3 - 5 - LINJEINTEGRALER I - LF

$\boxed{2}$ Det enkleste er å kreve at kurven er glatt, og den enkleste måten å få dette til på er å kreve at komponentene er deriverbare og at $\dot{x}(t) \neq 0$ for alle t i definisjonsmengden. Da vet du at kurven aldri stopper opp og at den aldri snur og kjører bakover.

$\boxed{3}$ Brugdens trajektorie Γ er parametrisert ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

der $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$. Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\, ds &= \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x(t))|\dot{x}(t)|\, dt \\ &= \int_{\pi/2}^{2\pi} (1 + \cos t \sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi} 2 + \sin(2t)\, dt = \frac{1}{2}(3\pi - 1).\end{aligned}$$

Brugden spiser altså $\frac{1}{4}(6\pi - 1)$ plankton på sin tur fra x_2-aksen til x_1-aksen. Ordet "plankton" er avledet fra det greske ordet for "å drive", så plankton er en fellesbetegnelse for levende ting i havet som ikke kan svømme horisontalt. Noen typer plankton kan svømme vertikalt, og det er mye som er plankton som man ikke tenker på som plankton.[1]

$\boxed{4}$ Vi må først parametrisere den rette linjen. Dette kan gjøres på mange måter, men for eksempel $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

gjør jobben. Linjeintegralet blir

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^1 (1 + (1-t)t)\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

$\boxed{5}$ Vi kan prøve $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Denne kurven reiser også fra $(1,0)^T$ til $(0,1)^T$, men med varierende fart (først sakte og så fortere). Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\, ds &= \int_0^1 (1 + (1-t^2)t^2)\sqrt{(-2t)^2 + (2t)^2}\, dt \\ &= \int_0^1 (1 + t^2 - t^4)|2\sqrt{2}t|\, dt = \frac{7\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Plankton`

$\boxed{6}$ Linjeintegralet blir

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,ds =& \int_0^{4\pi} -(-t)\sqrt{(-\cos t)^2 + (\sin t)^2 + 1^2}\,dt \\ =& \sqrt{2}\int_0^{4\pi} t\,dt = 8\pi^2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Fem kilo ganger ti newton blir femti newtonmeter eller joule som vi sier.

$\boxed{8}$ Så da blir det fem kilo ganger ti newton ganger cosinus til førtifem som er en på roten av to.

$\boxed{9}$ Tyngdekraften er

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

og fluens trajektorie kan parametriseres ved $x : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

dersom vi legger startpunktet i origo og punktet på pulten i $(3,0,1)^T$. Arbeidet blir

$$W = \int_\Gamma F \cdot ds = \int_0^1 (0,0,-mg)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,dt = -mg\cdot(1-0)$$

eller $-mgh$ som vi ville sagt på skolen. Arbeidet er negativt fordi fluen må jobbe mot tyngden.

$\boxed{10}$ Parametriseringen er $x : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$W = \int_\Gamma F \cdot ds = \int_0^{4\pi} (t,0,0)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}\,dt = -\int_0^{4\pi} t\sin t\,dt = 4\pi.$$

Her får altså steinbiten litt hjelp av vannstrømmen.

$\boxed{11}$ Dersom vi tidsderiverer $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$. og bruker Newtons andre lov, får vi

$$\dot{E}(t) = m\ddot{x}^T\dot{x} = F^T\dot{x},$$

og integrerer vi igjen, får vi

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t))^T\,\dot{x}(t)\,\,dt.$$

så arbeidet som gjøres av netto kraft er lik endring i kinetisk energi. Fysikerne kaller dette **arbedsenergiteoremet** eller noe i den dur.[2] Den kinetiske energien i 7 skal være lik arbeidet

[2]"The work-energy theorem" på engelsk.

utført, så da blir det roten av hundre joule delt på fem kilo, så litt over fire meter per sekund tenker jeg. Ditto på 8. Kraften oppover bidrar bare til å avlaste gulvet litt, mens arbeidet i bevegelsesretning gir kinetisk energi.

Det som er lurt å vite om arbeid, er at noen ganger slipper du faktisk å beregne integralet. Det er derfor jeg plaget deg med gradientfelter i forrige økt. Grunnen til at et vektorfelt sies å være konservativt dersom det er gradienten til et skalarfelt, er at det korresponderer til fysikernes ide om konservativt kraftfelt. Dersom netto kraft er gitt ved $F(x) = -V'(x)^T$, gir kjerneregelen en enkel formel for arbeidet.

$\boxed{12}$ Dersom netto kraft er $F(x) = -V'(x)^T$, blir

$$\begin{aligned} E(b) - E(a) &= \int_\Gamma F \cdot ds \\ &= \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t)\ dt \\ &= -\int_a^b V'(x(t))\, \dot{x}(t)\ dt \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t))\ dt = V(x(a)) - V(x(b)) \end{aligned}$$

slik at

$$E(b) + V(x(b)) = E(a) + V(x(a)).$$

Fysikere bruker T istedet for E for kinetisk energi, men vi bruker allerede T for enhetstangent-vektor, temperatur, matrisetransponering og periode, så kvota begynner å bli litt full.

$\boxed{13}$ Her er det bare å evaluere tyngdepotensialet i de to punktene og ta differansen. En av tingene som dissiperer energi i solsystemet er faktisk tidevannsbølgene tyngdekraften lager på legemer. Det er dette som er grunnen til at månen alltid vender den samme siden inn mot jorden,[3] og grunnen til at Io har massevis av vulkaner.[4]

$\boxed{14}$ Det blir vel

$$\phi(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

Siden det elektriske feltet har benevning kraft per ladning, må vel potensialet ha benevning kraft ganger meter per ladning eller joule per coloumb eller spenning som vi sier på godt norsk. Coloumbkraften er kraften som holder alt sammen, inkludert stolen du sitter på, så ikke kødd med den.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_locking`
[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Io_(moon)`