3 - 13 - TRIPPELINTEGRALER - LF

$\boxed{1}$ Her er det bare å antiderivere slik som i dobbeltintegraler. Husk å holde tungen beint i munnen på hvilken variabel du antideriverer:

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x_1^2 x_2 + x_3 \, dx_3 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^2 \left(x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 \right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_2 dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 3x_1^2 x_2 + \frac{9}{2} \, dx_2 dx_1$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{3}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{9}{2} x_2 \right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_1$$

$$= \int_0^1 6x_1^2 + 9 \, dx_1 = 2x_1^3 + 9x_1 \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 11$$

Dersom integranden måles i masse per volum, forteller det innerste integralet deg hvor mye masse per areal som sitter over punktet med koordinater (x_1, x_2). Tenk at du er geolog og driller en sedimentprøve og måler vekten av den for å estimere masse per areal under punktet der du står. Eller at du står på taket av et hus eller og driller ned i huset og veier - treffer du bare isolasjon og luft er det lav vekt per areal, treffer du tilfeldigvis mønsåsen eller en sperre eller en laftestokk eller midt i en vegg, er det høyere vekt per areal.

For å forstå de to innerste integralene må du tenke at du står ved siden av huset og lurer på hvor mye masse det er i huset per meter hus, tenk at du kapper huset med en motorsag på forskjellige steder, og måler masse per meter for hvert tverrsnitt bortover.

$\boxed{2}$ Her er en annen rekkefølge:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x_1^2x_2+x_3\ dx_3dx_2dx_1 &= \int_0^1\int_0^3\int_0^2 x_1^2x_2+x_3\ dx_2dx_3dx_1\\ &= \int_0^1\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+x_2x_3\right)_{x_2=0}^{x_2=2} dx_3dx_1\\ &= \int_0^1\int_0^3 2x_1^2+2x_3\ dx_3dx_1\\ &= \int_0^1 \left(2x_1^2x_3+x_3^2\right)_{x_3=0}^{x_3=3} dx_1\\ &= \int_0^1 6x_1^2+9\ dx_1\\ &= 2x_1^3+9x_1\Big|_{x_1=0}^{x_1=1}=11\end{aligned}$$

Jeg sa du skulle gjøre det på alle seks måter, men det er vel litt overkill.

$\boxed{3}$ Planet som går gjennom $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(0,0,1)$ er $x_3=1-x_1-x_2$, og dette skjærer x_1x_2-planet i linjen $x_2=1-x_1$. Det innerste integralet, altså det som regner ut masse per areal over et punkt i x_1x_2-planet, er

$$\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2x_2+x_3\ dx_3.$$

Denne funksjonen må nå dobbeltintegreres over korrekt område i x_1x_2-planet:

$$\int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2x_2+x_3\ dx_3dx_2dx_1$$

Å regne det ut er bare gjøre som i oppgave 2, huske å merke tydelig hva som skal inn i hvilken variabel slik:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x_1}\int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2x_2+x_3\ dx_3dx_2dx_1 &= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\left(x_1^2x_2x_3+\frac{1}{2}x_3^2\right)_{x_3=0}^{x_3=1-x_1-x_2} dx_2dx_1\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x_1} x_1^2x_2(1-x_1-x_2)+\frac{1}{2}(1-x_1-x_2)^2\ dx_2dx_1\end{aligned}$$

og så videre.

$\boxed{4}$ Dette området ser ut som pyramiden i Giza, og flaten $x_3=1-|x_1|-|x_2|$ skjærer x_1x_2-planet i $|x_1|+|x_2|=1$. Det konseptuelt enkleste er å bruteforce integralet og sette opp ett integral for hver kvadrant i x_1x_2-planet:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1^2x_2 + x_3 \; dx_3dx_2dx_1$$
$$+\int_0^1 \int_0^{1+x_1} \int_0^{1+x_1-x_2} x_1^2x_2 + x_3 \; dx_3dx_2dx_1$$
$$+\int_0^1 \int_0^{-1-x_1} \int_0^{1+x_1+x_2} x_1^2x_2 + x_3 \; dx_3dx_2dx_1$$
$$+\int_0^1 \int_0^{-1+x_1} \int_0^{1-x_1+x_2} x_1^2x_2 + x_3 \; dx_3dx_2dx_1$$

$\boxed{5}$ Massesenteret til et rektangel er ikke så spennende, men vi kan ta tetraederet. Massen er

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \rho(x)\; dx =& \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \; dx_3dx_2dx_1 \\
=& \rho \int_0^1 \int_0^{1-x_1} 1 - x_1 - x_2 \; x_2 dx_1 \\
=& \rho \int_0^1 \Big(x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \Big)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} \; dx_1 \\
=& \rho \int_0^1 1 - x_1 - x_1(1-x_1) - \frac{1}{2}(1-x_1)^2 \; dx_1 = \frac{\rho}{6}
\end{aligned}$$

(dette kunne vi også funnet med formelen for volum av pyramide) slik at massesenteret blir

$$\frac{1}{\iiint_\Omega \rho(x)\; dx} \begin{pmatrix} \iiint_\Omega x_1\rho(x)\; dx \\ \iiint_\Omega x_2\rho(x)\; dx \\ \iiint_\Omega x_3\rho(x)\; dx \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \; dx_3dx_2dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \; dx_3dx_2dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \; dx_3dx_2dx_1 \end{pmatrix}.$$

Dette ser ut som tre forskjellige integraler, men på grunn av symmetrien i problemet er det er egentlig bare ett. Vi beregner

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \; dx_3dx_2dx_1 =& \int_0^1 \int_0^{1-x_1} x_1(1-x_1-x_2)\; dx_2dx_1 \\
=& \int_0^1 x_1\Big(x_2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \Big)_{x_2=0}^{x_2=1-x_1} \; dx_1 \\
=& \frac{1}{2}\int_0^1 x_1(1-x_1)^2 \; dx_1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

og massesenteret sitter følgelig i

$$6\begin{pmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_1 \; dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_2 \; dx_3 dx_2 dx_1 \\ \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} x_3 \; dx_3 dx_2 dx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Dette blir helt forferdelig:

$$\iiint_\Omega f = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \int_{-\sqrt{1-x_2^2-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_2^2-x_1^2}} f(x) \; dx_3 dx_2 dx$$

$\boxed{7}$ Dette blir determeinanten til matrisen ganget med volumet til enhetskuben, altså $4 \cdot 1$.

$\boxed{8}$
$$|g'(s, \theta, z)| = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = s$$

$\boxed{9}$ Integrasjonsområdet er bildet av en rektangulær boks under sylinderkoordinatavbildningen, så dette integralet blir veldig greit:

$$\begin{aligned} \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (s^2 + z^2) \; sdsd\theta dz &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^3 s^3 + sz^2 \; dsd\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{2}s^2 z^2 \right)_{s=0}^{s=3} d\theta dz \\ &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} + \frac{9}{2}z^2 \; d\theta dz \\ &= 2\pi \int_0^5 \frac{81}{4} + \frac{9}{2}z^2 \; dz = \pi \left(\frac{5 \cdot 81}{2} + 125 \cdot 3 \right) \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Funksjonen

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = s$$

ser ut som en fotballkjegle som står på hodet, og skjærer kuleskallet

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{1 - s^2}$$

i $s = 1/\sqrt{2}$, så volumet er

$$
\begin{aligned}
2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta =& 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-s^2}-s\right) s ds d\theta \\
=& 2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} s\sqrt{1-s^2}-s^2 \, ds d\theta \\
=& 2\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}-\frac{1}{3}s^3\right)_{s=0}^{s=1/\sqrt{2}} d\theta \\
=& 2\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}\left((1/2)^{3/2}-1\right)-\frac{1}{3\cdot 2^{3/2}} \, d\theta = \frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

På grunn av oppgaveformuleringen sitter det et identisk volum på undersiden av x_1x_2-planet, så korrekt volum blir

$$
2\int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_s^{\sqrt{1-s^2}} s dz ds d\theta = \frac{8}{3}\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
$$

11 Ulikhetene $0 \leq x_3 \leq 1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ blir $0 \leq z \leq 1-s$ i sylinderkoordinater. Denne kjeglen står motsatt av den i forrige oppgave og skjærer x_1x_2-planet i enhetssirkelen. Siden $x_2 \geq 0$ er kjeglen kappa i to langs et vertikalt plan gjennom midten av kjeglen, så volumet blir

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{1-s} zs \; s dz d\theta ds =& \int_0^1\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}z^2s^2\right)_{z=0}^{z=1-s} d\theta ds \\
=& \int_0^1\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(1-s)^2s^2\right) d\theta ds \\
=& \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-s)^2s^2 \, ds = \frac{\pi}{60}.
\end{aligned}
$$

12
$$
g'(r,\theta,\phi) = \left|\begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix}\right| = r^2\sin\phi.
$$

13 Massesenter er gitt ved

$$
\frac{1}{\iiint_\Omega \rho(x)\,dx}\begin{pmatrix} \iiint_\Omega x_1\rho(x)\,dx \\ \iiint_\Omega x_2\rho(x)\,dx \\ \iiint_\Omega x_3\rho(x)\,dx \end{pmatrix}.
$$

En kvart enhetskule i kulekoordinater som ligger slik at $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$, beskrives av ulikhetene

$$
0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2,
$$

og siden massetettheten er konstant, kansellerer denne. På grunn av symmetri vet vi at x_1-koordinaten er 0:

$$\iiint_\Omega x_1 \, dx = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta \sin^2\varphi \, d\varphi d\theta dr = 0$$

samt at x_2- og x_3-koordinatene må være like:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x_2 \, dx &= \iiint_\Omega x_3 \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \sin 2\varphi \, d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \, d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Volumet til en kvart enhetskule er $\pi/3$, så vi kan nå beregne

$$\frac{\rho \iiint_\Omega x_2 \, dx}{\rho \iiint_\Omega dx} = \frac{\pi/8}{\pi/3} = \frac{3}{8}$$

slik at massesenteret sitter i $(0, 3/8, 3/8)$. Dette skalerer selvfølgelig til vilkårlig radius, slik at om radien er r er massesenteret i $(0, 3r/8, 3r/8)$. For en åttendels kule er det bare å bytte ut π med $\pi/2$ i integrasjonsgrensene for θ og bruke at alle koordinatene må være like, slik at massesenteret sitter i $(3/8, 3/8, 3/8)$. Samme med halvkulen, bruk symmetri og bruk 2π som øvre grense i θ og oppdag at massesenteret sitter i $(0, 0, 3/8)$.

$\boxed{15}$ Her er det nok best å bruke sylinderkoordinater. Flaten $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ blir $z = \sqrt{s^2 - 4}$ i sylinderkoordinater, så vi kan integrere oss fra langs $s = 0$ til $s = \sqrt{4 + z^2}$ innerst, og få

$$\int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4+z^2}} s ds d\theta dz = \pi \int_0^{\sqrt{5}} 4 + z^2 \, dz = \frac{17\sqrt{5}}{3}\pi.$$

$\boxed{16}$ Når φ går fra 0 til π, går $\cos\varphi$ fra 1 til -1, så likningen

$$r = 4 - \cos(\varphi).$$

beskriver en slags litt pæreformet sak i $\mathbb{R}^3$. Det er nok best å integrere seg fra 0 til denne kurven i r først. Volumet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{4-\cos\varphi} r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (4 - \cos\varphi)^3 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{6} \left(5^4 - 3^4\right).$$

$\boxed{17}$ Det som er skummelt her er at vi har

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

så dersom vi skriver $E(r, \theta, \phi)$, sier vi

$$E(r,\theta,\phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,(r^2+\theta^2+\phi^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}r\\\theta\\\phi\end{pmatrix}$$

men mener egentlig

$$E\left(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix}r\cos\theta\sin\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\phi\end{pmatrix}.$$

Det ryddigste er derfor å skrive

$$E = h\left(r,\theta,\phi\right) = f\left(g\left(r,\theta,\phi\right)\right)$$

og så holde nøye styr på hva vi mener med f, g og h. La oss først derivere f:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_1^2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_2}{|x|^5} & -3\frac{x_1x_3}{|x|^5}\\ -3\frac{x_2x_1}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_2^2}{|x|^5} & -3\frac{x_2x_3}{|x|^5}\\ -3\frac{x_3x_1}{|x|^5} & -3\frac{x_3x_2}{|x|^5} & \frac{1}{|x|^3} - 3\frac{x_3^2}{|x|^5}\end{pmatrix}\\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|^3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \frac{3}{|x|^5}\begin{pmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2\end{pmatrix}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|^3}I - \frac{3}{|x|^5}xx^T\right)
\end{aligned}$$

Kulekoordinater er gitt ved

$$g\left(r,\theta,\phi\right) = \begin{pmatrix}r\cos\theta\sin\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\phi\end{pmatrix}$$

slik at

$$g'\left(r,\theta,\phi\right) = \begin{pmatrix}\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi\end{pmatrix}.$$

Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned}
h'\left(r,\theta,\phi\right) =& f'(g(r,\theta,\phi))g'(r,\theta,\phi)\\
=& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(I - 3\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}\right)\\
&\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

som vi kan gange ut og forenkle, men i dette tilfellet er det faktisk enklere å sette kulekoordinatene inn i uttrykket for E (nå med korrekt notasjon)

$$E = h(r,\theta,\phi) = f(g(r,\theta,\phi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} r^{-2}\cos\theta\sin\phi \\ r^{-2}\sin\theta\sin\phi \\ r^{-2}\cos\phi \end{pmatrix}$$

og så derivere på direkten:

$$\begin{aligned} E = h'(r,\theta,\phi) =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} -2r^{-3}\cos\theta\sin\phi & -r^{-2}\sin\theta\sin\phi & r^{-2}\cos\theta\cos\phi \\ -2r^{-3}\sin\theta\sin\phi & r^{-2}\cos\theta\sin\phi & r^{-2}\sin\theta\cos\phi \\ -2r^{-3}\cos\phi & 0 & -r^{-2}\sin\phi \end{pmatrix} \\ =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\begin{pmatrix} -2\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ -2\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ -2\cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$