4 - 10 - BØLGER - LF

$\boxed{1}$ Vi får

$$p_0 + p = c(\rho_0 + \rho)^\gamma$$

og deler vi denne på

$$p_0 = c\rho_0^\gamma$$

får vi

$$1 + \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma.$$

Vi husker så på taylorrekken til $(1+x)^\gamma$, eller binaomialformelen om du vil:[1]

$$(1+x)^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma}{n} x^n = 1 + \gamma x + \cdots$$

Dersom vi antar at ρ/ρ_0 er et lite tall, gir det mening å bruke den lineæere approksimasjonen og skrive

$$\left(1 + \frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \approx 1 + \gamma\frac{\rho}{\rho_0}$$

slik at

$$p \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\rho.$$

$\boxed{2}$ Setter vi inn $\rho + \rho_0$ i kontinuitetslikningen får vi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho)v) = 0.$$

For det første er $\dot{\rho}_0 = 0$, så dette blir

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho_0 v) + \nabla \cdot (\rho v) = 0.$$

eller

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot v + (\nabla \cdot \rho)v + \rho\nabla \cdot v = 0$$

om du vil. Hvis du nå ser på disse leddene, ser du at vi ikke har gjort antagelser på noen av de deriverte, men vi vet at ρ og v er bitte små, så de to siste leddene er bittesmå siden de er ganget med henholdsvis ρ og v, så da får vi

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot v \approx 0.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_series

$\boxed{3}$ La oss først massere likningen

$$\dot{v} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla(p_0 + p)}{\rho_0 + \rho}$$

litt og skrive den som

$$(\rho_0 + \rho)\,(\dot{v} + (v \cdot \nabla)v) = -\nabla p.$$

i produktet på venstre hånd kan vi ta ut ρ og $(v \cdot \nabla)v$ siden de er bitte små, og få

$$\rho_0 \dot{v} \approx -\nabla p$$

slik at

$$\dot{v} \approx \frac{-\nabla p}{\rho_0}$$

$\boxed{4}$ Da tar vi siste likning fra forrige oppgave og setter den inn i $\ddot{p} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \dot{v}$ og får

$$\ddot{p} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \dot{v} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \left(\frac{-\nabla p}{\rho_0} \right) = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \Delta p.$$

$\boxed{5}$ Vi partiellderiverer med hensyn på x to ganger, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x + ct) + \psi''(x - ct)$$

og

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \phi''(x + ct) + c^2 \psi''(x - ct).$$

Denne passer helt klart i bølgelikningen.

$\boxed{6}$ Vi vet at

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{1}$$

passer i bølgelikningen. Dersom man bruker

$$u(x, 0) = f(x)$$

får man

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x)$$

og dersom man bruker

$$\dot{u}(x, 0) = g(x),$$

får man

$$c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x),$$

eller

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \left(\int_0^x g(s)\, ds + \phi(0) - \psi(0) \right).$$

Vi har nå et lineært 2×2-likningssystem for ϕ og ψ. Legger vi likningene sammen, får vi

$$2\phi(x) = f(x) + \frac{1}{c} \left(\int_0^x g(s)\, ds + \phi(0) - \psi(0) \right)$$

og trekker vi dem fra hverandre, får vi

$$2\psi(x) = f(x) - \frac{1}{c}\left(\int_0^x g(s)\,ds + \phi(0) - \psi(0)\right)$$

Vi setter nå alt sammen igjen:

$$\begin{aligned}u(x,t) =&\phi(x+ct) + \psi(x-ct)\\ =&\frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} g(s)\,ds - \int_0^{x-ct} g(s)\,ds\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Vi utvider f slik

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x) & x \leq 0 \\ f(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

og g slik:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -g(-x) & x \leq 0 \\ g(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

D'Alembert gir oss nå

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds.$$

I dette problemet er x alltid positiv, så vi trenger å skille mellom når $x-ct$ er positiv og negativ. Så lenge $x \geq ct$, får vi bare

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

mens når $x \leq ct$ kan vi bruke den odde utvidelsen og få

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) - f(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

Hvis du syntes det var vanskelig å få rett fortegn på det siste integralet, er det bare å huske at integralet til en odde funksjon er jevn, og beregne

$$\begin{aligned}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds &= \int_0^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds - \int_0^{x-ct} \tilde{g}(s)\,ds\\ &= \int_0^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds - \int_0^{ct-x} \tilde{g}(s)\,ds\\ &= \int_0^{x+ct} g(s)\,ds - \int_0^{ct-x} g(s)\,ds = \int_{ct-x}^{x+ct} g(s)\,ds.\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Vi beregner først (la g være kulekoordinattransformasjonen)

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u\ dS = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(g(r,\theta,\varphi))\ \sin\varphi d\varphi d\theta.$$

Denne er lett å derivere med hensyn på r:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}(r,t) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \nabla u(g(r,\theta,\varphi))\frac{\partial g}{\partial r}\ \sin\varphi d\varphi d\theta \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \nabla u \cdot dS \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{B(x,r)} \Delta u = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r \int_{\partial B(x,s)} \Delta u\ dS
\end{aligned}$$

For ikke å snakke om dobbeltderivere:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{u}(r,t) =& \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r\int_{\partial B(x,s)} \Delta u\ dS\right) \\
=& \frac{-2}{4\pi r^3}\int_{B(x,s)} \Delta u + \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \Delta u\ dS
\end{aligned}$$

Da er det bare å sette sammen ingrediensene slik:

$$\begin{aligned}
c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{u} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right) =& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} c^2\Delta u\ dS \\
=& \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} \ddot{u}\ dS \\
=& \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B(x,r)} u\ dS = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}
\end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Vi beregner først

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}U =& r\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u} \\
=& rc^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{u} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right) \\
=& c^2\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{u} + 2\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right) \\
=& c^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\bar{u} + r\frac{\partial}{\partial r}\bar{u}\right) = c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}U.
\end{aligned}$$

Nå er det bare å bruke formelen fra oppgave 7, med $0 \le r \le ct$, og skrive

$$U(r,t) = \frac{1}{2}\left(F(r+ct) - F(ct-r)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{r+ct} G(s)\ ds$$

og så

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \lim_{r\to 0} \frac{U(r,t)}{r} \\
=& \lim_{r\to 0} \left(\frac{(F(r+ct) - F(ct-r))}{2r} + \frac{1}{2rc} \int_{ct-r}^{r+ct} G(s)\, ds \right) \\
=& F'(ct) + \frac{1}{c} G(ct) \\
=& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} f\, dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} g\, dS.
\end{aligned}
$$

$\boxed{10}$ Så da er f noe som ser litt ut som diracpulsen i området rundt origo, og dette kan vi tenke på noe som tilfører litt bevegelsesmengde momentant, husk oppgave 39 og 40 i økt 2-2:
`https://mortano.folk.ntnu.no/stoff/2-2.pdf`
og kirchhoff gir

$$
u(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B(x,ct)} g\, dS \right).
$$

Integranden g er null på $\partial B(x,ct)$ helt til radien ct begynner å nærme seg origo, og når ct har passert origo blir det stille igjen. Dette er ikke det som skjer i to dimensjoner - når du kaster en stein på et vannspeil, får du bølger som fortsetter å bevege vannspeilet lenge etter at bølgefronten har passert.