnet noen strategi vi kan stole helt på om vi ønsker å finne ut hva en rekke summerer til.

6 Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er **konvergent** dersom det finnes en L slik at det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $n > N$ impliserer

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

I figuren under er et maleri av partialsummene til den geometriske rekken evaluert i $x = -1$, sammenliknet med et maleri av en konvergent følge som konvergerer mot en verdi L . Jeg har tegnet inn en ϵ for illustrasjon. Husk at om det skal være konvergens skal denne kunne velges fritt, altså så liten man vil, og så må du alltid kunne finne N slik at følgen holder seg nærmere L enn ϵ for alle $n > N$.



Selv om følgen til venstre i figuren ikke konvergerer, er den **begrenset**; det finnes et tall M slik at leddene i følgen alltid er mindre enn M i absoluttverdi. Her er en faktoide. En begrenset følge har alltid en **konvergent delfølge**. Dette betyr at du får en konvergent følge om du hiver ut de leddene som ødelegger konvergens for deg, litt som når man cherrypicker data for å få en bestemt konklusjon.¹ I dette tilfellet må du hive ut annethvert ledd i følgen.

789 Disse oppgavene var så like, så la oss utlede en formel.

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^n (1 + x + x^2 + \dots) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^n}{1-x}$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Cherry_picking

Denne formelen gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1-1/(1+i)} = \frac{1+i}{1+i-1} = 1-i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1/(1+i)}{1-1/(1+i)} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^{-10}}{1-1/(1+i)} = \frac{1}{i(1+i)^9} = -\frac{1+i}{32}$$

- 10] Ballen faller først ned tre meter. På første sprett opp og ned igjen blir det $2 \cdot 3 \cdot 3/4$ meter, og på andre sprett $2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2$ meter og så videre, slik at total tilbakelagt distanse i meter blir

$$3 + 2 \cdot 3 \cdot (3/4) + 2 \cdot 3 \cdot (3/4)^2 + \dots = 3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 3 + 6 \cdot \frac{3/4}{1-3/4} = 21$$

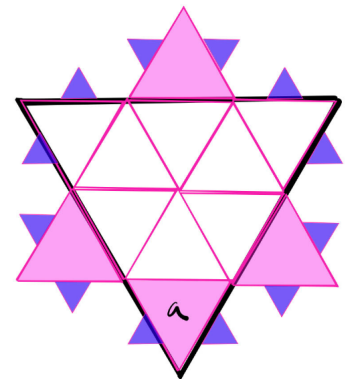
- 11] Dette blir en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor $1/\sqrt{2}$, som er en genial multiplikasjonsfaktor. En A4-side er nøyaktig halvparten så stort areal som en A3-side og dobbelt så stort areal som en A5-side, og du kan få en A5-side ved å kappe en A4-side i to parallelt med de korte sidene. Dette pene systemet er kun mulig dersom forholdet mellom sidekantene er nettopp $\sqrt{2}$. Hvis ikke dette er bra motivasjon for å lære geometriske rekker så vet ikke jeg.

- 12] La oss si at sidekanten i den opprinnelige trekanten er x , slik at omkretsen blir $3x$. Hvis du studerer figuren nøye og husker alt du har lært om likesidede trekanter på barneskolen, vil du se at omkretsen til den sekstaggete stjernen som er neste i rekken er $3x \cdot (4/3)$ siden man legger til en tredjedel av lengde på hver sidekant. Omkretsen til den neste greia blir $3x \cdot (4/3)^2$, og hvis vi lar $n \rightarrow \infty$, får vi

$$3x \lim_{n \rightarrow \infty} (4/3)^n = \infty.$$

Arealet er litt mer pjask, se figuren til høyre. Jeg måtte ha tre forsøk før jeg fikk det riktig. Utregningen blir enklest om man tar utgangspunkt i den lille rosa trekanten med areal a . Den opprinnelige trekanten består av ni slike, og har areal $9a = \sqrt{3}x^2/4$, slik at $a = \sqrt{3}x^2/36$. I neste lag blir det fire ganger så mange trekanter, men hver av dem har en niendedel av arealet til trekantene i laget før, og dette systemet fortsetter. Det totale arealet blir

