TMA4101/4106/4111/4121

4 - 9 - TRANSPORT - LF

$\boxed{1}$ Hvis v er en konstant, sier transportlikningen

$$\dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0$$

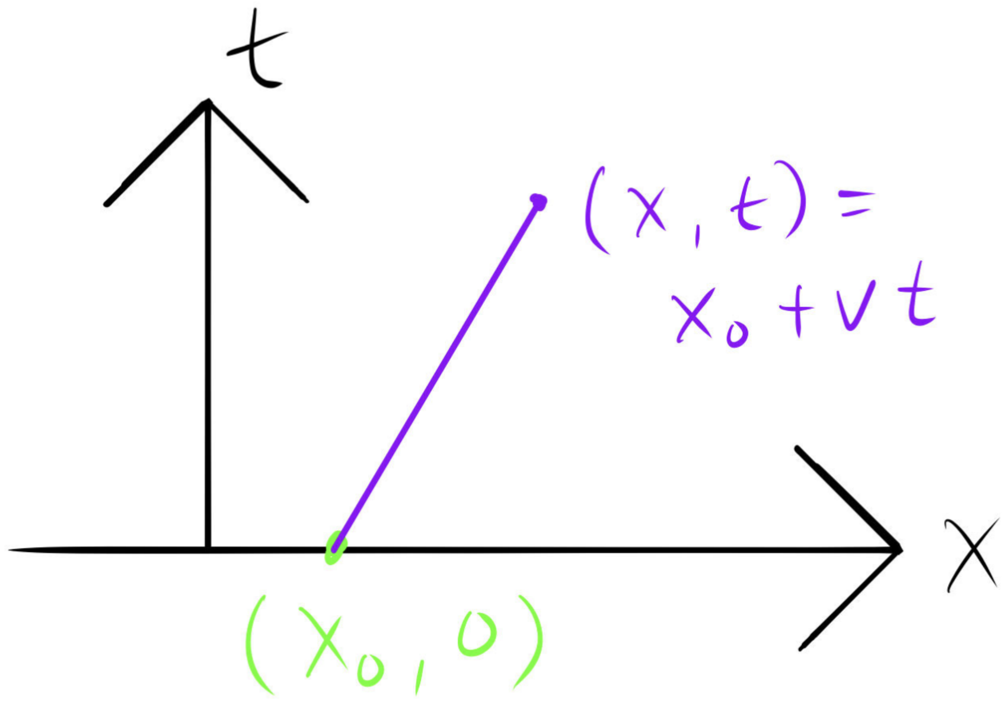
at den totalderiverte til ρ skal være null langs kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

siden

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho} + v \cdot \nabla \rho = 0.$$

Karakteristisk kurve betyr noe sånt som *en kurve der du kan klare å finne ut hva løsningen er*, og dette er det enkleste eksemplet.



$\boxed{2}$ I forrige oppgave viste vi at en eventuell løsning må være konstant på alle kurver på formen

$$x(t) = x_0 + vt,$$

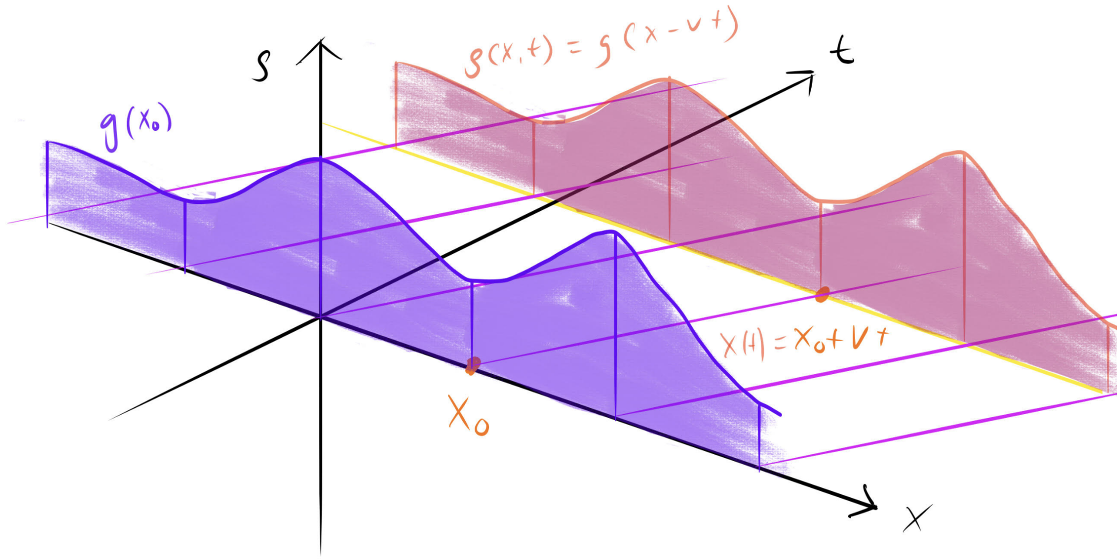
så med andre ord passer funksjoner på formen

$$\rho(x,t) = h(x - vt)$$

i likningen så lenge h er deriverbar. Derfor er også

$$\rho(x,t) = g(x - vt)$$

en løsning, og gjett hva, denne tilfredsstiller også initialkravet.



