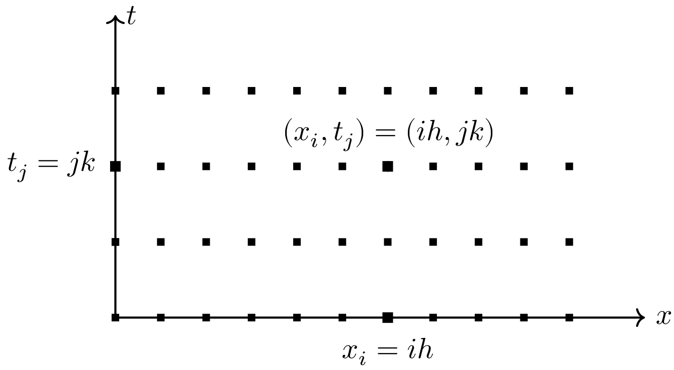
TMA4101/4106/4111/4121

4 - 7 - TESTEKSAMENSSETT - LF

$\boxed{1}$ Varmelikningen i én dimensjon er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Vi gitrer opp aksene slik:



og definerer

$$u_{ij} \approx u(x_i, t_j).$$

Hvis vi nå setter den første ordens differansen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x, t+k) - u(x,t)}{k}$$

inn på venstre side og den andre ordens differansen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

inn på høyre side, får vi det eksplisitte endeligdifferanseskjemaet

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

for varmelikningen.

$\boxed{2}$ Maclaurinrekken til sinusfunksjonen er

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

så laurentrekken til integranden om $z_0 = 0$ blir

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3 \cdot 3!} + \frac{1}{z^5 \cdot 5!} - \cdots$$

Residyet er koeffisienten a_{-1} til $\frac{1}{z}$ i denne rekken, så

$$\int_\Gamma \sin\left(\frac{1}{z}\right)\, dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i.$$

$\boxed{3}$ Her er Maxwells likninger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

Tidsnvarians betyr at ingenting endres med tiden, og da er alle tidsdervierte null, slik at vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

Likningen $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ impliserer at $\mathbf{E}$ er gradienten til et skalarfelt:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Vi setter dette inn i den første likningen over, og får

$$-\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

slik at

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$\boxed{4}$ Vi setter

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) = v(r, \theta)$$

La oss først derivere litt. Med hensyn på r får vi

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta$$

og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \right) \sin \theta
\end{aligned}$$

Så deriverer vi med hensyn på θ, og får

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta$$

og

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} =& \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\theta\right) \\
=& -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} r \sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \theta} r \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin\theta \\
=& -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\theta\right) r \sin\theta \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\theta\right) r \cos\theta \\
& - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin\theta
\end{aligned}
$$

Hvis du nå tar noen av disse og deler litt på noen r-er og setter dem sammen og gjør alle kanselleringene, vil du se at vil du se at

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}
$$

$\boxed{5}$ Vi vet at

$$
u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \tag{1}
$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$
u(x,0) = f(x)
$$

får man

$$
\phi(x) + \psi(x) = f(x)
$$

og dersom man bruker

$$
u_t(x,0) = g(x),
$$

får man

$$
-c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x),
$$

eller

$$
-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt + C
$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$
2\psi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt + C
$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi får vi

$$
2\phi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int^x g(t)\, dt - C
$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int^{x+ct} g(t)\, dt - \int^{x-ct} g(t)\, dt\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\, dt,
\end{aligned}
$$

Merk at fra nest siste til siste linje spiller ikke nedre integrasjonsgrense noen rolle, det er derfor den er utelatt.

$\boxed{6}$ Svd-faktoriseringen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

finner vi ved å beregne egenverdier og egenvektorer til

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

og for

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = 0 \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Nå kan vi sette opp enten full svd:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

eller redusert svd:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ Ok, jeg skjønner at mange synes denne oppaven er litt corny, men den er her for at vi skal venne oss til at det finnes mange mange forskjellige indreprodukter, og ortogonalitsbegrepet avhenger av indreproduktet. Hvis du har et indreprodukt og et endeligdimensjonalt vektorrom, finnes det alltid en ortogonal basis for dette vektorrommet med hensyn på indreproduktet, og denne oppgaven ber deg finne en slik for $\mathbb{R}^2$. La oss gjøre det enkelt og ta en tilfeldig vektor og så finne en som er ortogonal til denne. Hvis vi velger

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$A\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

er *vanlig ortogonal* på denne, så hvis vi setter

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

får vi

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

som etterspurt. Vektorene $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ er ikke ortogonale i den forstanden du er vant til, men derimot ortogonale med hensyn på indreproduktet

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}.$$

$\boxed{8}$ La oss begynne med å derivere $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. Her må man holde tungen beint i munnen. Det er best å skrive

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{matrix} a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ a_{21}x_2x_1 + a_{12}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n \end{matrix}$$

Den deriverte av denne er rekkevektoren

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= \begin{matrix} (2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})\, x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{n1})\, x_n, \\ (a_{21} + a_{12})\, x_1 + 2a_{22}x_2 + \cdots + (a_{2n} + a_{n2})\, x_n, \\ \vdots \\ (a_{n1} + a_{1n})\, x_1 + (a_{n2} + a_{2n})\, x_2 + \cdots + 2a_{nn}x_n) \end{matrix} \\ &= \mathbf{x}^T \left(A + A^T\right) \\ &= 2\mathbf{x}^T A \end{aligned}$$

Dersom $\mathbf{x}$ er en søylevektor, får vi altså

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A - \mathbf{b}^T = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T$$

som har entydig nullpunkt i $A^{-1}\mathbf{b}$ siden A er positivt definitt, og dermed er inverterbar siden ingen av egenverdiene kan være null. Hessematrisen blir bare A, og siden denne er positivt definitt må det kritiske punktet være et minimumspunkt.

$\boxed{9}$ Her ble det litt tull med oppgavenummerering. Kondisjonstallet er største singulærverdi på minste singulærverdi, så kondisjonstallet til matrisen i oppgave 6 er $\sqrt{3}$, mens kondisjonstallet til matrisen i oppgave 7 er 3.

$\boxed{10}$ Aksiomene for lengde er:

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

En matrise kan helt fint ha kun egenverdier som er null uten å være nullmatrisen. I såfall blir

$$\rho(A) = 0$$

uten at $A = 0$, og dette strider mot det første aksiomet. Et eksempel er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$