3 - 3 - OPTIMERING

Nå skal vi kombinere de to første ukenes pensum, og lete etter minimums- og maksimumsverdier i ymse situasjoner. Vi leser kapittel 13 i Adams, og gjør følgende oppgaver:

13.1: 1-5

13.2: 1-6

13.3: 1-7

Her kommer mere gammelt skrot.

$\boxed{1}$ En ellipse med halvakser $a = \frac{1}{2}$ og $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rotert $\pi/4$ radianer i forhold til koordinataksene, tilfredsstiller likningen

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3.$$

og har parametrisering

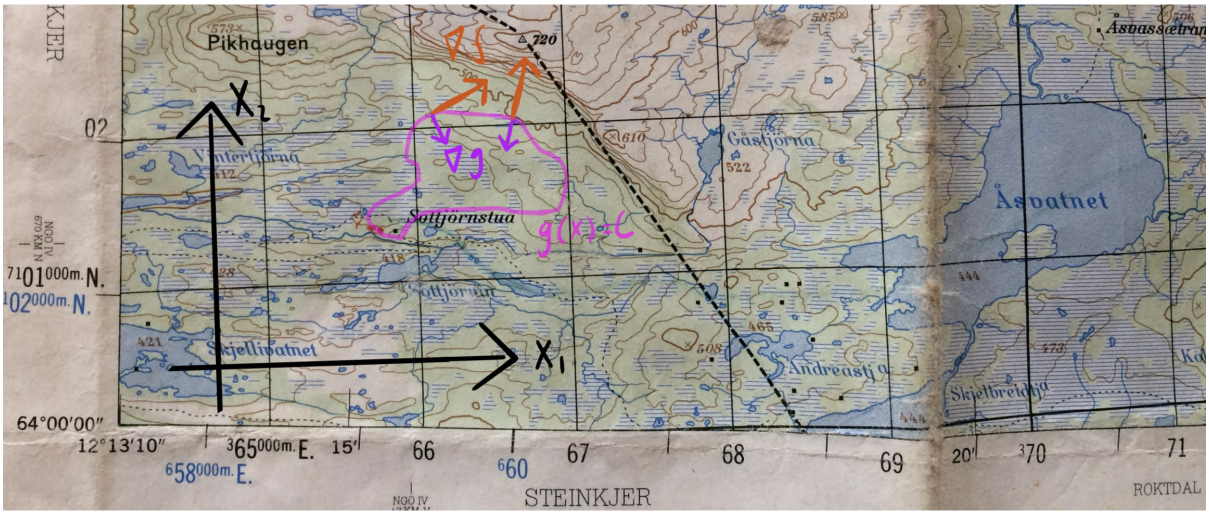
$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos(t + \pi/3) \end{pmatrix}$$

Finn den største verdien til

$$f(x) = x_1 + 2x_2$$

på ellipsen.
(Du kan få denne til bare med å tenke litt logisk, men det er vanskelig.)

Oppgaven over kan også gjøres med noe som kalles **Lagranges multiplikatormetode**. La oss si at du går på fjellet gitt av $z = f(x)$ og at gps-sporet ditt er gitt av en kurve med likning $g(x) = C$. I figuren under er en person ute og går sin favorittjakttur i Ogndalen. Ekvidistanselinjene på kartet er de brune nivåkurvene til f, og vedkommende går en tur gitt av den rosa kurven.



$\boxed{2}$ Forklar ved hjelp av figuren at for det høyeste punktet på turen, bør gradientene til f og g være parallelle; dersom nivåkurvene er glatte, finnes det i dette punktet en konstant λ slik at

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

(Hint: se nøye på ekvidistanselinjene, og husk at gradienten står normalt på nivåkurvene. Jeg har tegnet inn gradientene til f og g i to forskjellige punkter for å illustrere.)

$\boxed{3}$ Du går på fjellet

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

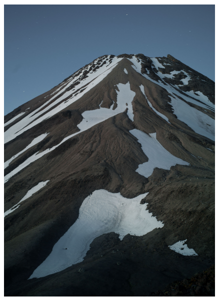
langs med trajektorien gitt ved $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Finn det høyeste punktet på turen din.

$\boxed{4}$ Finn et uttrykk for fjellet

$$z = 3 - x^2 - 2y^2.$$

sin skjæringskurve med (x, y)-planet. Hva slags kurve er det? Finn en parametrisering!

Her er litt gammelt skrot om kriitske punkter.



La oss si at du står på toppen av et fjell gitt av $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

$\boxed{5}$ Hva er ∇f på toppen?

$\boxed{6}$ Hva er ∇f i bunnen av krateret i en vulkan?

$\boxed{7}$ Hva er ∇f i et sadelpunkt mellom to fjelltopper?

La oss klassifisere noen ekstremalpunkter. Hessematrisen er symmetrisk dersom f er deriverbar, og nå vet vi at hessematrisen derfor er ortogonalt diagonaliserbar. Dersom alle egenverdiene til hessematrisen er positive, sier vi at matrisen er positivt definitt.

$\boxed{8}$ Har vi da et maksimums- eller minimumspunkt?

Tilsvarende gjelder for negativt definitt. Dersom noen egenverdier er positive og noen negative, har vi sadelpunkt.

$\boxed{9}$ Utled Taylors andreordens formel for en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{h}$$

der

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(Hint: Send en rett linje gjennom $\mathbf{x}$ i retning $\mathbf{h}$ og bruk kjerneregelen.)

$\boxed{10}$ Det neste leddet er av orden $\|\mathbf{h}\|^3$, men det griseriet skal du spares for å utlede. Sett ord på dine følelser om hvordan hessematrisen $\mathbf{H}$ kan brukes til å finne ut om et kritisk punkt er et maksimums-, minimums- eller sadelpunkt.

$\boxed{11}$ Finn alle kritiske punkter i bildet under.