

3 - 3 - OM LANDEGRENSER - LF

- 1 Vi setter gradienten til h lik null:

$$-2x_1 - x_2 + 4 = 0$$

$$-x_1 - 4x_2 + 6 = 0$$

som løses av $x_2 = 8/7$, $x_1 = 10/7$.

- 2 Hessematrisen er

$$h''(x) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

som har karakteristisk polynom

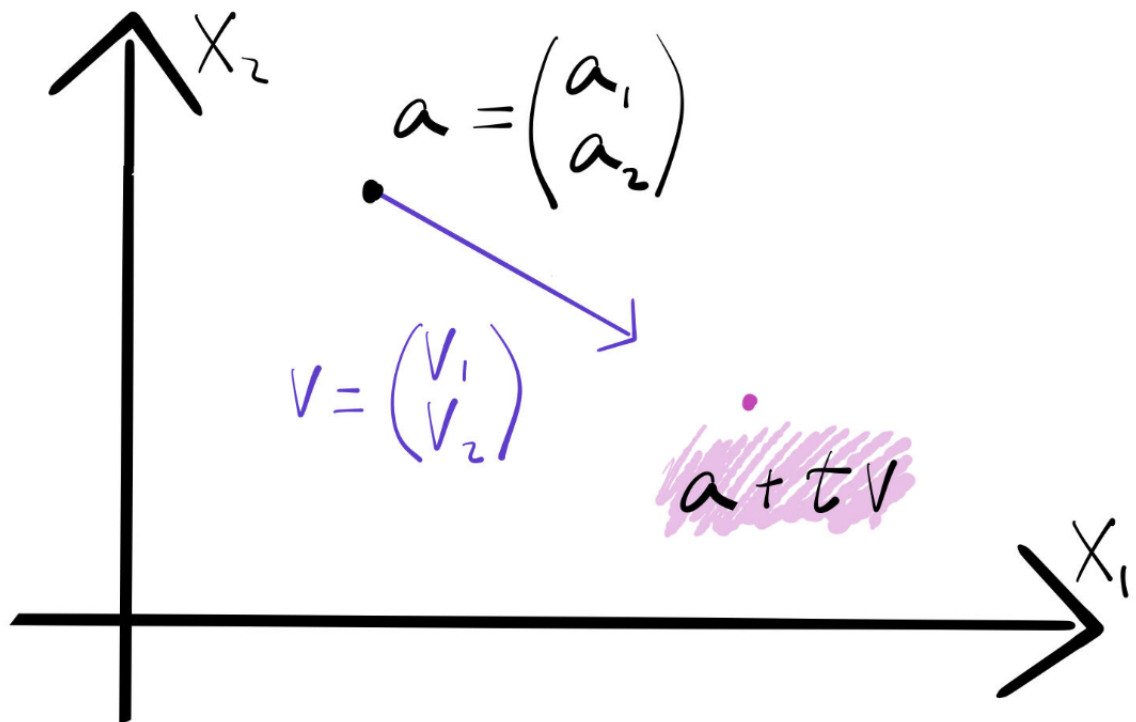
$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(4+\lambda) - 1 = 7 + 6\lambda + \lambda^2$$

og egenverdier

$$\lambda = -3 \pm \sqrt{2}$$

som begge er negative, og følgelig kan vi være sikker at dette er en fjelltopp og ikke en dalbunn.

