3 - 7 - KOORDINATAVBILDNINGER I

$\boxed{1}$ Arealet blir πab. Jeg kommer ikke til å be deg om beregne envariable integraler på eksamen.

$\boxed{\text{2-1-4}}$ Så lenge matrisen har full rang blir bildet av enhetskvadratet alltid et parallellepiped med sidekanter lik kolonnene i matrisen.

$\boxed{\text{2-5}}$ Her er kolonnene lineært avhengige, så alle punktene på enhetskvadratet legger seg på den rette linjen fra origo til $(2,2)^T$.

$\boxed{\text{2-6}}$ Dette blir enhetskvadratet dreid vinkelen α mot klokken, om en rotasjonsakse som sitter i origo.

$\boxed{\text{2-7}}$ Vi har

$$\begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & 2\cos\alpha \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

så denne dreier enhetskvadratet og strekker det med en faktor 2 i alle retninger.

$\boxed{\text{2-8}}$ Her ser vi at

$$\begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 2\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

så denne strekker med en faktor 2 i x_1-retningen og dreier så vinkelen α mot klokken.

$\boxed{3}$ Her er det bare å ta determinanten av matrisene.

$\boxed{4}$ Så Ω er parallellepiped, og vi kunne i og for seg delt integralet i tre slik:

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_{x_1/2}^{2x_1} x_1x_2 \, dx_2dx_1 + \int_1^2 \int_{x_1/2}^{x_1/2+3/2} x_1x_2 \, dx_2dx_1 + \int_2^3 \int_{2x_1-3/2}^{x_1/2+3/2} x_1x_2 \, dx_2dx_1,$$

men dette er jo litt knotete. Vi kan heller observere at koordinattransformasjonen fra oppgave 2-1 tar enhestkvadratet til Ω, så om vi trøkker funksjonsverdiene inn på enhetskvadratet med transformasjonen Ax og tar volumet under dem må vi gange med 3 for å kompensere:

$$\iint_\Omega f = 3\int_0^1 \int_0^1 (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) \, dx_2dx_1$$

$\boxed{5}$ Samme greia her, men rotasjonsmatrisen strekker ikke areal, så det er nok å bare evaluere den ideelle gasslov i de roterte koordinatene:

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_0^1 (x_1\cos(\pi/6) - x_2\sin(\pi/6))(x_1\sin(\pi/6) + x_2\cos(\pi/6)) \, dx_2dx_1$$

$\boxed{6}$ Diamanten er bildet av enhetskvadratet under den **affine avbildningen**

$$y = \sqrt{2}R(\pi/4)x - (1,1)^T/2$$

der $R(\pi/4)$ er matrisen som roterer $\pi/4$ mot klokken (en affin avbildning er en lineæravbildning pluss en konstant). Eventuelt kunne vi kjørt enhestkvadratet flytta litt ned, og justert med integralgrensene slik:

$$\sqrt{2}\iint_\Omega f = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} (x_1\cos(\pi/4) - x_2\sin(\pi/4))(x_1\sin(\pi/4) + x_2\cos(\pi/4))\, dx_2 dx_1$$

$\boxed{7}$ Lureoppgave. Vi har tidlig i semesteret funnet at $g'(x) = A$ så jacobideterminanten til g er determinanten til A.

$\boxed{8}$ Vi beregner

$$g'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial g_1}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial g_2}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

og determinanten blir følgelig

$$g'(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

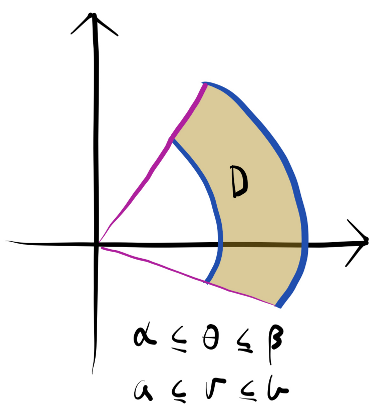
Siden rektangelet $[0,1]\times[0,\pi/2]$ går til enhetssirkelskivens bit i første kvadrant, blir volumet

$$\iint_\Omega f = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x_1 x_2\, dx_2 dx_1 = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\, dr d\theta.$$