$\boxed{3}$ La oss undersøke hvordan løsningen oppfører seg langs de karakteristiske kurvene $x(t) = x_0 + vt$. Vi får

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla\rho(x_0 + vt, t) = -\gamma\rho(x_0 + vt, t)$$

eller

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) + \gamma\rho(x_0 + vt, t) = 0$$

om du vil. Denne likningen kan vi håndtere ved å gange hele greia med $e^{\gamma t}$ slik:

$$e^{\gamma t}\frac{d}{dt}\rho(x(t), t) + e^{\gamma t}\gamma\rho(x_0 + vt, t) = 0$$

og så skrive

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\rho(x(t), t)\right) = 0$$

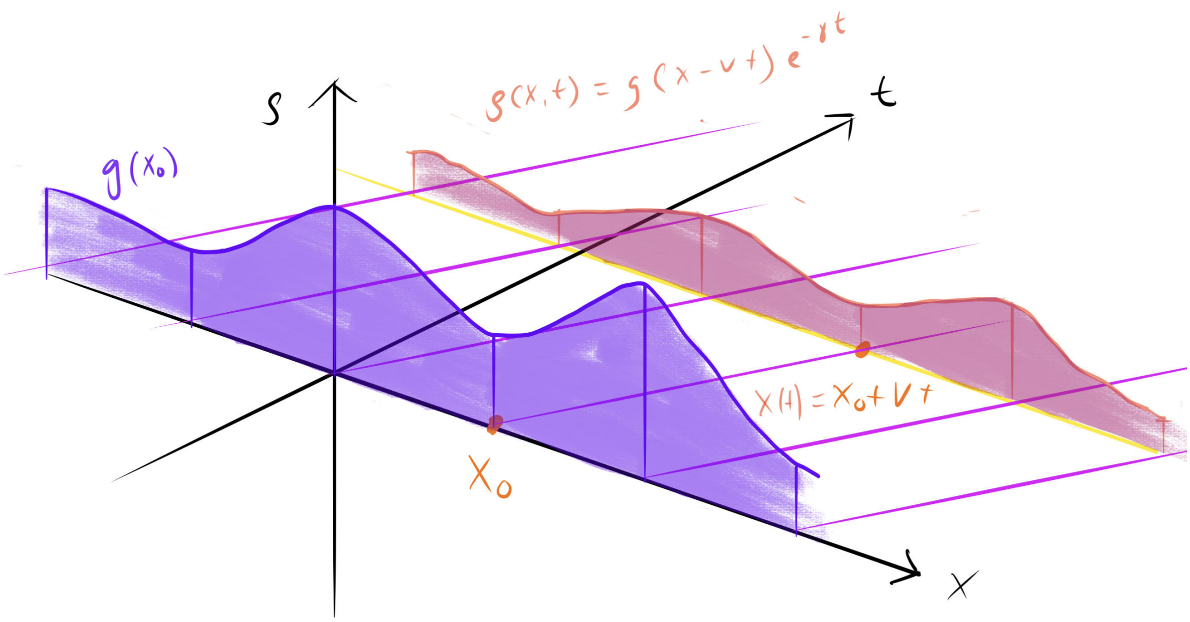
slik at

$$\rho(x(t), t) = ce^{-\gamma t}.$$

Denne likningen sier at løsningen skal være en konstant ganger $e^{-\gamma t}$ på hver karakteristisk kurve, så om vi setter

$$\rho(x, t) = g(x - vt)e^{-\gamma t}$$

har vi noe som tilfredsstiller både differensiallikningen og initialkravet.



$\boxed{4}$ Hvis vi evaluerer løsningen ρ på de karakteristiske kurvene fra forrige oppgave, får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \frac{d}{dt}\rho(x_0 + vt, t) = \dot{\rho}(x_0 + vt, t) + v \cdot \nabla\rho(x_0 + vt, t) = f(x_0 + vt, t)$$