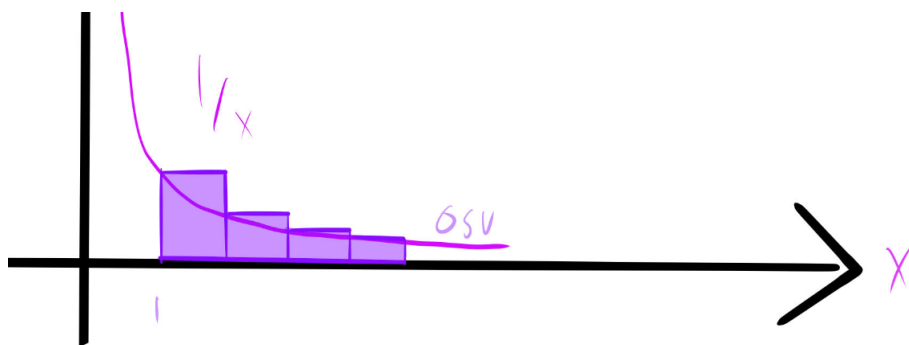
$$\begin{aligned} A &= 9a + 3a + \frac{12a}{9} + \frac{48a}{9^2} + \frac{192a}{9^3} + \dots \\ &= 9a + 3a \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots \right) \\ &= 9a + 3a \cdot \frac{1}{1-4/9} \\ &= 3a \left(3 + \frac{9}{5} \right) \\ &= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{36} x^2 \cdot \frac{24}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} x^2. \end{aligned}$$



H Jeg synes det peneste er å gjøre slik:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty\end{aligned}$$

Du kan også se det ved å betrakte denne figuren



og sammenlikne med

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Dette kalles **integraltesten**, se 6.2 i Arnes bok.

13 Her kan vi enten observere at siden $\sqrt{n} \leq n$ når $n \geq 1$, må

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

og følgelig divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vi kan også bruke integraltesten og huske at

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

som impliserer divergens.

14 Denne kan løses på samme måte som 13, men konklusjonen blir motsatt.

15 Sammenlikning med $\sum \frac{2}{n^2}$ gir konvergens på denne. Det går imidlertid også an å observere at

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

slik at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots = 1.$$

Dette kalles en **teleskoperende rekke**.

- 16 Denne tar vi enkelt med å sammenlikne med geometrisk rekke, siden

$$\frac{1}{n3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Det er i tillegg mulig se at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = \log\left(\frac{3}{2}\right),$$

men det må vi vente med til neste uke.

- 17 Siden $\sqrt{n} \leq n$ når $n \geq 1$, er også

$$2n = n + n \geq n + \sqrt{n}$$

som gir at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ divergerer.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1 Forholdstesten gir konvergens for $|x| < \frac{1}{3}$, siden

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-3x)^{n+1}/(n+1)|}{|(-3x)^n/n|} = |3x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |3x|.$$

Dersom $x = \frac{1}{3}$ får vi den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

som er konvergent. Dersom $x = -\frac{1}{3}$ får vi rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

som er divergent.

- 2 La oss begynne med å delbrøksoppspalte innmaten i rekken. Vi søker A og B slik at

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$$

Dersom vi ganger opp med $n(n-2)$ på begge sider, får vi likningen

$$1 = A(n-2) + Bn.$$

Nå er det slik at dersom venstre og høyre side skal være like, må de være like for hver potens av n . Det gir likningene

$$0 = A + B$$

og

$$1 = -2A$$

som burde gå greit å løse, det er jo ikke nødvendig å gausseliminere en gang, og vi kan skrive

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}.$$

Vi setter nå dette inn i rekken, og ser mønsteret:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

1 - 13 - POTENSREKKER - LF

- 1] Rekkeutviklingen til arctan-funksjonen er ganske lett å huske, så jeg husket den, og beregnet

$$\arctan\left(\frac{15}{19}\right) \approx \frac{15}{19} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{19}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{15}{19}\right)^5 = 0.69$$

som gir en vinkel på omtrent

$$\frac{0.69}{2\pi} \cdot 360 = 39.4$$

grader. Dette er helt feil vinkel, så antagelig husker jeg feile kateter. Tror kanskje det egentlig var 8 og 15, som gir

$$\arctan\left(\frac{8}{15}\right) \approx \frac{8}{15} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^5 = 0.49$$

og en vinkel på omtrent

$$\frac{0.49}{2\pi} \cdot 360 = 28.2,$$

for jeg husker at jeg sa til blikkenslageren at takvinkelen var omtrent 28 grader.

