TMA4101/4106/4111/4121

3 - 8 - TRIPPELINTEGRALER

Denne uken leser vi kapittel 14.5-14.7 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

14.5: 1-12, 17-20 og 27-29

14.6: 1-18

14.7: 13-38

Trippelintegral fungerer omtrent som dobbeltintegral, men det er vanskeligere å visualisere. Vi integrerer funksjoner fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}$. Du kan tenke på funksjonen som massetetthet eller ladningstetthet i rom, og på integrasjonsområdet Ω som en ting du ønsker å finne den totale ladningen til. Fysikere skriver

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$$

men matematikere liker kanskje bedre å skrive

$$\iiint_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \qquad \text{eller bare} \qquad \iiint_\Omega f$$

La oss begynne med noe enkelt. I oppgaven under er integrasjonsområdet en rektangulær boks. Integralene utføres fra innerst til ytterst.

$\boxed{1}$ Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x^2y + z\,dzdydx.$$

Dersom $x^2y + z$ er massetetthet, hvordan vil du tolke det innerste integralet

$$g(x,y) = \int_0^3 x^2y + z\,dz?$$

Hva med de to innerste integralene

$$h(x) = \int_0^2 \int_0^3 x^2y + z\,dzdy?$$

Det vanskelige kommer når integrasjonsområdet ikke er rektangulært. La oss prøve Adams sitt eksempel med tetraederformet integrasjonsområde. I de tre neste oppgavene er Ω et tetraeder med hjørner i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$.

$\boxed{2}$ Overflaten til Ω består av fire plan som har hver sin likning. Finn dem.

$\boxed{3}$ Skriv opp integralet

$$\iiint_T x^2y + z\,dV$$

på seks forskjellige måter.

Hvis du tenker på integranden som massetetthet (kilo/kubikkmeter) og Ω som en klump med masse, er trippelintegralet f over Ω den totale massen til klumpen. Massesenteret $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ er gitt ved

$$m_1 = \frac{\iiint_\Omega x_1 f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}, \qquad m_2 = \frac{\iiint_\Omega x_2 f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}, \qquad m_3 = \frac{\iiint_\Omega x_3 f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}{\iiint_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}.$$

$\boxed{4}$ Anta at massetettheten til et objekt formet som Ω er gitt som $\delta(x, y, z) = xz$. Finn massen og massesenteret til objektet.

Nå tar vi en litt vanskeligere en.

$\boxed{5}$ Et område D er definert ved gitt ved ulikhetene $0 \leq z \leq 1 - |x| - |y|$. Skisser området og skriv opp

$$\iiint_D x^2 y + z\, dV$$

på seks forskjellige måter. (Oppg 14.5.7 fra Adams.)

Hvis du vil trippelintegrere en funksjon f over et domene D som er enhetskuleformet, blir det et svineri uten like i vanlige koordinater:

$$\iiint_D f\, dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-x^2}}^{\sqrt{1-y^2-x^2}} f(x, y, z)\, dz dy dx$$

Heldigvis finnes det koordinatskift. Man må finne en parametrisering av integrasjonsområdet hvis definisjonsmengde er en rektangulær boks. Akkurat som med linje- og flateintegraler må man huske å kompensere for farten til parametriseringen. La oss først se litt på volumer.

$\boxed{6}$ En funksjon $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

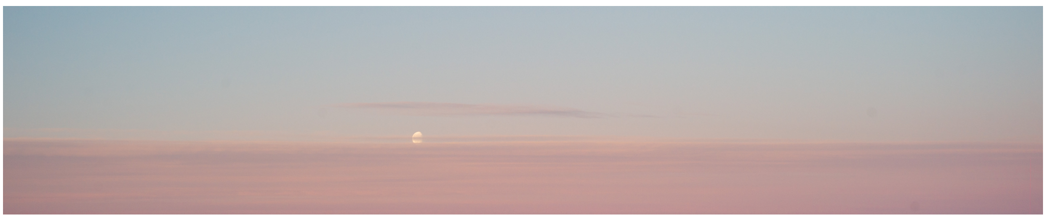
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Finn volumet av $\mathbf{F}(\Omega)$ dersom $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Akkurat som tidligere er det bare å gange volumet til Ω med determinanten til matrisen (som jo er volumet til parallellepipedet utspent av kolonnene) for å finne volumet til $\mathbf{F}(\Omega)$ så lenge $\mathbf{F}$ er en lineæravbildning. Men når koordinattransformasjonen ikke er lineær, blir det mer komplisert, og vi må integrere for å finne volum.

