3 - 6 - DOBBELTINTEGRALER

Denne uken leser vi kapittel 14.1-14.4 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

14.1: 13-22

14.2: 1-28

14.4: 1-14 og 29-30

Hvis du likte bedre det gamle systemet, kan du gå videre til neste side.

Du bør nå begynne med å repetere volumintegraler, altså integraler der integranden gir arealet av et tverrsnitt, slik at integralet blir et volum. Dette står i Adams kap. 7, og er en relativt rask vei til å forstå dobbeltintegraler.

Tenk på grafen til $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som taket i et hus med grunnflate gitt ved $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Integralet

$$\iint_\Omega f$$

kan du tenke på som volumet av huset. Dersom Ω er et rektangel blir dette ikke noe vanskeligere enn i envariabel kalkulus. La oss finne volumet under $f(x, y) = xy$, der Ω er rektangelet avgrenset av $0 \leq x \leq 1$ og $0 \leq y \leq 2$. (Jeg skriver x og y istedet for x_1 og x_2 nå i begynnelsen for lesbarhetens skyld.) Vi uttrykker våre følelser for Ω ved å skrive

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 2]$$

som kalles et **kartesisk produkt**, og integralet blir

$$\iint_\Omega f = \int_0^2 \int_0^1 xy\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy\, dx \right) dy.$$

Dette kalles et iterert integral, for det er et integral inni et annet integral.

Først tar vi det innerste integralet. Det er med hensyn på x, fordi dx står innerst. Vi går fremad med samme taktikk som ved partiellderivasjon; man integrerer med hensyn på x, og later som om y er en konstant:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xy\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot y \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y\, dy$$

Tenk nå at du for hver y-verdi har saget volumet i to med en motorsag, parallelt med x-aksen. Funksjonen

$$\int_0^1 xy\, dx = \frac{1}{2} y,$$

altså det innerste integralet. gir arealet av tverrsnittet av volumet vi beregner. Hvis du skjønte riemannsumtankegangen i forrige semester, skjønte du forhåpentligvis at dersom man har en funksjon som beskriver arealet av tverrsnittet av et volum, finner man det totale volumet ved å integrere tverrsnittsfunksjonen:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 y\, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = 1$$

Prøv selv nå.

$\boxed{1}$ Beregn

$$\int_0^1 \int_0^3 x + 2y \, dx \, dy \qquad \text{og} \qquad \int_0^3 \int_0^1 x + 2y \, dy \, dx.$$

Det som kan gjøre dobbeltintegraler litt knotete, er at integrasjonsområdet Ω kan være noe mer komplisert enn et rektangel. La oss prøve trekanten avgrenset av $x = 0$, $y = 0$, og linjen $x = 1 - y$. Det blir litt mer komplisert, for vi får et funksjonsuttrykk i en integrasjonsgrense i det innerste integralet:

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xy \, dx \right) dy$$

Akkurat som isted, angir det innerste integralet arealet av tverrsnittet til volumet vi beregner, men nå skal vi bare integrere ut til linjen $x = 1 - y$, ikke helt ut til $x = 1$. Vi integrerer:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y \right)_{x=0}^{x=1-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 y \, dy$$

Vi integrerer så tverrsnittsfunksjonen:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y - 2y^2 + y^3 \, dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right)_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{24}$$

$\boxed{2}$ Skisser integrasjonsområdet til

$$\int_0^2 \int_{y-1}^1 (x + 2y) \, dx \, dy,$$

og regn ut det itererte integralet.

Her kommer litt gamle oppgaver vi brukte i TMA4105 i hine hårde dage når jeg var ung og sprek. **Husk å tegne opp Ω nøyaktig, ellers er du sjanseløs!** Og forresten. Det er mest praktisk om du greier å forholde deg til x_1 og x_2 istedet for x og y. Dette gjør notasjon vesentlig enklere utover semesteret. Her kommer noen fler.

$\boxed{3}$ La

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_\Omega f$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(3,0)$ og $(3,1)$, og forklar at

$$\int_0^3 \int_0^{x_1/3} f(x_1, x_2)\, dx_2 x_1 = \int_0^1 \int_{3x_2}^3 f(x_1, x_2)\, dx_1 x_2.$$

Beregn

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^2 \int_{|y-1|}^1 (x + 2y)\, dx\, dy$ $\boxed{5}$ $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-x}^x \cos(y)\, dy\, dx$ $\boxed{6}$ $\displaystyle\iint_{\|\mathbf{x}\|^2 \le a^2} a - \|\mathbf{x}\|\ d\mathbf{x}$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{y} e^y\, dy\, dx \qquad \Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$

$\boxed{8}$ Avgjør om integralet

$$\iint_\Omega e^{-x-y}\, dA$$

der Ω er første kvadrant i xy-planet, konvergerer. Hvis det konvergerer, evaluer det.

$\boxed{9}$ Skisser integrasjonsområdet og regn ut

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + 2y)\, dx\, dy.$$

(Hint: du må kanskje bytte integrasjonsrekkefølge.)

$\boxed{10}$ Samme her:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \cos\frac{\pi}{4}(3x - x^3)\, dx\, dy.$$

$\boxed{11}$ Skisser og bytt integrasjonsrekkefølge:

$$V = \int_0^3 \int_0^{y/3} f(x, y)\, dx\, dy + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x, y)\, dx\, dy$$

I uttrykket for standardnormalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

er det en multiplikasjonsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, som skyldes at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Vi vet at $e^{-x^2/2}$ ikke kan antideriveres på noen enkel måte, men nå skal vi endelig få has på integralet over allikevel. Vi må tilsynelatende begynne på et helt annet kontinent, så hold ut.