- 3 La oss sende en rett linje gjennom punktet a slik:



Parametriseringen for den rette linjen er

$$x(t) = a + tv = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

La oss definere

$$g(t) = f(x(t)) = f(a + tv)$$

og så bruke kjerneregelen på g , og få

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(x(t))x'(t) \\ &= f'(a + tv)v \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv). \end{aligned}$$

Nå kan gjenta denne suksessen og derivere dette uttrykket med kjerneregelen, og få

$$\begin{aligned} g''(t) &= v_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv) \right) + v_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tv) \right) \\ &= v_1 \left(v_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a + tv) + v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a + tv) \right) + v_2 \left(v_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a + tv) + v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a + tv) \right) \end{aligned}$$

Hvis du nå skriver ut

$$\begin{aligned} v^T A v &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1^2 a_{11} + v_1 v_2 a_{12} + v_1 v_2 a_{21} + v_2^2 a_{22}, \end{aligned}$$

ser du at vi kan skrive

$$g''(t) = v^T H(a + tv) v$$

der

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Vi kan nå Taylorutvikle g :

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2} + \dots \\ &= f(a) + (f'(a)v)t + (v^T f''(a)v)\frac{t^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Merk ellers at

$$g'(0) = f'(a)v$$

som vi kjenner igjen som den retningsderiverte til f i a .

- 4 La a være et av f sine kritiske punkt. Vi tar en motorsag og snitter flaten til $f(x)$ langs den parametriserte linjen $a + tv$, og så taylorutvikler vi motorsagsnittfunksjonen $g(t) = f(a + tv)$ om $t = 0$, slik som i forrige oppgave. Siden $f'(a) = 0$ dersom a er et kritisk punkt, blir taylorutviklingen

$$f(a + tv) = f(a) + (v^T f''(a) v) \frac{t^2}{2} + \dots$$

Dersom t er bitteliten og f oppfører seg bra nok til at $(v^T f''(a) v) \frac{t^2}{2}$ fullstendig dominerer alle leddene som kommer etter, kan vi nå konkludere med følgende tabell. La λ_1 og λ_2 være egenverdiene til $f''(a)$.

- Dersom λ_1 og λ_2 er positive, er a et bunnpunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 er negative, er a et toppunkt.
- Dersom λ_1 og λ_2 har forskjellig fortegn, er a et sadelpunkt.
- Dersom en av dem er null, gir testen ingen konklusjon.

Hvordan kan vi være så freidige? Siden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

for alle funksjoner du kommer til å plages med¹ er $f''(a)$ symmetrisk, og følgelig ortogonalt diagonaliserbar. La u_1 og u_2 være ortogonale egenvektorer til $f''(a)$. Disse utgjør en basis for $\mathbb{R}^2$, så vi kan alltid skrive

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

og regne ut den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} v^T f''(a) v &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T f''(a) (c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= (c_1 u_1 + c_2 u_2)^T (\lambda_1 c_1 u_1 + \lambda_2 c_2 u_2) \\ &= \lambda_1 c_1^2 |u_1|^2 + \lambda_2 c_2^2 |u_2|^2 \end{aligned}$$

Dette uttrykket er helt klart positivt for alle v i det første tilfellet, og konklusjonen følger siden vi følgelig alltid legger noe til $f(a)$ i nærheten av a når vi beveger oss bittelitt vekk fra a . Samme resonnement dersom egenverdiene er negative. Dersom egenverdiene har forskjellig fortegn, kan vi bruke samme resonnement på $v = u_1$ og $v = u_2$ og konkludere med at det finnes en retning der vi går nedover og en retning der vi går oppover, slik at a er en sadel. Hvis en av egenverdiene er null, finnes det en retning der $v^T f''(a) v = 0$, og i så fall trenger vi flere ledd i taylorrekken for å konkludere. Hvis begge egenverdier er null, er f et lineært polynom, og da gir det ikke mening å lete etter maks- eller minimumspunkter.

Dersom alle egenverdier er positive, sier vi ellers at matrisen er positivt definit. Tilsvarende for negative egenverdier.

- 5 Hessematrisen er $X^T X$ og denne er som kjent positivt definit dersom X har full rang, så da må det kritiske punktet være et minimumspunkt.

¹Det finnes patologiske unntak, slik som for eksempel $\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, der de blandede andreordens partiellderiverte ikke er like, men disse er konstruert av matematikere for å krangle med folk som er uforsiktige nok til å påstå at de blandede andreordens partiellderiverte alltid er like. Se ukens nøtter.