- 2] La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = x - s$ slik at $v'(s) = -1$. Vi beregner

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \int_0^x e^s ds \\ &= 1 - \int_0^x (-1) \cdot e^s ds \\ &= 1 - (x-s)e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \int_0^x (x-s)e^s ds \\ &= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s ds \end{aligned}$$

- 3] Vi kjører en gang til. La $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{2}(x-s)^2$ slik at $v'(s) = -(x-s)$, og

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \int_0^x (x-s)e^s ds \\ &= 1 + x - \int_0^x -(x-s)e^s ds \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}(x-s)^2 e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 e^s ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 e^s ds. \end{aligned}$$

- 4 Nå håper jeg du husker induksjonsbevis fra gymnaset. Hvis ikke, kan du lese kap. 1.10 i Arnes bok. Vi skal sjekke formelen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds.$$

og vi har allerede sjekket den for $n = 0$ (analysens fundamentalteorem), $n = 1$ og $n = 2$, så vi kan gå rett på induksjonssteget. Anta at likningen holder, og la $u(s) = u'(s) = e^s$ og $v(s) = \frac{1}{(n+1)!} (x-s)^{n+1}$ slik at $v'(s) = -\frac{1}{n!} (x-s)^n$. Vi beregner

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{n!} \int_0^x -(x-s)^n e^s ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} - \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} e^s \Big|_{s=0}^{s=x} + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^s ds \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^s ds. \end{aligned}$$

- 5 Du finner pythonkode her:
<https://folk.ntnu.no/mortano/python/plotte/taylor/>

- 6 Her er det lurt å se på

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds$$

som forteller oss noe om hvor mye taylorpolynomet bommer på den faktiske verdien til eksponensialfunksjonen. Alle barn i barnehagen skjønner at

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

slik at

$$\begin{aligned} \left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \right| &= \left| \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^s ds \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^x |(x-s)^n e^s| ds \\ &\leq \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-s)^n ds = \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

og setter vi $x = 1$, får vi

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| = \left| \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-s)^n e^s ds \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Nå vil onde tunger kanskje innvende at hvis vi ikke vet hva e er, hjelper ikke feilestimatet oss så mye. Men fakultetene stiger helt ekstremt fort. La oss si at vi visste $e < 3$. I så fall vet vi at

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Jeg skrev opp de desimalene jeg huska i farten, og det ser ut til å være rundt tjue stk. Hvis du går på wikipedia og sjekker fakulteter, vil du se at $25! \approx 10^{25}$, så noen og tjue ledd burde holde i massevis. Hvis du faktisk ønsker å sjekke, må du finne ut hvordan python regner med flere desimaler enn seksten. (Google “numpy extended precision”).

- 9] Dersom g er deriverbar på et intervall som inneholder både x_n og r , sier sekantsetningen at det må finnes en s mellom disse to slik at

$$g'(s) = \frac{g(x_n) - g(r)}{(x_n - r)} = \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)}$$

som gir at

$$x_{n+1} - r = g'(s)(x_n - r).$$

Denne likningen forteller oss noe om avstanden mellom iterasjonene og løsningen r , og vi ser nå hvorfor det er lurt å ha en viss peiling på hvorvidt $|g'| < 1$ før vi programmerer opp og trykker på kjøp.

- 11] Vi bruker Taylors teorem (husk at $f(r) = 0$)

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2$$

for s mellom x_n og r . Newtons metode er

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Trekker vi disse likningene fra hverandre, får vi

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2.$$

Her står det at

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

som sier at Newtons metode i mange situasjoner har kvadratisk konvergens. Det går an å sette opp presise kriterier for når dette skjer, men det skal vi ikke gjøre.

- 12] Dette uttrykket er relativt greit å derivere mange ganger:

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1-x} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

og hvis vi evaluerer i $x = 0$ og setter inn i Taylorformelen med $a = 0$, får vi

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

I retrospekt kom dette kanskje ikke som noe sjokk.

