3 - 6 - DOBBELTINTEGRALER

$\boxed{1}$ Volumet av en dreiing av sinuskurven mellom to nullpunkter er

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 1 - \cos(2x) \, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

$\boxed{2}$ Vi dreier enhetssirkelfunksjonen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ og får

$$2\pi \int_0^1 1 - x^2 \, dx = 2(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4\pi}{3}.$$

$\boxed{3}$ For et vakkert volum:

$$\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \pi$$

$\boxed{4}$ Den krumme delen av randen er en kvart ellipse med likning

$$\frac{x_1^2}{4^2} + \frac{x_2^2}{3^2} = 1$$

og løser vi denne for x_2 og tar det positive rotutdraget, får vi

$$x_3 = \sqrt{3^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{4^2}\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{(16 - x_1^2)}.$$

Takhøyden er $f(x) = x_1 x_2$, så kapper vi grillhytten i to parallelt med x_2-aksen, er arealet av tverssnittet gitt ved

$$A(x_1) = \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16 - x_1^2)}} x_1 x_2 \, dx_2.$$

$\boxed{5}$ Volumet blir

$$\begin{aligned}\int_0^4 A(x_1) \, dx_1 &= \int_0^4 \left(\int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} x_1 x_2 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \Big|_{x_2=0}^{x_2=\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} dx_1 \\ &= \frac{9}{32} \int_0^4 x_1 \left(16 - x_1^2\right) \, dx_1 = 30\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Hvis du integrerer takhøyden $x_1 x_2$ fra $x_1 = 0$ til $x_1 = 1$, får du tverrsnittet

$$A(x_2) = \int_0^1 x_1 x_2 \, dx_1$$

så motorsaga gikk horisontalt denne gangen. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f = &\int_0^2 \left(\int_0^1 x_1x_2\ dx_1\right) dx_2 \\ =&\frac{1}{2}\int_0^2 x_1^2x_2\Big|_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\ =&\frac{1}{2}\int_0^2 x_2\ dx_2 = 1.\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Hvis du integrerer takhøyden x_1x_2 fra $x_2 = 0$ til $x_2 = 2$, får du tverrsnittet

$$A(x_1) = \int_0^2 x_1x_2\ dx_2$$

så motorsaga går vertikalt. Volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f = &\int_0^1 \left(\int_0^2 x_1x_2\ dx_2\right) dx_1 \\ =&\frac{1}{2}\int_0^1 x_1x_2^2\Big|_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1 \\ =&2\int_0^1 x_2\ dx_2 = 1.\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ La oss først la saga gå vertikalt. Hypotenusen i trekanten er gitt ved $x_2 = 2x_1$, så arealet av tverrsnittet blir

$$A(x_1) = \int_0^{2x_1} x_1x_2\ dx_2,$$

og volumet blir

$$\begin{aligned}\iint_\Omega f = &\int_0^1 \int_0^{2x_1} x_1x_2\ dx_2dx_1 \\ =&\frac{1}{2}\int_0^1 x_1x_2^2\Big|_0^{2x_1} dx_1 \\ =&2\int_0^1 x_1^3\ dx_1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lar vi saga gå andre veien, får vi tverrsnittsfunksjonen

$$A(x_2) = \int_{x_2/2}^1 x_1x_2\ dx_1,$$

slik at volumet blir

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega f =& \int_0^2 \int_{x_2/2}^1 x_1 x_2 \; dx_1 dx_2 \\
=& \frac{1}{2} \int_0^2 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1 = x_2/2}^{x_1=1} \; dx_2 \\
=& \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4} x_2^2\right) x_2 \; dx_2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Her er en oppgave fra konten 2024:

$\boxed{9}$ Vi beregner

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega f =& \int_0^3 \int_0^{4x_1/3} x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3 \; dx_2 dx_1 \\
=& \int_0^3 x_1^2 \left(4x_1/3\right) + \frac{1}{3} \left(4x_1/3\right)^3 + \frac{1}{2} x_1 \left(4x_1/3\right)^2 - 3x_1 \left(4x_1/3\right) - \frac{3}{2} \left(4x_1/3\right)^2 + 3 \left(4x_1/3\right) \; dx_1 \\
=& \int_0^3 \frac{4}{3} x_1^3 + \frac{64}{81} x_1^3 + \frac{8}{9} x_1^3 - 4x_1^2 - \frac{8}{3} x_1^2 + 4x_1 \; dx_1 \\
=& \frac{1}{3} \cdot 3^4 + \frac{16}{81} \cdot 3^4 + \frac{2}{9} \cdot 3^4 - \frac{4}{3} \cdot 3^3 - \frac{8}{9} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 \\
=& 27 + 16 + 18 - 36 - 24 + 18 = 19
\end{aligned}
$$