- 6 Du må lete etter maksima og minima til de tre envariable funksjonene

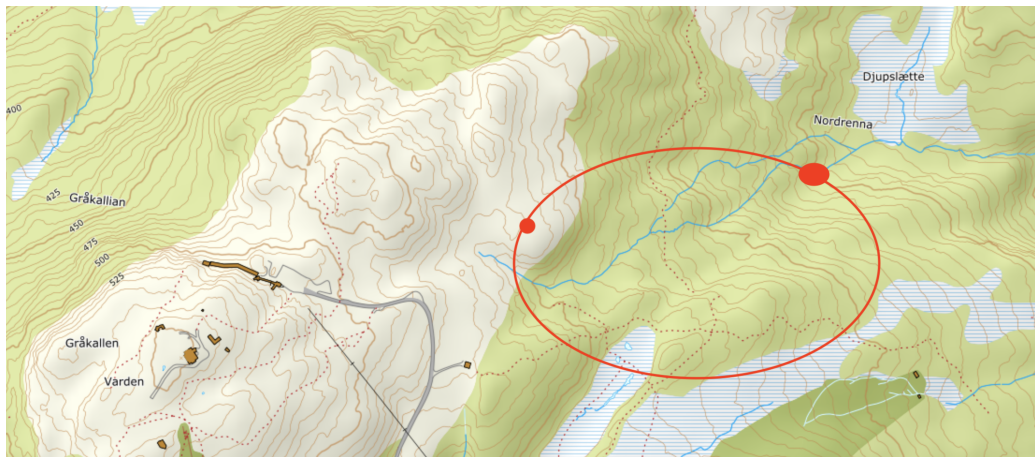
$$h(x_1, 0) = -x_1^2 + 4x_1 - 7 \quad x_1 \in [0, 4]$$

$$h(0, x_2) = -2x_2^2 + 6x_2 - 7 \quad x_2 \in [0, 3]$$

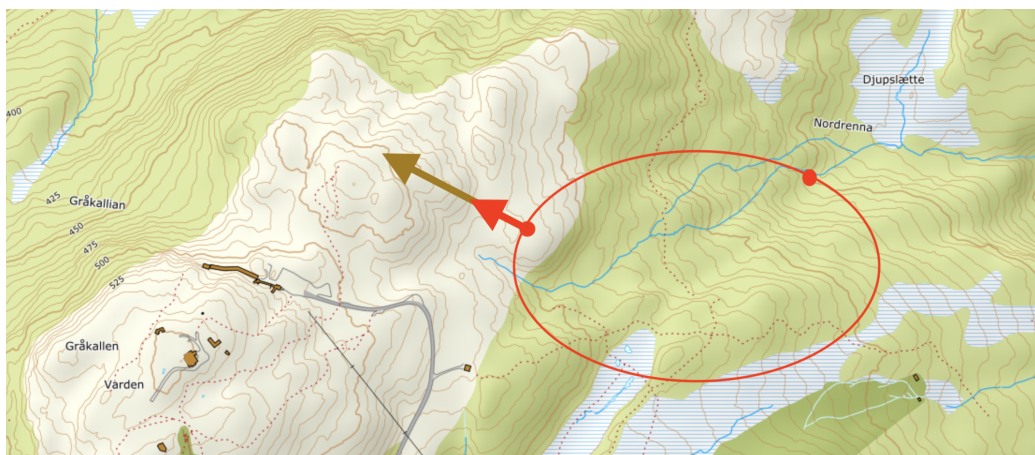
$$h(4 \cos \theta, 3 \sin \theta) = -16 \cos^2 \theta - 12 \cos \theta \sin \theta - 18 \sin^2 \theta + 16 \cos \theta + 18 \sin \theta + 8 \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

Det er trivielt å se at de to første har globale minima i endepunktene og globale maksima i kritiske punkter. Den siste er uhåndterlig med penn og papir.

