TMA4101/4106/4111/4121

4 - 3 - Å HERPE EN TROMME - LF

$\boxed{1}$ Divergensteoremet sier at

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot dS$$

Dersom $F = \nabla u$, får vi

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u = \int_{\Omega} \Delta u$$

på den ene siden, og

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot dS = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

der n er enhetsnormalvektoren ut av $\partial\Omega$, og

$$\frac{\partial u}{\partial n}$$

betyr den retningsderiverte til u ut av $\partial\Omega$. Divergensteoremet kan altså skrives slik:

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

$\boxed{2}$ Lett! Divergensteoremet gir

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

som sier noe sånt som at dersom potensialet til et flytfelt er harmonisk, er utfluksen alltid null ut av områder. Dette betyr at det ikke kan være noe netto opplagring av greier noe sted.

$\boxed{3}$ Vi antar at vektorfeltet er

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da blir divergensteoremet

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \int_{\partial\Omega} F_1 n_1 \, dS$$

der n_1 er den første komponenten i n. Tilsvarende gjelder for F_2 og F_3, så vi kan skrive opp den generelle regelen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} u n_k \, dS.$$

$\boxed{4}$ Vi kan putte uv inn i den forrige formelen, og få

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_k} + \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_k} = \int_{\partial\Omega} uvn_k\, dS.$$

som kalles **delvisintegrasjonsformelen** i flere dimensjoner. Dette er en generalisering av formelen du er vant til fra skolen.

$\boxed{5}$ Dette blir nå veldig greit. Anta det finnes to løsninger, og trekk dem fra hverandre. Vi kaller differansen v. Siden laplaceoperatoteren er lineær, er v harmonisk, og i tillegg må $v = 0$ på $\partial\Omega$ siden den er differansen mellom to funksjoner som tilfredsstiller det samme randkravet. Vi bruker delvisintegrasjonsformelen på hvert ledd i Δv, og får

$$0 = -\int_\Omega \Delta v = \int_\Omega \|\nabla u\|^2.$$

Siden innmaten i det siste integralet ikke kan være negativt, må den alltid være null. Kombinerer vi dette med at $v = 0$ på $\partial\Omega$, ser vi at v er nødt til å være null overalt, og følgelig finnes det bare én løsning.

$\boxed{6}$ Her er Maxwells likninger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad c^2\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

Tidsnvarians betyr at ingenting endres med tiden, og da er alel tidsdervierte null, slik at vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad c^2\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}$$

$\boxed{7}$ Likningen $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ impliserer at $\mathbf{E}$ er gradienten til et skalarfelt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Vi setter dette inn i den første likningen over, og får

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

slik at

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Dersom vi er i tomt rom, er $\phi = 0$, slik at

$$\Delta\phi = 0.$$

$\boxed{8}$ Siden differansen mellom to løsninger av poissons likning med samme høyreside er harmonisk, blir denne identisk med oppgave 5.

$\boxed{9}$ Denne finner du på side 138 her:
`https://folk.ntnu.no/mortano/notater/sivingmatte.pdf`
(I denne beregningen er det en faktor 2 feil, glemte slik en i definisjonen av sinus hyperbolicus.)

$\boxed{10}$ La $\Omega(x,r)$ være kulen sentrert i x og med radius r, og la

$$z(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} z_1(\theta,\phi) \\ z_2(\theta,\phi) \\ z_3(\theta,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + r\cos\theta\sin\phi \\ x_2 + r\sin\theta\sin\phi \\ x_3 + r\cos\phi \end{pmatrix}$$

være parametriseringen til kuleskallet, med enhetsutnormalvektor

$$n(\theta,\phi) = \frac{\partial z}{\partial n} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$$

og flateelement $r^2\sin\phi\ d\phi d\theta$. Vi beregner så (husk den nye varianten av divergensteoremet fra oppgave 1!):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega(x,r)} u\,dS\right) =& \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(z(\theta,\phi))\sin\phi\ d\phi d\theta\right) \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\Big(u(z(\theta,\phi))\Big)\sin\phi\ d\phi d\theta \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u'\big(z(\theta,\phi)\big)\cdot\frac{\partial z}{\partial n}\sin\phi\ d\phi d\theta \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u'\big(z(\theta,\phi)\big)\cdot\frac{\partial z}{\partial n} r^2\sin\phi\ d\phi d\theta \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega(x,r)} \frac{\partial u}{\partial n}\ dS \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{\Omega(x,r)} \Delta u = 0.
\end{aligned}$$

