TMA4101/4106/4111/4121

3 - 12 - FLATEINTEGRALER

1-3 Disse gjorde jeg i forelesning den 30. oktober. Jeg skal få tegnet noen ordentlige figurer etterhvert, men slikt tar litt tid.

4 Hvis vi tenker at kuppelen står vertikalt slik som på en typisk bygning, kan vi gjøre noe slikt

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} p(z)\cos\theta \\ p(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

og la definisjonsmengden være $[0, 2\pi) \times [0, 1]$.

5 Funksjonen i oppgave 1 er en lineæravbildning, du ganger bare arealet av definisjonsmengden med

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{11}$$

og vips så har du arealet av flaten. For sylinderflaten beregner vi

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

så arealet blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 dz d\theta = 2\pi.$$

Parametriseringen til enhetskuleskallet er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

slik at flateelementet blir

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right| = \sin\varphi.$$

Denne er strengt tatt null på nord- og sydpolen, men det går bra. Nå er det bare å integrere:

$$\iint_S dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\theta d\varphi = 4\pi.$$

Er radien r, justerer vi bare parametriseringen slik:

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

og regner likeledes ut at

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \varphi} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right| = r^2 \sin\varphi.$$

og at

$$\iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\varphi \; d\theta d\varphi = 4\pi r^2.$$

$\boxed{6}$ Parametrisering for et kuleskall med radius 9 er

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 9\cos\theta\sin\varphi \\ 9\sin\theta\sin\varphi \\ 9\cos\varphi \end{pmatrix},$$

men vi må finne en fornuftig definisjonsmengde. Dersom $x_3 = 2$, er $\varphi = \arccos 2/9$, så en definsjonsmengden blir $[0, 2\pi) \times [0, \arccos 2/9]$, og arealet blir

$$\iint_\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(2/9)} 81 \sin\varphi \; d\varphi d\theta = 2\pi \cdot 81 \cdot (1 - 2/9) = 126\pi.$$

$\boxed{7}$ La oss gå for det ideelle gasslovtaket, det blir mer enn komplisert nok. Taket er gitt ved $f(x) = x_1 x_2$, så en fin parametrisering er

$$g(r, \theta) = \begin{pmatrix} 4r\cos\theta \\ 3r\sin\theta \\ 12r^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix},$$

med definisjonsmengde $[0, 1] \times [0, 2\pi)$. Flateelementet blir

$$\left|\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 3\sin\theta \\ 24r\sin 2\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4r\sin\theta \\ 3r\cos\theta \\ 12r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}\right| = 12r\sqrt{1 + 16r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta}.$$

Jeg må innrømme at jeg ikke gadd å beregne kryssproduktet over; jeg brukte en annen formel. Dersom flaten Σ faktisk er grafen til et skalarfelt f, er

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

en finfin parametrisering, og flateelementet blir

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}.$$

Sett opp denne og bytt koordinater slik som i økt 3-7 og vips så har du flateelementet. Arealet av taket blir

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} 12r\sqrt{1+16r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta}\, rd\theta dr,$$

som ikke er helt godt å beregne for hånd, men trivielt numeriske metoder.

$\boxed{8}$ Overflatearealet til det halve enhetskuleskallet er 2π, og massesenteret blir

$$\frac{1}{2\pi\rho}\begin{pmatrix} \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\varphi\, d\varphi d\theta \\ \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\sin^2\varphi\, d\varphi d\theta \\ \rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{9}$ La oss si at radien er r. Vi beregner

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}\times\frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dersom du tenker at sylinderen har en topp og en bunn på konstante verdier av z, kan du parametrisere disse enkelt. La oss si at bunnen er i $z=0$, da får du

$$g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og du kan selv sjekke at normalvektoren blir

$$g(x_1,x_2) = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alt etter hvilken vei du ganger sammen tangentene.

$\boxed{10}$ Vi beregner

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

å nei å nei det ble visst inn-normalvektor. Vi prøver igjen med mere hell:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{11}$ La oss ta et tetraeder Ω i første oktant begrenset av koordinatplanene og et skrått plan som skjærer koordinataksene i $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ og $(0,0,3)$. En parametrisering for det skrå planet er for eksempel

$$g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3-3x_1-3x_2/2 \end{pmatrix}$$

og utnormalvektoren blir

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parametriseringer for de andre flatene er for eksempel

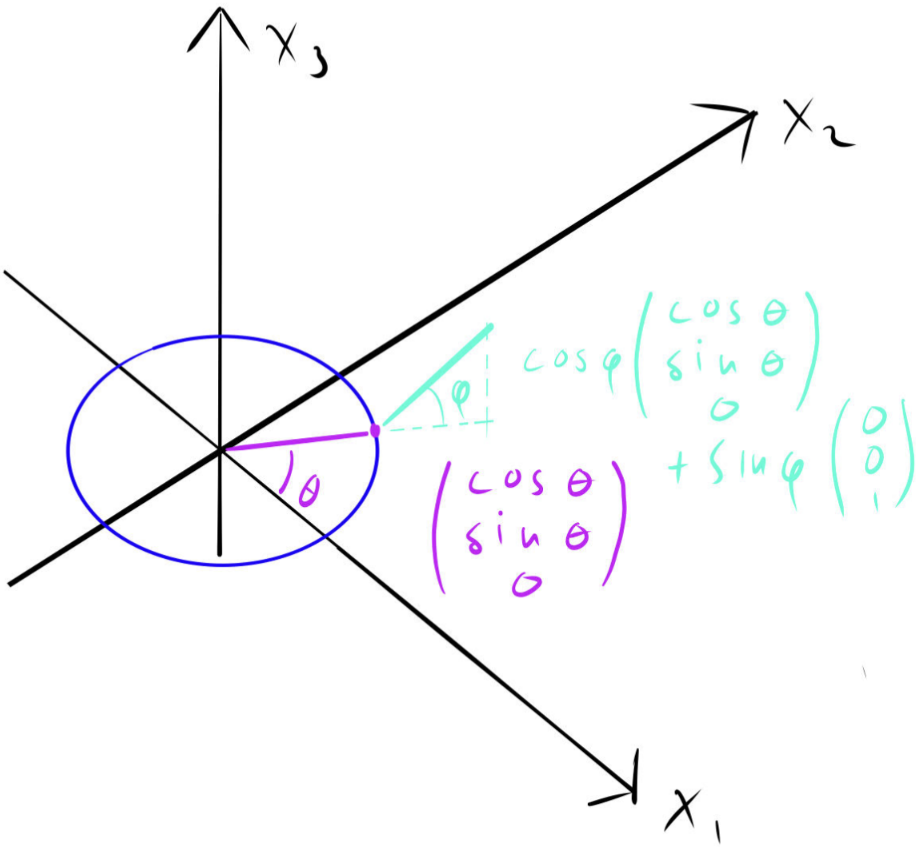
$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

for den i $x_1 x_2$-planet og

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

for den i $x_1 x_3$-planet og så videre.

$\boxed{12}$ Vi kan lage parametrisering for en smultring ved å se på følgende figur:



Setter vi sammen en lineærkombinasjon av disse slik:

$$g(\theta, \phi) = r_1 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2\cos\varphi)\cos\theta \\ (r_1 + r_2\cos\varphi)\sin\theta \\ r_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

blir bildet av $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ under g en smultring dersom $r_2 < r_1$:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Torus`

13 Vektorfeltet er

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La Ω være sylinderen fra oppgave 9. Vi må regne ut

$$\iint_{\partial\Omega} f \cdot dS = \iint_{\text{Topp}} f \cdot dS + \iint_{\text{Bunn}} f \cdot dS + \iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot dS.$$

De to første integralene er null siden f står ortogonalt på utnormalvektorene på topp og bunn, jf oppgave 9. Fluksen ut sylinderflaten blir også null, men det får vi nesten beregne, la oss si at radien er r og høyden h:

$$\iint_{\text{Sylinderskall}} f \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^h zr \cos\theta \, dz d\theta = 0$$

Hvis du beregner fluksen ut av kulen, tetraederet og smultringen, vil du også finne at den er null. Alle disse integralene lar seg fint beregne, men det finnes et triks for å finne ut av det raskere. Dette trikset kalles divergensteoremet og er bare Greens teorem i tre dimensjoner. Skjønte du Greens teorem i to dimesjoner klarer du antagelig klarer du å gjette deg til hvordan det ser ut, og vi skal ha det i uke 46.

14 Coulombfeltet på en fra en punktladning q plassert i origo er:

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{|x|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og parametriseringen til et kuleskall med radius r er

$$z(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tangentvektorene er

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

slik at utnormalvektoren blir (merk rekkefølgen på faktoren slik at vi får ut- og ikke innnormalvektor)

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} \times \frac{\partial z}{\partial\theta} = r^2 \sin\varphi \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Så beregner vi

$$E(z(\theta, \varphi)) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Til slutt er det bare å integrere:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} E \cdot dS = &\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \left(r^2 \sin\varphi \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right) \, d\theta d\varphi \\
=&\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^3\varphi + \sin^2\theta \sin^3\varphi + \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\
=&\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi + \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\theta d\varphi \\
=&\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\theta d\varphi = \frac{q}{\epsilon_0}.
\end{aligned}$$