$\boxed{7}$ La $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ være en funksjon fra $D \to \mathbf{R}^3$, der $D \in \mathbb{R}^3$, og la Ω være bildet av D gjennom $\mathbf{z}$. Forklar at volumet til Ω er

$$\int_\Omega d\mathbf{z} = \int_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_3} \right| d\mathbf{x}$$



Det finnes to veldig viktige koordinattransformasjoner. Dersom integrasjonsområdet er formet som en sylinder parallell med z-aksen, bruker man sylinderkoordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ Regn ut

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

der $R = \{(x, y, z) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 9 \text{ og } 0 \le z \le 5\}$.

$\boxed{9}$ Finn volumet av den delen av kjeglen

$$z^2 \ge x^2 + y^2$$

som ligger innenfor kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$\boxed{10}$ Regn ut

$$\iiint_T z\sqrt{x^2 + y^2}\,dV$$

der legemet Ω er gitt ved $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y \ge 0$.

Den andre viktige transformasjonen er kulekoordinater:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\sin\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\phi
\end{aligned}
$$

Her er θ vinkelen du er vant med i xy-planet, og ϕ vinkelen (x, y, z) gjør med z-aksen.

$\boxed{11}$ Finn massesenteret til en åttendels kule, en kvart kule og en halvkule, alle med konstant massetetthet.

$\boxed{12}$ Finn

$$\iiint_R z\, dV$$

der R er området i rommet avgrenset av $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, xz-planet, yz-planet, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ La R være det romlige legemet som er avgrenset av flaten $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ samt planene $z = 0$ og $z = \sqrt{5}$.

Regn ut volumet av R.

$\boxed{2}$ Finn volumet av legemet som er avgrenset av flaten oppgitt i kulekoordinater ved

$$\rho = 4 - \cos(\varphi).$$

UKENS FYSIKK

$\boxed{1}$ En kjøkkenbenk med en buet ende er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ og $y = \sin x$. Den har konstant massetetthet lik 1, og Ole Bjørn lurer på om han klarer å løfte den. Finn kjøkkenbenkens totale masse.

$\boxed{2}$ Ole Bjørn ønsker å balansere kjøkkenbenken på en finger i forbindelse med en jubileumskonkurranse i byggevarebutikken. Han må derfor beregne kjøkkenbenkens massesenter. Hjelp ham med det.

$\boxed{3}$ Ole Bjørn har bygget et hus med en interessant grunnflate og skrått tak. Grunnflaten er området som er innesluttet mellom kurvene $y = x^2$ og $x = y^2$, og taket er gitt ved

$$f(x, y) = x + y.$$

Finn volumet til huset.

$\boxed{4}$ Ole Bjørn ønsker å beregne massen til en oppvaskmaskin for å finne ut om han kan bære den opp i huset selv. Den har form som et rektangulært prisme avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ og $z = \pi$, og har massetetthet gitt ved

$$\rho = f(x, y, z) = \sin z.$$

$\boxed{5}$ Finn også massesenteret til oppvaskmaskinen.

$\boxed{6}$ Ole Bjørn har bygget en liten modell av holmenkollbakken. Den har konstant massetetthet 1, og er avgrenset av $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ og $z = y^2$. Finn massen og massesenteret.

$\boxed{7}$ Ole Bjørn sager holmenkollbanen sin i to langs med planet gitt ved $x + 2y = 4$. Finn massen og massesenteret til delene.