Siden integralet

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS$$

er konstant som funksjon av r, kan vi ta

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS = \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial\Omega} u\ dS = u(x).$$

$\boxed{11}$ La

$$z(s,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_1 + s\cos\theta\sin\phi \\ x_2 + s\sin\theta\sin\phi \\ x_3 + s\cos\phi \end{pmatrix}$$

være en parametrisering av $\Omega(x, r)$, med volumelement $s^2 \sin\phi \, d\phi\theta ds$. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega u \, dx &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Big(u(z(s,\theta,\phi))\Big) s^2 \sin\phi \, d\phi d\theta ds \\
&= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Big(u(z(s,\theta,\phi))\Big) \sin\phi \, d\phi d\theta \right) s^2 ds \\
&= \int_0^r \Big(u(x) 4\pi\Big) s^2 \, ds \qquad \text{(fra forrige oppgave)} \\
&= \frac{4\pi r^3}{3} u(x).
\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Dersom $u(x)$ alltid skal være lik gjennomsnittsverdien til u i området rundt x, kan ikke u ha lokale maksimums- eller minimumspunkter. Hvis du hadde for eksempel et lokalt maksimum, ville alle u sine verdier i området rudnt maksimumspunktet vært lavere enn i maksimumspunktet, og det motsier jo middelverdisatsen.

Harmoniske funksjoner er rotasjonsinvariante. Dette betyr at om du roterer koordinatsystemet ditt, vil de rene andrederiverte fortsatt summere til null. Dette kan vi vise ved en totrinnsprosess.

$\boxed{13 - 14}$ Disse var kanskje litt harde for eksamen, men om du er interessert, finner du dem her: `https://ntnu.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=a5c7d8b8-f57f-4959-b150-a`

$\boxed{15}$ Denne er også litt for hårete for eksamen.

$\boxed{16}$ La oss ta $\mathbb{R}^3$; den for $\mathbb{R}^2$ er ikke så interessant. Laplaces likning er

$$\frac{2}{r} u_r + u_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} u_{\phi\phi} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} u_\theta + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$$

i kulekoordinater, og dersom u ikke skal avhenge av ϕ og θ, får vi

$$\frac{2}{r} u_r + u_{rr} = 0.$$

Det er vanlig å kalle denne løsningen $\phi(r)$, av grunner som snart blir klart. Ganger vi likningen med r^2, får vi

$$0 = 2r\phi'(r) + r^2 \phi''(r) = \frac{d}{dr}\left(r^2 \phi(r)\right)$$

slik at

$$\phi'(r) = \frac{c_1}{r^2}$$

og

$$\phi(r) = c_2 - \frac{c_1}{r}.$$

Hvis du ser nøye på dette, vil du se at dersom du velger konstantene riktig, blir u potensialet til coloumbkraften:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r}.$$

Dette er ikke tilfeldig. La oss integrere Poissons likning

$$-\Delta u = \delta$$

over $\Omega \in \mathbb{R}^3$, og få

$$-\int_\Omega \Delta u = \int_\Omega \delta = \begin{cases} 1 & \mathbf{0} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{0} \notin \Omega \end{cases}$$

Dersom vi setter inn uttrykket for ϕ på venstre side og bruker at

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{\epsilon_0} \nabla \phi(r)$$

og så bruker divergensteoremet, får vi

$$\frac{\epsilon_0}{q} \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot dS = \begin{cases} 1 & \mathbf{0} \in \Omega \\ 0 & \mathbf{0} \notin \Omega \end{cases}$$

som er i overenssstemmelse med våre tidligere beregninger. Vi tolker derfor coloumbpotensialet som *impulsresponsen til laplaceoperatoren* dersom konstantene settes til $c_1 = \frac{1}{4\pi}$ og $c_2 = 0$.