$\boxed{10}$ Her er det enklest å la saga gå horisontalt først. Den ene skrå delen av randen har likning $x_2 = x_1$, og den andre har likning $x_2 = 2 - x_1$, så integralet blir

$$
\begin{aligned}
\iint_\Omega f =& \int_0^1 \int_{x_2}^{2-x_2} x_1 x_2 \; dx_1 dx_2 \\
=& \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1 = x_2}^{x_1 = 2 - x_2} \; dx_2 \\
=& \frac{1}{2} \int_0^1 \Big((2 - x_2)^2 - x_2^2\Big) x_2 \; dx_2 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Går vi motsatt vei må vi dele opp integralet, så det blir litt mer herk:

$$
\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_1 x_2 \; dx_2 dx_1 + \int_1^2 \int_0^{2-x_1} x_1 x_2 \; dx_2 dx_1 = \frac{1}{3}.
$$

Husk alltid å tegne opp, ellers er det lett å tenke feil.

$\boxed{11}$ Dette integralet går fint å sette opp i én smell, men da må vi ha noen triks vi skal lære kommende uke. I påvente av det, må vi nesten sette det opp i to deler enten slik:

$$
\iint_\Omega f = \int_{-1}^0 \int_{-x_1-1}^{x_1+1} x_1 x_2 \; dx_2 dx_1 + \int_0^1 \int_{x_1-1}^{1-x_1} x_1 x_2 \; dx_2 dx_1 = 0
$$

eller slik:

$$\iint_\Omega f = \int_{-1}^{0} \int_{-x_2-1}^{x_2+1} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 + \int_0^1 \int_{x_2-1}^{1-x_2} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = 0$$

At integralene blir null, får vi fra symmetrien til Ω og $f(x) = x_1 x_2$.

$\boxed{12}$ Parabelen er surefjes og skjærer x_1-aksen i $x_1 = \pm 1$, så volumet blir

$$\iint_\Omega f = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x_1^2} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 = 0$$

Også her blir integralet null på grunn av symmetrien til Ω og $f(x) = x_1 x_2$. Integralet kan også settes opp slik:

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x_2}}^{\sqrt{1-x_2}} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = 0$$

$\boxed{13}$ Kurven $x_2 = 1 - x_1^3$ skjærer x_1-aksen i $x_1 = 1$, og x_2-aksen i $x_2 = 1$, så volumet blir

$$\begin{aligned} \iint_\Omega f &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1^3} x_1 x_2 \, dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x_1 (1 - x_1^3)^2 \, dx_1 = \frac{1}{14} \end{aligned}$$

eller

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{1-x_2}} x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \frac{1}{14}.$$

$\boxed{14}$ Her er integranden en kjegle med høyde a (slik som du har på fotballbanen, formet som en pyramidal ting med sirkulært tverrsnitt), og den skjærer x_1x_2-planet i en sirkel med radius a, så volumet blir grunnflate ganger høyde, altså $\pi a^3/3$.

$\boxed{15}$ Dette er bare en halv kule med radius a, så volumet blir $\frac{2\pi}{3} a^3$.

$\boxed{16}$ En sylinder med høyde a og grunnflate πa^2, så volumet blir πa^3.

$\boxed{17}$ Hårete greier:

$$\iint_\Omega f \, dS = \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}\sqrt{(16-x_1^2)}} -x_1^2 - x_1 x_2 - 2x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 8 \, dx_2 dx_1$$

så denne tar vi med et triks vi skal lære kommende uke.

$\boxed{18}$ Siden $|x_1 x_2| \leq 1$ på enhetskvadratet i $\mathbb{R}^2$, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \frac{dx}{1 - x_1 x_2} &= \iint_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} (x_1 x_2)^k \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \iint_\Omega (x_1 x_2)^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

At det i dette tilfellet går greit å bytte om rekkefølgen på sum og integral har vi ikke lært, men pytt sann. Vi er da ingeniører.