og hvis vi integrerer denne likningen fra 0 til t, får vi

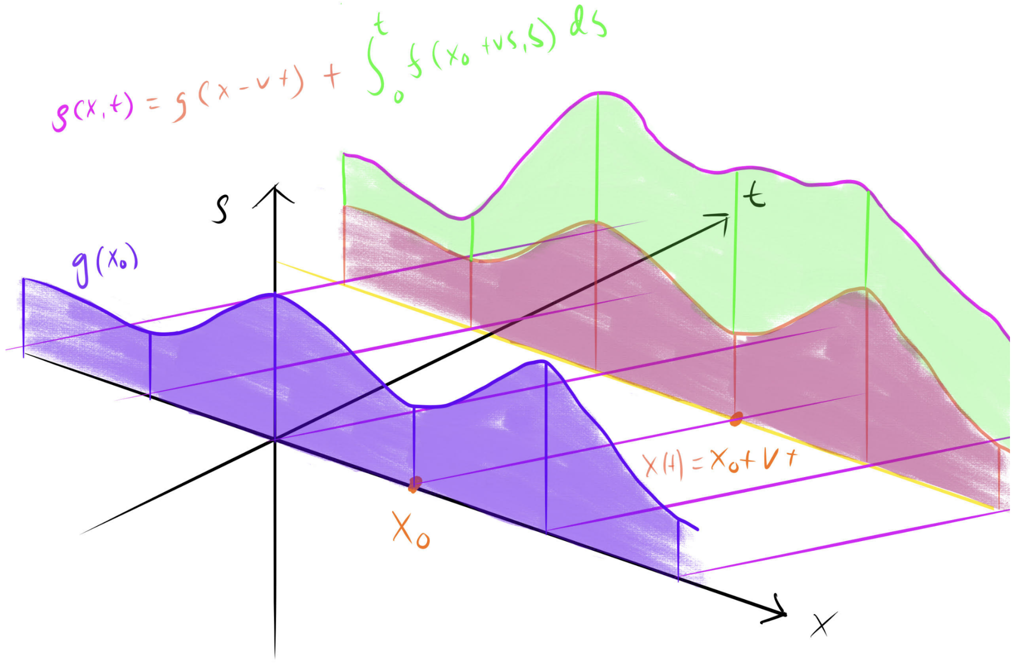
$$\rho(x(t),t) - \rho(x(0),0) = \int_0^t f(x(s),s)\, ds = \int_0^t f(x_0 + vs, s)\, ds$$

slik at

$$\rho(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x_0 + vs, s)\, ds.$$

Men $x_0 = x - vt$, så vi kan skrive dette enda penere slik:

$$\rho(x,t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x + v(s-t), s)\, ds$$



$\boxed{5}$ Her er trikset å se at dersom $x(t)$ tilfredsstiller $\dot{x}(t) = v(x)$, får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \dot{\rho}(x(t),t) + \dot{x}(t) \cdot \nabla\rho(x,t) = \dot{\rho}(x(t),t) + v(x) \cdot \nabla\rho(x,t) = 0.$$

Vi må følgelig finne x slik at $\dot{x}(t) = v(x)$.

$\boxed{6}$ Likningen $\dot{x} = x$ lærte vi å løse i TMA4101 og løsningen er

$$x = x_0 e^{at}$$

så ρ må være konstant på disse kurvene. Hvis x_0 og x skal være relatert på denne måten og ρ skal tilfredsstille initialkravet $\rho(x,0) = g(x)$, må vi følgelig ha

$$\rho(x,t) = g(xe^{-at}).$$

Dersom $v(x) = ax + b$, får vi

$$x = (x_0 + b/a)e^{at} - b/a$$

slik at

$$(x + b/a)e^{-at} - b/a = x_0$$

og

$$\rho(x,t) = g((x + b/a)e^{-at} - b/a).$$

$\boxed{7}$ Kontinuitetslikningen blir

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho(1-\rho)) = 0$$

som gir

$$\dot{\rho} + (1 - 2\rho)\nabla\rho = 0.$$

$\boxed{8}$ Hvis vi krever $\dot{x}(t) = \rho(x(t), t)$, får vi

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t),t) = \dot{\rho}(x(t),t) + \dot{x}(t)\cdot\nabla\rho(x,t) = \dot{\rho}(x(t),t) + \rho(x(t),t)\cdot\nabla\rho(x,t) = 0.$$

Nå ser vi at siden ρ ikke endres på denne kurven, gir $\dot{x} = \rho$ at stigningstallet til kurven må være konstant, altså en rett linje:

$$x(t) = \rho t + b$$

der stigningstallet ρ er det samme som løsningens verdi på linjen. Dette var en uventet positiv dreining mot håndterbarhet! Løsningen er som før gitt ved

$$\rho = f(x - \rho t)$$

der f kan være hva som helst så lenge det er deriverbart. Dersom $f = g$ (initialkravet) ser vi at vi får $u(x, 0) = g(x)$. Men nå er ρ implisitt gitt, og derfor kommer det an på initialkravene om det er mulig å beregne ρ og om ρ gir fysisk mening, og herfra og utover er noe for komplisert for oss.