- 7 Lagranges multiplikatormetode er basert på en ide som er veldig enkel å forstå om man har det klart for seg hvordan gradienten til en funksjon skal tolkes geometrisk. Den er også til god hjelp dersom man ønsker en enkel huskeregel nettopp for å huske gradientens geometriske tolkning. Hvis jeg sier at man går en tur på den elliptiske kurven i figuren under, klarer de aller fleste uten å tenke seg om merke av turens høyeste og laveste punkt:



Nå gjelder å tenke på f (altså den funksjonen du skal maksimere eller minimere) som en funksjon som beskriver fjellet du går på. Nivåkurvene til f er det som er printa som ekvidistanselinjene på et vanlig turkart. Den snedige ideen til lagrange var å se på turtrajektorien som nivåkurven til en eller annen annen funksjon g , og så innse at i f sine topp-, bunn- eller sadelpunkter **må gradienten til f være parallell med gradienten til g , siden gradienter og nivåkurver står normalt på hverandre.**



Denne ideen gir tre likninger

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ g(x) &= c\end{aligned}$$

som kan løses for x og λ . Det er litt forskjellige betingelser ute og går; f og g må være deriverbare, og gradientene kan ikke være null, og du må ikke være i endepunktet for trajektorien og litt forskjellig.

Alternativt kan vi parametrisere kurven og bruke kjerneregelen og få

$$\nabla^T f(x(t)) \dot{x}(t) = 0$$

siden $f(x(t))$ har et lokalt maksimum og

$$\nabla^T g(x(t)) \dot{x}(t) = 0$$

siden $g(x(t))$ er konstant.

8 Vi kan nå prøve oss på den krumme delen av $\partial\Omega$, som har likning

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

slik at

$$g(x) = \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9}.$$

Gradienten til g er

$$g'(x) = \left(\frac{x_1}{8}, \frac{2x_2}{9} \right)$$

mens gradienten til h regnet vi ut i oppgave 1:

$$f'(x) = (-2x_1 - x_2 + 4, -x_1 - 4x_2 + 6)$$

Alt i alt får vi likningssystemet

$$-2x_1 - x_2 + 4 = \lambda \frac{x_1}{8}$$

$$-x_1 - 4x_2 + 6 = \lambda \frac{2x_2}{9}$$

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

De to første likningene kan skrives om til

$$(\lambda + 16)x_1 + 8x_2 = 32$$

$$9x_1 + 2(\lambda + 18)x_2 = 54$$

og i dette tilfellet synes jeg det er kjappest å bare invertere matrisen og skrive

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2(\lambda + 16)(\lambda + 18) - 72} \begin{pmatrix} 2(\lambda + 18) & -8 \\ -9 & (\lambda + 16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 54 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda + 16)(\lambda + 18) - 72} \begin{pmatrix} 2(\lambda + 18) & -8 \\ -9 & (\lambda + 16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 27 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Setter vi denne inn i ellipselikningen, får vi en fjerdegradslikning som er uhåndterlig med penn og papir, men triviell å løse med en numerisk likningsløser.

9 Gradienten til L er

$$\begin{aligned} L'(x) &= \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}(x), \frac{\partial L}{\partial x_2}(x), \frac{\partial L}{\partial x_\lambda}(x) \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), g(x) \right) \end{aligned}$$

og setter vi denne lik null, får vi lagrangelikningene dersom trajektorien er gitt ved $g(x) = 0$.