$\boxed{12}$ La

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_\Omega f$$

der Ω enhetssirkelskiven.

Å sette opp integralet i oppgaven over, er ikke så vanskelig dersom man husker likningen for enhetssirkelen:

$$\iint_\Omega f = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2 + xy + 1\; dy\, dx$$

Dette går beregne, men er temmelig hårete. Hadde det ikke vært utrolig mye enklere om vi bare kunne skrive

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 + \cos\theta \sin\theta)\, r^3\, d\theta\, dr\ ?$$

Det kan vi nemlig. Målet med denne økten er å skjønne hvorfor. Integralet

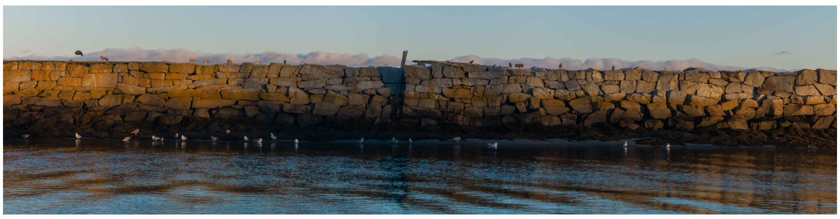
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

får vi en passant. La oss varme opp litt. La

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{13}$ La Ω være enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$, og la $\mathbf{x} \in \Omega$. Hvordan ser $\mathbf{F}(\Omega)$ ut?

$\boxed{14}$ Finn arealet av $\mathbf{F}(\Omega)$ dersom Ω er områdene fra oppgave 3-8 over.



Forhåpentligvis skjønte du at i oppgavene over får du riktig svar ved å gange arealet av Ω med determinanten til matrisen i uttrykket for $\mathbf{F}$. Dette er enkelt fordi $\mathbf{F}$ er en lineærtransformasjon, og arealutvidelsesfaktoren er den samme overalt i rommet.

Men dessverre er det slik at vi trenger noen mer kompliserte koordinattransformasjoner. La oss begynne med å introdusere en viktig funksjon $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_1(r, \theta) \\ x_2(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Koordinatparet (r, θ) kalles polarkoordinater, og $\mathbf{x}\,(r, \theta)$ kalles polarkoordinattransformasjonen.

$\boxed{15}$ Et område Ω er begrenset av

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \qquad 1 \leq r \leq 2$$

Skisser Ω og , og finn arealene til begge.

$\boxed{16}$ Regn ut **jacobideterminanten**

$$\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}$$

og forklar hvorfor arealet er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\, dr d\theta$$

Kanskje neste oppgave er til hjelp?

$\boxed{17}$ En ting formet som området Ω over har massetetthet gitt ved

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Forklar at massen er gitt ved

$$\int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(\mathbf{x}(r, \theta)) \left(\frac{\partial x_1}{\partial r}\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial r}\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right) dr d\theta$$

Hvis du nå har skjønt polarkoordinater, kan du muligens klare neste oppgave. Eller, den er litt vanskelig, så kanskje du ikke klarer det selv, men du er ihvertfall i stand til å forstå løsningen.

$\boxed{18}$ Regn ut at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

(Hint: du må antagelig slå den opp, men den står i Adams.)

Hvis du skjønte alt over, er du kanskje klar for noen nye flere koordinattransformasjoner. Trikset er alltid det samme, du må finne en koordinattransformasjon fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ slik at integrasjonsområdet ditt blir verdimengden dersom definisjonsmengden til koordinattransformasjonen er rektangulær eller veldig enkel på en eller annen måte.

$\boxed{19}$ La

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + 1.$$

Finn

$$\iint_\Omega f$$

der Ω er parallellogrammet med hjørner i origo, $(2, 1)$, $(1, 2)$ og $(3, 3)$

$\boxed{20}$ Finn en koordinattransformasjon som funker dersom integrasjonsområdet er ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

og beregn jacobideterminanten.

$\boxed{21}$ Hva med området mellom parablene $y = ax^2$, $y = bx^2$, $x = cy^2$ og $x = dy^2$?
(Hint: Adams eksempel 14.4.8)

Massen til en todimensjonal ting med massetetthet $\rho(\mathbf{x})$ (målt i for eksempel kilo per kvadratmeter) er gitt ved

$$\iint_\Omega \rho,$$

og massesenteret (m_1, m_2) er

$$m_1 = \frac{\iint_\Omega x_1 \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}}{\iint_\Omega \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}} \qquad m_2 = \frac{\iint_\Omega x_2 \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}}{\iint_\Omega \rho(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}}$$

Hvis du synes dette med massesenter er mystisk, kan du lese Feynman Lectures I-18 og I-19. Hvis du ikke liker massesenter, kan du tenke at ρ er ladningstettheten på en kondensatorplate (coloum per kvadratmeter) og $\iint_\Omega \rho$ den totale ladningen på platen.

$\boxed{22}$ Finn massesenteret til et kakestykke med radius R, uniform tetthet og vinkelutslag 2α.

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Du går en skitur på fjellet $h(x, y) = 1 - x^2 - xy - y^2$. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene til dette fjellet? Finn fjellets totale volum.
(Hint: Kan være lurt å prøve koordinatskiftet

$$x = u + v$$
$$y = u - v$$

og så ta det derfra.)