- 13] Her er det enklest å bruke forholdstesten. Vi beregner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

som gir konvergens for $|x| < 1$ og divergens for $|x| > 1$. For $x = 1$ får vi den harmoniske rekken, som er divergent, og for $x = -1$ får vi den alternerende harmoniske rekken, som konvergerer. Konvergensområdet er altså $[-1, 1)$.

14 Denne kan du gjøre på akkurat samme måte, men konvergensområdet blir $[-1, 1]$.

15-17 Samme her, bruk forholdstesten på akkurat samme måte, og sjekk endepunktene for konvergensområdet manuelt om det trengs.

18 Denne har vi allerede regnet ut geometrisk, men taylorrekken gjør slikt enklere å huske:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n+1)!} = 1$$

19 Samme her:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\theta^{2n-1}}{(2n)!} = 0$$

20 Og her:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} - 1 \right) \left(x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} \right) \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^6/2 + \dots}{x^3/3! - x^5/5! + \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^6/2 + \dots}{x^3/3! - x^5/5! + \dots} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3/2 + \dots}{1/3! - x^2/5! + \dots} = 3! \end{aligned}$$

21 Vi setter $-x^2/2$ inn for x i rekken for eksponentialfunksjonen:

$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}$$

Hvis du leser kapittel 6.7 i Arnes bok, vil du se at det går greit å integrere denne rekken fra 0 til 1, slik at

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Du finner pythonkode her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/python/kvadratur/normalfordeling/maclaurin.py>

- 22] Lett! Summen til en alternerende rekke approksimeres av partialsummene med en feil som alltid er mindre enn det første utelatte ledd i absoluttverdi. det første leddet er $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, og det andre er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)^1}{2^1 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = -\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$$

mens det tredje er

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \leq 10^{-2}$$

Vi trenger altså bare to ledd for å få en approksimasjon som er mindre enn 10^{-2} fra korrekt verdi.

- 23] Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = 1$.
- 24] Dette er eksponensialfunksjonen evaluert i $x = i$.
- 25] Cosinusfunksjonen evaluert i $x = 1$.
- 26] Arcustangensfunksjonen evaluert i $x = 1$.
- 27] Hehehe husker ikke helt hva jeg tenkte her, men denne hersker det faktisk litt usikkerhet om i fagfeltet:
https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_constant
- 28] Du gjettet helt riktig. Hvordan vi beregner e^A der A er en matrise, skal vi se på til våren.
- 29] Hvis du taylorutvikler eksponensialfunksjonen i nevneren i

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

med hensyn på λ , vil du se at Lord Rayleigh kun har fått med seg det første leddet i utviklingen.

- 30] Sjekk fotnoten helt til slutt her:
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_45.html Vi må fremdeles beregne at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

men det kommer til våren i TMA4106.

GAMLE EKSAMENSOPPGAVER MED LØSNING

- 1] Vi husker jo godt sinusfunksjonens taylorrekke om $a = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

som gir

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vi kan få lov til å integrere denne ledd for ledd

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} \Big|_0^1 \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \dots
 \end{aligned}$$

Den etterspurte tilnærmingen blir da

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18},$$

og siden det neste leddet i rekken er $1/600$ må feilen være mindre enn dette.

- 2 Vi bruker forholdstesten, og regner ut at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(-1)^n x^{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1$$

dersom $|x| < 1$. Dette impliserer at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. Vi sjekker endepunktene. For $x = 1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

og for $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

som begge er konvergente rekker. Konvergensområdet er altså $|x| \leq 1$. Det enkleste så, er å starte med geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

substituere $x = -s^2$:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{2n}$$

og så integrere hele greia fra 0 til x , og få

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- 3 Alle barn husker uttrykket for geometrisk rekke siden de har pugget det på skolen. Vi kan integrere denne leddvis:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Den siste rekken blir en konvergent alternerende rekke når $x = 1$, og vi ser at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Merk at rekkene for $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{1}{1+x}$ ikke konvergerer for $x = 1$.

- 4 Hvis vi deriverer den geometriske rekken, får vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},$$

og dersom denne evalueres i $x = \frac{1}{3}$, får vi

$$\frac{9}{4} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}.$$