

4 - 8 - VARME

- 1 Partikkelflukstettheten er gitt ved ρv , så Ficks lov blir

$$\rho v = -D \nabla \rho$$

og antar vi at D ikke endrer seg i rom eller tid, får vi diffusjonslikningen

$$\dot{\rho} = D \Delta \rho$$

om vi setter fick inn i kontinuitetslikningen.

- 2 La oss tenke at temperaturen er gitt ved funksjonen $T(x, t)$, der x er de romlige koordinatene og t er tidspunktet. La Ω være et område i $\mathbb{R}^3$. Tidsendringen i varmeenergien i Ω er

$$\frac{d}{dt} \left(\rho c \int_{\Omega} T dx \right) = \rho c \int_{\Omega} \dot{T} dx.$$

der massetettheten ρ og den spesifikke varmekapasiteten c er antatt konstante. Det er også antatt at T er glatt nok til at vi bare kan slenge tidsderivasjonen inn under integraltegnet. Varmen som slipper ut gjennom $\partial\Omega$ er

$$\int_{\partial\Omega} q \cdot dS$$

og om det ikke produseres varme i Ω , må vi ha

$$\rho c \int_{\Omega} \dot{T}(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} q \cdot dS.$$

Bruker vi divergensteoremet på varmekraften, får vi

$$\rho c \int_{\Omega} \dot{T}(x, t) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot q dx.$$

og dersom dette skal gjelde for alle områder Ω , må

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot q = 0.$$

- 3 Da er det bare å sette

$$q = -\kappa \nabla T$$

inn i

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot q = 0.$$

og anta at κ er konstant, så får vi

$$\rho c \dot{T} = \kappa \Delta T.$$

Dersom κ varierer i enten tid eller rom (begge disse forekommer, for κ kan være temperatur-avhengig og mediet kan være anisotropt), får vi den mer kompliserte likningen

$$\rho c \dot{T} - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0.$$

- 4 La y_m og y_n være to egenfunksjoner. Her må vi først ta en delvisintegrasjon og se at

$$\int_0^\pi y_m''(x)y_n(x) - y_m(x)y_n''(x) dx = y_m'(x)y_n(x) - y_m(x)y_n'(x) \Big|_0^\pi.$$

Nå ser vi at det siste uttrykket er null både for dirichlet- og neumannrandkrav, og bruker vi $-y''(x) = \lambda y(x)$, får vi

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^\pi y_m(x)y_n(x) dx = \int_0^\pi y_m''(x)y_n(x) - y_m(x)y_n''(x) dx = 0.$$

Dersom $\lambda_n = \lambda_m$ blir det mer komplisert, og dette har konsekvenser for energinivåene i molekyler:

https://en.wikipedia.org/wiki/Degenerate_energy_levels

Det kommer vi tilbake til.

- 5 Setter vi $u(x, t) = z(t)y(x)$ inn i varmelikningen, får vi

$$\dot{z}y = \alpha z \Delta y$$

og deler vi på αzy , får vi

$$\frac{\dot{z}}{\alpha z} = \frac{\Delta y}{y}$$

som må være konstant siden den ene siden kun avhenger av x og den andre kun av t . Kaller vi konstanten $-\lambda$ (dette er mest praktisk), får vi

$$\dot{z} + \alpha \lambda z = 0 \quad \text{og} \quad \Delta y + \lambda y = 0.$$

- 6 Trippelintegrerer vi

$$u\Delta v - v\Delta u \, dx = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u)$$

får vi

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) \cdot dS$$

og bruker vi divergensteoremet på høyresiden, får vi

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot dS.$$

- 7 Dette er samme resonnement som i oppgave 4, la $u = y_m$ og $v = y_n$.

- 8 Vi har masse løsninger på formen

$$u_n = e^{-\alpha \lambda_n t} y_n(x).$$

Dersom det nå er mulig å dekomponere g i egenfunksjonene y_n , kan vi gjøre som i 4106 og skrive

$$u(x, t) = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n c_n e^{-\alpha \lambda_n t} y_n(x)$$

der c_n er fourierkoeffisientene til f :

$$c_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)} \quad (1)$$

Den eneste jobben som gjenstår er å finne alle egnevektorene og egenverdien til laplaceoperatoren for området Ω . Dette går i noen kjente tilfeller. Et av de mest kjente eksemplene finner du i hydrogenatomet:

https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics