3 - 2 - OM KART OG KOMPASS OG TRYKK OG TEMPERATUR - LF

$\boxed{0}$ Gradientvektoren er

$$f'(x) = (2x_1 + x_2 + 1, x_1 + 2x_2 - 1).$$

Vi setter denne lik null

$$f'(x) = 0,$$

og får likningene

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 1 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

som har løsning $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Nivåkurvene er litt tricky - her gjelder det å ha et øye for smarte koordinattransformasjoner. Vi husker rotasjonsmatrisen

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Koordinatsystemet til x er rotert førtifem grader i forhold til koordinatsystemet y dersom

$$x = R(\pi/4)y$$

eller

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Setter vi dette inn for x i funksjonen, får vi

$$\begin{aligned} f(x(y)) &= f(Ry) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ &= \frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_2 \end{aligned}$$

og setter vi denne lik en konstant, får vi

$$\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - \sqrt{2}y_2 = C,$$

som kan skrives om til

$$3y_1^2 + \left(y_2 - \sqrt{2}\right)^2 = 2C + \frac{1}{2}$$

eller

$$\frac{y_1^2}{\left(2C + \frac{1}{2}\right)/3} + \frac{\left(y_2 - \sqrt{2}\right)^2}{2C + \frac{1}{2}} = 1$$

som forteller oss at nivåkurven til $f(x) = C$ er en en ellipse med halvakser $\sqrt{\left(2C + \frac{1}{2}\right)/3}$ og $\sqrt{2C + \frac{1}{2}}$ med sentrum i $y = (0, \sqrt{2})^T$ aka $x = (-1, 1)^T$ aka bunnpunktet.

$\boxed{1}$ Vi setter g inn i f og får den envariable funksjonen

$$f(g(s)) = a(x_1 + s\cos\theta) + (x_2 + bs\sin\theta) + c$$

så kjerneregelen du lærte på skolen gir oss at vi får indreproduktet mellom gradienten og retningen:

$$\frac{d}{ds} f(g(\theta)) = a\cos\theta + b\sin\theta = (a,b)\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

Tenk på retningen $(\cos\theta, \sin\theta)^T$ som en dimensjonsløs ting du ganger med s for å få en vektor i $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{2}$ Vi får $f'(x) = \beta^T$. Strengt tatt er dette et spesialtilfelle av oppgave 2, men en morsom fun fact kan vel ikke fremsies for ofte.

$\boxed{3}$ Hvis du skriver ut komponentene og tar jacobi, vil du se at $f'(x) = A$. Dette er det første av mange pene eksempler på at regneregler du kjenner fra envariable funksjoner generaliserer pent til flervariable dersom du setter inn matrisemultiplikasjon overalt der det er vanlig multiplikasjon i regelen du kan fra før.

$\boxed{4}$

$\boxed{5}$

$\boxed{6}$ Her er det bare å skrive om

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

til

$$\nabla^T h(x) = \nabla^T f(g(x))\nabla^T g(x)$$

og så transponere til

$$\nabla h(x) = \nabla g(x)\nabla f(g(x)).$$

$\boxed{7}$ Vi følger hintet og skriver ut

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})\,x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

som har gradient

$$(2a_{11}x_1 + (a_{12}+a_{21})\,x_2, (a_{12}+a_{21})\,x_1 + 2a_{22}x_2).$$

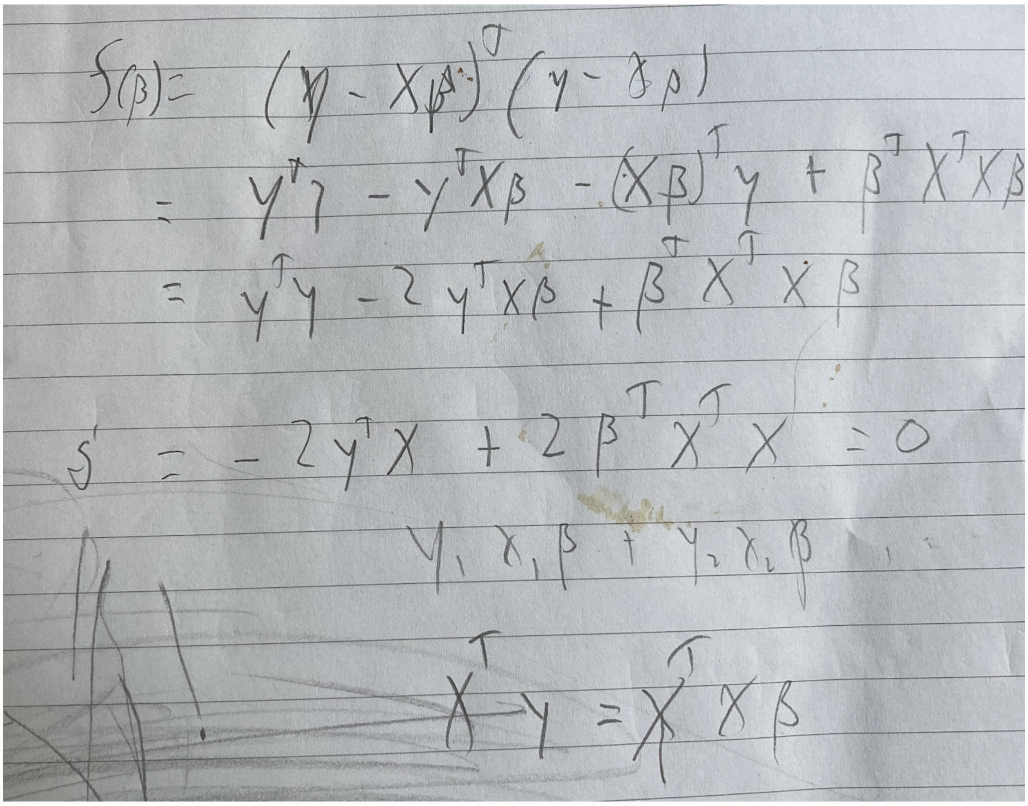
som er det samme som $f'(x) = x^T\left(A + A^T\right)$. siden

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{21}+a_{12} \\ a_{12}+a_{21} & 2a_{22}\end{pmatrix}.$$

Vi kan alltid skrive

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

og $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ kalles den **symmetriske delen** av A, mens $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ kalles den **skjev-symmetriske delen**. Dekomposisjonen kalles **toeplitzdekomposisjonen**. Siden $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ er symmetrisk, er $\nabla f = f'$.

8 

9 Gradienten er

$$f'(x) = (2a_{20}x_1 + a_{11}x_2 + a_1, a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_2)$$

og det kritiske punktet tilfredsstiller likningssystemet

$$\begin{aligned} 2a_{20}x_1 + a_{11}x_2 &= -a_1 \\ a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 &= -a_2. \end{aligned}$$

Dette har entydig løsning dersom matrisen er inverterbar og dette skjer hvis og bare hvis

$$4a_{20}a_{02} - a_{11}^2 \neq 0.$$

Hvorvidt det er topp eller bunn skal vi komme tilbake til om noen uker, og a_{11}-koeffisienten i den ideelle gasslov er $1/Nk$ mens de andre er null.

10 Gradientene er

$$f_1'(x) = \big(2(x_1 - 1), 2x_2\big) \qquad \text{og} \qquad f_2'(x) = \big(2(x_1 - 4), 2(x_2 - 2)\big)$$

slik at

$$f_1'(1,1) = (0,2) \qquad \text{og} \qquad f_2'(1,1) = (-6,-2)$$

Tangentplanene blir

$$p_1(s) = -3 + (0,2)\begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = -3 + 2(s_2 - 1)$$

og

$$p_2(s) = 7 - (6,2)\begin{pmatrix} s_1 - 1 \\ s_2 - 1 \end{pmatrix} = -5 - 6(s_1 - 1) - 2(s_2 - 1).$$

Nullnivåkurvene skjærer hverandre i punktet s som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} 2(s_2 - 1) &= 3 \\ 6(s_1 - 1) - 2(s_2 - 1) &= 5. \end{aligned}$$

og dette klarer du nok å regne ut.

