4 - 5 - MER LINEÆRALGEBRA

$\boxed{2}$ Både A^TA og AA^T er symmetriske, og symmetriske matriser er som kjent ortogonalt diagonaliserbare.

$\boxed{3}$ Dersom A har dimensjon $n \times p$, har A^TA og V dimensjon $p \times p$ mens AA^T og U er $n \times n$.

$\boxed{4}$ Dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor til A^TA med egenvektor $\lambda \neq 0$, kan vi gange likningen

$$A^TA\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

med A og få

$$AA^TA\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v}$$

som sier at $A\mathbf{v}$ er en egenvektor til AA^T med den samme egenverdien. Dersom $\lambda = 0$ bryter dette sammen siden $A\mathbf{v} = 0$ og nullvektoren ikke klassifiserer som egenvektor. Resonnementet den andre veien er likt, og egenvektorene til AA^T kaller vi $\mathbf{u}$. Egenverdiene må være større enn null, siden

$$0 \leq \|A\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^TA^TA\mathbf{v} = \lambda\|v\|^2.$$

$\boxed{5}$ Beregningen i oppgaven over viser at dersom $\|\mathbf{v}\| = 1$ er

$$\|A\mathbf{v}\| = \sqrt{\lambda}.$$

$\boxed{6}$ I de foregående oppgavene har vi vist at

$$A\mathbf{v} = \sqrt{\lambda}\mathbf{u}$$

der $\mathbf{v}$ er en egenvektor til A^TA og $\mathbf{u}$ er en egenvektor til AA^T, begge normaliserte og med egenverdi $\lambda \neq 0$. Setter vi opp alt dette i en matriselikning, får vi

$$AV = U\Sigma$$

der Σ er en diagonal og kvadratisk matrise med singulærverdiene på diagonalen. Dette kalles den **reduserte svd-faktoriseringen** til A. Dersom A^TA eller AA^T har egenverdier som er null kan vi utvide faktoriseringen til å inkludere de korresponderende egenvektorene, men disse er sjelden nyttige i praktiske anvendelser. Svd-faktoriseringen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

finner vi ved å beregne egenverdier og egenvektorer til

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

og for

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

som er

$$\lambda_1 = 3 \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \lambda_3 = 0 \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Du kan nå selv sjekke at

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dette kalles egentlig **redusert svd**. Vi kan inkludere den siste egenvektoren til AA^T, og skrive

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

som kalles **full svd**.

7 `https://folk.ntnu.no/mortano/python/katt/`

8 Aksiomene er

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Vi har jo allerede i TMA4106 sjekket at $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ er et indreprodukt, så det første er greit. Aksiom to følger av lineariteten til indreproduktet, mens aksiom tre er trekantulikheten; se her: `https://folk.ntnu.no/mortano/grunnstoff/2-7.pdf`

9 Å vise at aksiomene er sanne for disse to er trivielt. Det som er interessant er tolkningen. Disse er spesialtilfeller av p-normen

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}.$$

1-normen

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_k |x_k|$$

får du når $p = 1$, mens

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$$

er det du får når $p \to \infty$. Etterhvert som p stiger vil den største komponenten dominere de andre under kvadratrottegnet, slik at vi får og når p er stor nok, vil

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p} \approx \sqrt[p]{|x_l|^p} = |x_l|$$

der x_l er det største elementet.

$\boxed{10}$ Vi må skissere algebraiske kurver på formen

$$x^p + y^p = 1$$

Dersom $p = 1$ får vi fire likninger på formen

$$\pm x + \pm y = 1$$

alt etter i hvilken kvadrant vi er i, så vi får en klassisk diamant. For $p = \infty$ får vi likningen

$$|x| + |y| = 1$$

som rett og slett blir enhetskvadratet. For $p = 2$ får vi den vanlige enhetssirkelen, og for andre p for vi forskjellige mellomting mellom $p = 1$ og $p = \infty$, se figur her:
`https://math.stackexchange.com/questions/1746413/p-norm-with-p-to-infinity`

$\boxed{11}$ For eksempel matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

duger, vi får likningen

$$\begin{aligned} 1 =& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ =& 2(x^2 + xy + y^2) \\ =& \frac{3}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 \\ =& \frac{(x + y)^2}{2/3} + \frac{(x - y)^2}{2} \end{aligned}$$

Dette er en ellipse med halvakser $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$, rotert førtifem grader på koordinataksene.

Dette leder oss inn på **matrisenormen indusert av** $\|\cdot\|$:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

$\boxed{12}$ Dette var kanskje litt hardt for TMA4121. Vi dropper det. Du kan tenke på matrisenormen til A som det lengste A er istand til å *strekke en vektor*.

$\boxed{13}$ Dette var ikke så ille. Siden U og V er ortogonale matriser, endrer de ikke lengden på noe som helst, og vi kan skrive

$$\|A\mathbf{x}\| = \|U\Sigma V^T\mathbf{x}\| = \|\Sigma\mathbf{z}\|$$

der $\mathbf{z} = V^T\mathbf{x}$. Det siste uttrykket maksimeres helt klart dersom $\mathbf{z}$ er den første standardbasisvektoren i $\mathbb{R}^n$. Dette skjer dersom $\mathbf{x}$ er den singulærvektoren med størst singulærverdi, og vi får

$$\|A\mathbf{x}\| = \sigma_1.$$

$\boxed{14}$ Vi gausser

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og ser tydelig at både rad- og kolonnerommet er todimensjonalt.

Men nå må vi huske på at lineær avhengighet er en platonsk abstraksjon. Du finner aldri tre dønn lineært avhengige vektorer i en anvendelse der det er målefeil og unøyaktigheter og fuglene vet hva. Det som i praksis kan skje, er derimot at vektorer er *nesten lineært avhengige*, og dette skaper all slags problemer i praksis.

Så hva vil det si at vektorer er nesten lineært avhengige? Dette kan skje på to måter.

$\boxed{15}$ Vektorer er nesten uavhengige dersom likningen

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_n\mathbf{v}_n$$

impliserer at $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. La oss tenke at vi bare har maskinpresisjon å jobbe med. Laptopen din ser ikke forskjell på 0 og 10^{-16}, så vektorer er for alle praktiske formål lineært avhengige dersom en lineærkombinasjon av dem summerer til en vektor med komponenter i størrelsesordenen maskinpresisjon eller lavere. Dette kan du fint få til med to vektorer som er nesten parallelle eller nesten ligger i samme plan eller noe i den dur. Du kan også få det til dersom de har en forskjell i lengde på størrelsesorden 10^{16}.

$\boxed{16}$ Vi er enige om at 2-normen til A er den største signulærverdien. Dersom A er inverterbar, er

$$A^{-1} = \left(U\Sigma V^T\right)^{-1} = V\Sigma^{-1}U_T$$

Det er lett å invertere en diagonalmatrise; det er bare å dele på diagonalelementene, så det er klart at den største singulærverdien til A^{-1} er en delt på den minste til A, slik at

$$\kappa(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

$\boxed{18}$ En matrise kan helt fint ha kun egenverdier som er null uten å være nullmatrisen. I såfall blir

$$\rho(A) = 0$$

uten at $A = 0$, og dette strider mot det første aksiomet. Et eksempel er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$