$\boxed{9}$ Dette blir likt som forrige oppgave, men med litt andre integrasjonsgrenser.

$$\iint_\Omega f = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 r^3\cos\theta\sin\theta\, dr d\theta = 0.$$

Her er en generisk figur:



$\boxed{9}$ Siden massetettheten ρ er konstant, får vi

$$m = \rho\iint_\Omega = \rho\cdot|A|$$

der A er matrisen i lineæravbildningen. Så må vi integrere funksjonene x_1 og x_2. For eksempel er massesenteret til den tingen i 2-1 gitt ved

$$\frac{1}{m}\iint_\Omega xf(x)\,dx = \frac{1}{m}\begin{pmatrix}\iint_\Omega x_1 f(x)\,dx\\ \iint_\Omega x_2 f(x)\,dx\end{pmatrix} = \frac{1}{3\rho}\begin{pmatrix}3\rho\int_0^1\int_0^1 2x_1+x_2\,dx_2dx_1\\ 3\rho\int_0^1\int_0^1 x_1+2x_2\,dx_2dx_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}$$

$\boxed{11}$ La oss si at kakestykket Ω ligger med spissen i origo og går vinkelen α ut på hver side av x_1-aksen, har radius a og massetetthet ρ. Massen er $m = \rho\alpha a$, og massesenteret blir

$$\frac{1}{m}\iint_\Omega xf(x)\,dx = \frac{1}{\rho\alpha a}\begin{pmatrix}\rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^a r^2\cos\theta\,drd\theta\\ \rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^a r^2\sin\theta\,drd\theta\end{pmatrix} = \frac{2a^2\sin\alpha}{3\alpha}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\boxed{12}$ Vi setter

$$u(x) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v(r,\theta)$$

La oss først derivere litt. Med hensyn på r får vi

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta$$

og

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta\right)\sin\theta\end{aligned}$$

Så deriverer vi med hensyn på θ, og får

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}r\cos\theta$$

og

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} =& \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r\cos\theta\right)\\
=& -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial \theta} r\sin\theta + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial \theta} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_1} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2} r\sin\theta\\
=& -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x_2} r\cos\theta\right) r\sin\theta\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_1} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2} r\cos\theta\right) r\cos\theta\\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial x_1} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2} r\sin\theta
\end{aligned}
$$

Hvis du nå tar noen av disse og deler litt på noen r-er og setter dem sammen og gjør alle kanselleringene, vil du se at vil du se at

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.
$$

$\boxed{13}$ En klassiker! Siden

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}\,dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2}\,dx_2\right)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_2 dx_1\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r dr d\theta\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\,d\theta = \pi,
\end{aligned}
$$

må

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.
$$

$\boxed{14}$ Denne her

$$
x = g(r,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ br\sin\theta \end{pmatrix}
$$

tar rektangelet $[0,1]\times[0,\pi/2]$ til den kvarte ellipseskiven. Jacobideterminanten blir abr, og volumet av grillhytten blir

$$
\iint_\Omega f = \int_0^1\int_0^{\pi/2}(-16r^2\cos^2\theta - 12r^2\cos\theta\sin\theta - 2r^2\sin^2\theta + 16r\cos\theta + 18\sin\theta + 8)\;12r dr d\theta.
$$

$\boxed{15}$ Du går en skitur på en øy gitt ved

$$
h(x) = 1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2
$$

der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum. Koordinattransformasjonen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avslører at Setter vi dette inn for x i funksjonen, får vi

$$\begin{aligned} f(x(y)) &= 1 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 - \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 \\ &= 1 - \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 \end{aligned}$$

og setter vi denne lik en konstant, får vi

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1 - C,$$

som er ellipser. På havnivået er $C = 0$, slik at vi får ellipsen med likning

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1.$$

slik at halvaksene er $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$. Lar vi Ω være området gitt ved

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 \leq 1$$

tar koordinattransformasjonen over oss fra rektangelet $[0,1] \times [0, 2\pi]$ til Ω, og volumet av øyen blir

$$\iint_\Omega f = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)\, r dr d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$\boxed{16}$ Siden Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \qquad x_2 = 2x_1^2, \qquad x_1 = x_2^2 \qquad \text{og} \qquad x_1 = 2x_2^2.$$

får vi vel prøve oss på noen nye koordinater v_1 og v_2 slik at $v_1 = 1$ gir $x_2 = x_1^2$, $v_1 = 2$ gir $x_2 = 2x_1^2$, $v_2 = 1$ gir $x_1 = x_1^2$ og $v_2 = 2$ gir $x_1 = 2x_1^2$. Dette lukter av likningene

$$x_2 = v_1 x_1^2 \qquad \text{og} \qquad x_1 = v_2 x_2^2.$$

Setter vi den første inn i den andre, får vi

$$x_1 = v_2 v_1^2 x_1^4,$$

og setter vi den andre inn i den første, får vi

$$x_2 = v_1 v_2^2 x_2^4,$$

slik at alt i alt er

$$x = g(v) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt[3]{v_1^2 v_2} \\ 1/\sqrt[3]{v_1 v_2^2} \end{pmatrix}$$

en koordinattransformasjon som tar kvadratet $[1,2]\times[1,2]$ til Ω. Så er det bare å brette opp ermene og beregne jacobideterminanten. Først beregner vi

$$g_1'(v) = \frac{-1}{3(v_1^2 v_2)^{4/3}}\,(2v_1v_2, v_2^2) \qquad \text{og} \qquad g_2'(v) = \frac{-1}{3(v_1 v_2^2)^{4/3}}\,(v_1^2, 2v_1v_2)$$

slik at jacobideterminanten blir

$$|g'(v)| = \frac{1}{3v_1^2v_2^2}.$$

og integralet blir

$$\iint_\Omega f = \int_1^2\int_1^2 \frac{1}{v_1^3v_2^3}\,dx_2dx_1 = \frac{15^4}{16^5}.$$

$\boxed{17}$ Ellipsen er dreid $\pi/4$ radianer rundt origo. Koordinattransformasjonen

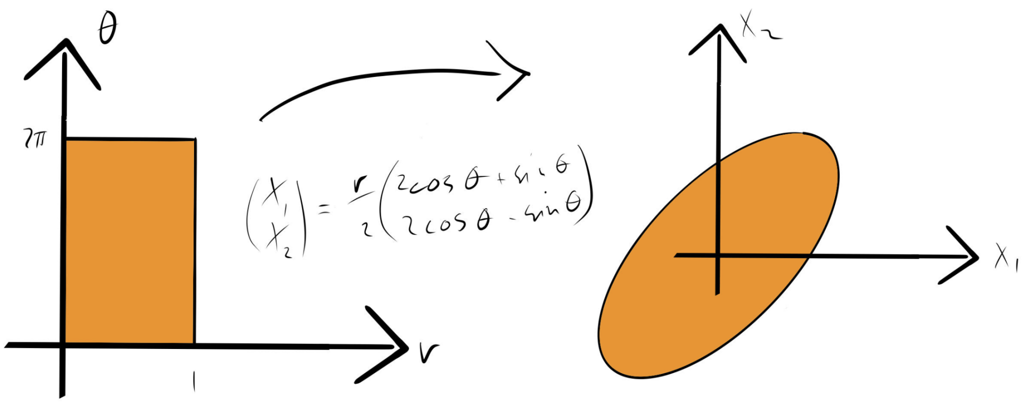
$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

er en ren rotasjon og ellipselikningen blir

$$\frac{y_1^2}{2} + 2y_2^2 = 1$$

som forteller oss at halvaksene er $\sqrt{2}$ og $1/\sqrt{2}$. Videre ser du forhåpentligvis at en fornuftig koordinattransformasjon er

$$x(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}r\cos\theta \\ \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta\end{pmatrix} = \frac{r}{2}\begin{pmatrix}2\cos\theta - \sin\theta \\ 2\cos\theta + \sin\theta\end{pmatrix}.$$



Vi beregner jacobideterminanten:

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = r$$

og integrerer:

$$\begin{aligned} \iint_D f\,dx &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{2}(2\cos\theta+\sin\theta) + 2\left(\frac{r}{2}(2\cos\theta - \sin\theta)\right) + 4\right) r d\theta dr \\ & 8\pi\int_0^1 r\,dr = 4\pi \end{aligned}$$