TMA4101/4106/4111/4121

4 - 4 - BØLGER

$\boxed{1}$ Dette var pensum i TMA4106, og å anse som repetisjon. Det kommer ikke på eksamen.

$\boxed{2}$ Ditto.

$\boxed{3}$ Jeg spurte ikke om denne i TMA4106, men burde gjort det, så her blir du redda av gongongen.

$\boxed{4}$ Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x+ct) + \psi''(x-ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\phi''(x+ct) + c^2\psi''(x-ct)$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen.

$\boxed{5}$ Vi vet at

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \psi(x+ct) \tag{1}$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x,0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$u_t(x,0) = g(x),$$

får man

$$-c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c}\int^x g(t)\ dt + C$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\psi(x) = f(x) + \frac{1}{c}\int^x g(t)\ dt + C$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi får vi

$$2\phi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\int^x g(t)\ dt - C$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \phi(x+ct)+\psi(x-ct) \\ =& \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\left(\int^{x+ct} g(t)\,dt-\int^{x-ct} g(t)\,dt\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(t)\,dt, \end{aligned}$$

Merk at fra nest siste til siste linje spiller ikke nedre integrasjonsgrense noen rolle, det er derfor den er utelatt.

$\boxed{6}$ Rotasjonen til $\mathbf{F}$ er

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

og tar vi dobbelrotasjonen, får vi (lykke til Linn)

$$\begin{aligned} \nabla\times\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \\ &= \qquad \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) \qquad - \qquad \Delta\mathbf{F} \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ I tomt rom er $\rho=0$ (ingen ladning) og $\mathbf{J}=\mathbf{0}$ (ingen strøm), så likningene blir

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}&=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\dot{\mathbf{B}} \\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0 \\ c^2\nabla\times\mathbf{B}&=\dot{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

Vi deriverer Maxwells siste lov med hensyn på t og får

$$c^2\nabla\times\dot{\mathbf{B}}=\ddot{\mathbf{E}}$$

og dersom vi setter Maxwells andre lov inn i denne, får vi

$$-c^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\ddot{\mathbf{E}}.$$

Nå er det bare å bruke forrige oppgave, og skrive

$$-c^2 (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}) = \ddot{\mathbf{E}}.$$

Det første leddet kansellerer på grunn av Maxwells første lov, og vi står igjen med

$$\ddot{\mathbf{E}} = c^2 \Delta \mathbf{E}$$

Med andre ord impliserer Maxwells lover at elektriske felt reiser rundt som bølger. Utledningen for magnetiske felt er identisk.

$\boxed{8}$ Maxwells likninger for tomt rom er

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \dot{\mathbf{E}}
\end{aligned}$$

Vi putter $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}$ og $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ct)}$ inn i likningene, og får

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \\
\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= c\mathbf{B}_0 \\
\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \\
c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 &= -c\mathbf{E}_0
\end{aligned}$$

Den første og den tredje likningen sier nå at $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ står normalt på $\mathbf{k}$, mens andre og fjerde likning sier begge at $\mathbf{E}_0$ og $\mathbf{B}_0$ og er ortogonale på hverandre.

$\boxed{9}$ Vi setter

$$u(x, y) = u(r \cos\theta, r \sin\theta) = v(r, \theta)$$

La oss først derivere litt. Med hensyn på r får vi

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta$$

og

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta \right) \cos\theta + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\theta \right) \sin\theta
\end{aligned}$$

Så deriverer vi med hensyn på θ, og får

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\theta$$

og

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} =& \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)\\
=& -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}r\sin\theta + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\theta}r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\\
=& -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)r\sin\theta\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)r\cos\theta\\
&-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\end{aligned}$$

Hvis du nå tar tre av disse og deler litt på noen r-er og setter dem sammen og gjør alle kanselleringene, vil du se at

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} =& \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\sin\theta\right)\\
&+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\\
&+\frac{1}{r^2}\Bigg(-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)r\sin\theta\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\Bigg)\\
=& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Vi setter inn, og får

$$\ddot{x}(t)y(r)z(\theta) = x(t)y''(r)z(\theta) + \frac{1}{r}x(t)y'(r)z(\theta) + \frac{1}{r^2}x(t)y(r)z''(\theta)$$

og så deler vi på $x(t)y(r)z''(\theta)$ og får

$$\frac{\ddot{x}(t)}{x(t)} = \frac{y''(r)}{y(r)} + \frac{1}{r}\frac{y'(r)}{y(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{z''(\theta)}{z(\theta)}$$

Det vanlige argumentet gir at begge sider må være konstante, og følgelig at

$$\ddot{x} + \lambda x = 0.$$

Hvis vi nå skriver

$$-\lambda = \frac{y''(r)}{y(r)} + \frac{1}{r}\frac{y'(r)}{y(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{z''(\theta)}{z(\theta)}$$

ganger opp med r^2 og flytter litt, får vi

$$r^2\left(\lambda + \frac{y''(r)}{y(r)}\right) + r\frac{y'(r)}{y(r)} = -\frac{z''(\theta)}{z(\theta)}$$

som gir at

$$z'' + \gamma z = 0$$

og

$$y'' + \frac{1}{r}y' + \left(\lambda - \frac{\gamma}{r^2}\right)y = 0$$

$\boxed{\text{11-12}}$ Oppgave 11 er ikke så spennende og oppgave 12 er for hårete for eksamen, så vi gir oss her.