$\boxed{11}$ Nivåkurvene til

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4$$

tilfredsstiller

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 = C$$

og er sirkler med radius $\sqrt{4 + C}$ med sentrum i $(1,0)^T$. Den andre løses på samme måte.

$\boxed{16}$ Denne oppgaven ser tilforlatelig ut, men peker frem på en veldig viktig ting, spesielt for de som skal lære elektromagnetisme. Vi partiellderiverer og får

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u(x) = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

slik at

$$u'(x) = -\frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{x^T}{|x|^3}.$$

Dette er en vektor som alltid peker rett inn mot origo, og nivåflatene er dønn sfæriske, altså kuleskall sentrert i origo med radius $1/\sqrt{C}$, siden likningen

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = C$$

kan skrives om til

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{C}.$$

$\boxed{17}$ Vi er interessert i funksjonen

$$g(t) = u(x(t)) = \frac{1}{|u(x(t))|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Denne er det bare å derivere med hensyn på t, og få

$$g'(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$$

eller bruke kjerneregelen og de foregående oppgavene og få

$$g'(t) = u'(x(t))x'(t) = -\frac{(\cos t, \sin t, t)}{(1+t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}.$$

som selvfølgelig blir det samme.

$\boxed{18}$ Et skalarfelt av n variable har n partiellderiverte, og hver av disse er et skalarfelt med n partiellderiverte, så da blir det totalt n^2 dobbelderiverte. De rene dobbelderiverte til u er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_k^2}{|x|^5}$$

mens de blandede er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = -3\frac{x_k x_l}{|x|^5}$$

$\boxed{19}$ Yes sir, I can harmonic function. I can harmonic function all the night:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_k^2}{|x|^5} \right) \\
&= \left(\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} + \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} + \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5} \right) \\
&= \left(\frac{1}{|x|^3} - \frac{1}{|x|^3} \right) = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{20}$ Cauchy-Riemann-likningene er

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dersom vi deriverer den første likningen med hensyn på x og den andre likningen med hensyn på y og antar at

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

(dette er sant, men litt for hardt for oss å bevise), får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Likeledes får vi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

ved å derivere C-R-likningene henholdsvis med hensyn y og x og anta likhet mellom de blandede dobbelderiverte til u (som nok en gang er sant, men for vanskelig for oss å bevise). Real- og imaginærdelene til en kompleks deriverbar funksjon er altså harmoniske funksjoner!

UKENS NØTTER

$\boxed{1}$ Det er nå generelt slik at det vise at noe ikke er sant dersom det ikke er sant, ofte kan være lettere enn å bevise at noe er sant dersom det er sant. Grenserverdier er ikke så enkle å håndtere i flervariabel kalkulus, men denne eksisterer ikke, og det kan vi se ved å bytte til polarkoordinater

$$x_1 = r\cos\theta$$
$$x_2 = r\sin\theta$$

og sette inn i uttrykket for f:

$$f\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = 2\cos\theta\sin\theta$$

Nå ser vi at denne funksjonen er konstant på alle rette linjer ut fra origo, men med forskjellig funksjonsverdi $\cos\theta\sin\theta$ på hver linje. Disse linjene møtes i origo, så det er klart at grenseverdien der ikke kan eksistere. Hva skulle den vært?

$\boxed{2}$ Denne oppgaven er mest med for å illustrere at det også kan være vanskelig å avgjøre om en grenseverdi eksisterer når den ikke eksisterer. Vi prøver samme triks som i sted, og får

$$f\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{2r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}.$$

Hvis vi bestemmer oss for en verdi for θ og så lar $r \to 0$ slik at x går mot origo, kan det ved første øyekast se ut som om grenseverdien er null, siden telleren går mot null og nevneren mot $\sin^2\theta$, men dette er feil. Hvis vi sniker oss inn i origo på en slik måte at $\sin^2\theta$ går mot null etterhvert som vi nærmer oss origo ved å reise inn langs kurven $x_2 = x_1^2$ istedet, får vi

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \frac{2x_1^4}{2x_1^4} = 1.$$

som helt klart går mot 1 når $x_1 \to 0$. Så denne grenseverdien eksisterer visst heller ikke, men det var litt vanskeligere å oppdage.