10 Gradienten til fjellet er

$$h'(x) = (-2x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2)$$

og setter vi

$$g(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1,$$

blir

$$g'(x) = (2x_1, x_2/2)$$

Lagrangelikningene blir

$$-2x_1 - x_2 = 2\lambda x_1$$

$$-x_1 - 2x_2 = \lambda x_2/2$$

eller

$$2(1 + \lambda)x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 + (4 + \lambda)x_2 = 0$$

Dersom matrisen er inverterbar, er $x = 0$ den eneste løsningen, og dette punktet ligger ikke på ellipsen, så da får vi nesten kreve at determinanten

$$p(\lambda) = 2(1 + \lambda)(4 + \lambda) - 2 = 2\lambda^2 + 10\lambda + 6$$

blir null, noe som skjer når

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Likningen $2(1 + \lambda)x_1 + x_2 = 0$ gir i såfall at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2(1 + \lambda) \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \pm \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Hvis vi nå setter inn disse punktene i ellipselikningen, får vi

$$s^2 \left(1 + \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{13})^2 \right) = 1,$$

slik at

$$s = \pm \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{13})^2} = \pm \frac{4}{4 + (3 \pm \sqrt{13})^2}.$$

Alt i alt har vi nå de fire punktene

$$\pm \frac{4}{4 + (3 \pm \sqrt{13})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \pm \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Nå er det bare å putte disse inn i h og sjekke hvilken som gir størst verdi.

11 Vi setter

$$g(x) = 6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2,$$

og beregner

$$f'(x) = (1, 2)$$

og

$$g'(x) = (12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2), 12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)).$$

slik at lagrangelikningene blir

$$12(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2) = \lambda$$

$$12(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = 2\lambda$$

$$6(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 = 3$$

nå er det kanskje ryddigst å sette $u = x_1 + x_2$, $v = x_1 - x_2$, slik at likningssystemet blir

$$12u + 4v = \lambda$$

$$12u - 4v = 2\lambda$$

$$6u^2 + 2v^2 = 3$$

Gausseliminasjon av de to første likningene gir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og setter vi denne i ellipselikningen, får vi

$$\lambda^2 \left(\frac{6}{64} + \frac{2}{64} \right) = 3$$

som gir

$$\lambda = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

Siden f er plan, gir en av disse maksimum, og den andre minimum; de faktiske x -koordinatene finner vi ved å løse likningssystemene

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \pm \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og evaluere f for å finne hva som er maksimum og hva som er minimum.

8 Aksiomene er

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dersom $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Vi har jo allerede i TMA4106 sjekket at $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ er et indreprodukt, så det første er greit. Aksiom to følger av lineariteten til indreproduktet, mens aksiom tre er trekantulikheten; se her:

<https://folk.ntnu.no/mortano/grunnstoff/2-7.pdf>

- 9] Å vise at aksiomene er sanne for disse to er trivielt. Det som er interessant er tolkningen. Disse er spesialtilfeller av p -normen

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p}.$$

1-normen

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_k |x_k|$$

får du når $p = 1$, mens

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$$

er det du får når $p \rightarrow \infty$. Etterhvert som p stiger vil den største komponenten dominere de andre under kvadratrottegnet, slik at vi får og når p er stor nok, vil

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_k |x_k|^p} \approx \sqrt[p]{|x_l|^p} = |x_l|$$

der x_l er det største elementet.

- 10] Vi må skissere algebraiske kurver på formen

$$x^p + y^p = 1$$

Dersom $p = 1$ får vi fire likninger på formen

$$\pm x + \pm y = 1$$

alt etter i hvilken kvadrant vi er i, så vi får en klassisk diamant. For $p = \infty$ får vi likningen

$$|x| + |y| = 1$$

som rett og slett blir enhetskvadratet. For $p = 2$ får vi den vanlige enhetssirkelen, og for andre p for vi forskjellige mellomting mellom $p = 1$ og $p = \infty$, se figur her:

<https://math.stackexchange.com/questions/1746413/p-norm-with-p-to-infinity>

- 11] For eksempel matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

duger, vi får likningen

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix} \\ &= 2(x^2 + xy + y^2) \\ &= \frac{3}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 \\ &= \frac{(x + y)^2}{2/3} + \frac{(x - y)^2}{2} \end{aligned}$$

Dette er en ellipse med halvakser $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$, rotert førtifem grader på koordinataksene.

- 3] Dette finnes ikke.